Zadatak 041 (Anamarija, gimnazija)

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Sunca i Zemlje 1 : 4 ? (g_Z = 9.81 m/s^2)

Rješenje 041

$$R_S = 108 \cdot R_Z, \quad \rho_S = \frac{1}{4} \cdot \rho_Z, \quad g_Z = 9.81\ m/s^2, \quad g_S = ?$$

Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase m_Z možemo napisati:

$$m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R_Z^2}.$$

Za privlačenje tijela mase m i Sunca mase m_S možemo napisati:

$$m \cdot g_S = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{R_S^2}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se akceleracija slobodnog pada na površini Sunca:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot g_S = G \cdot \dfrac{m \cdot m_S}{R_S^2} \\ m \cdot g_Z = G \cdot \dfrac{m \cdot m_Z}{R_Z^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{m \cdot g_S}{m \cdot g_Z} = \frac{G \cdot \dfrac{m \cdot m_S}{R_S^2}}{G \cdot \dfrac{m \cdot m_Z}{R_Z^2}} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\dfrac{m_S}{R_S^2}}{\dfrac{m_Z}{R_Z^2}} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{m_S \cdot R_Z^2}{m_Z \cdot R_S^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{m_S \cdot R_Z^2}{m_Z \cdot (108 \cdot R_Z)^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{m_S \cdot R_Z^2}{m_Z \cdot 108^2 \cdot R_Z^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{m_S}{m_Z \cdot 108^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_S = \rho_S \cdot \frac{4}{3} \cdot R_S^3 \cdot \pi \\ m_Z = \rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot R_Z^3 \cdot \pi \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot \frac{4}{3} \cdot R_S^3 \cdot \pi}{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot R_Z^3 \cdot \pi \cdot 108^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot R_S^3}{\rho_Z \cdot R_Z^3 \cdot 108^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot (108 \cdot R_Z)^3}{\rho_Z \cdot R_Z^3 \cdot 108^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot 108^3 \cdot R_Z^3}{\rho_Z \cdot R_Z^3 \cdot 108^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot 108^3}{\rho_Z \cdot 108^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot 108}{\rho_Z} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \rho_Z \cdot 108}{\rho_Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = 27 \Rightarrow g_S = 27 \cdot g_Z \Rightarrow g_S = 27 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 264.87 \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 041

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Zemlje i Sunca 4 : 1 ? (g_Z = 9.81 m/s^2)

Rezultat: $264.87 \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 042 (Anamarija, gimnazija)

Odredi akceleraciju slobodnog pada tijela na površini Sunca ako znamo da je polumjer Zemljine staze R = 1.5 · 10^8 km, polumjer Sunca r = 7 · 10^5 km i vrijeme ophoda Zemlje oko Sunca T = 1 godina.

Rješenje 042

R = 1.5 · 10^8 km = 1.5 · 10^{11} m, r = 7 · 10^5 km = 7 · 10^8 m,
T = 1 god = [365.25 · 24 · 60 · 60] = 31557600 s, g = ?

Za privlačenje tijela mase m i Sunca mase m_S možemo napisati ($m \cdot g$ je težina tijela mase m na Suncu):

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r^2} \; / \cdot \frac{r^2}{m} \Rightarrow g \cdot r^2 = G \cdot m_S.$$

Sila gravitacije između Sunca mase m_S i Zemlje mase m_Z na udaljenosti R mora biti jednaka centripetalnoj sili na Zemlju na udaljenosti R od središta vrtnje:

$$F_G = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m_Z \cdot m_S}{R^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_Z \cdot R}{T^2} \; / \cdot \frac{R^2}{m_Z} \Rightarrow G \cdot m_S = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{T^2}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se akceleracija slobodnog pada tijela na površini Sunca:

$$\left.\begin{array}{l} g \cdot r^2 = G \cdot m_S \\ \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{T^2} = G \cdot m_S \end{array}\right\} \Rightarrow g \cdot r^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{T^2} \Rightarrow \Rightarrow g \cdot r^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{T^2} \; / \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{T^2 \cdot r^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(1.5 \cdot 10^{11} \; m\right)^3}{(31557600 \; s)^2 \cdot \left(7 \cdot 10^8 \; m\right)^2} = 273.33 \; \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 042

Odredi akceleraciju slobodnog pada tijela na površini Sunca ako znamo da je polumjer Zemljine staze $R = 1.5 \cdot 10^{11}$ m, polumjer Sunca $r = 7 \cdot 10^8$ m i vrijeme ophoda Zemlje oko Sunca T = 1 godina.

Rezultat: $273.33 \; \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 043 (Anamarija, gimnazija)

Polumjer Marsa iznosi 0.53 polumjera Zemlje, a masa 0.11 mase Zemlje. Koliko je puta sila teža na Marsu manja nego na Zemlji?

Rješenje 043

$R_M = 0.53 \cdot R_Z$, $\quad m_M = 0.11 \cdot m_Z$, $\quad \frac{g_Z}{g_M} = ?$

Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase m_Z možemo napisati ($m \cdot g_Z$ je težina tijela mase m na Zemlji):

$$m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R_Z^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_Z = G \cdot \frac{m_Z}{R_Z^2}.$$

Za privlačenje tijela mase m i Marsa mase m_M možemo napisati ($m \cdot g_M$ je težina tijela mase m na Marsu):

$$m \cdot g_M = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{R_M^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_M = G \cdot \frac{m_M}{R_M^2}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se akceleracija slobodnog pada tijela na površini Sunca:

$$\left.\begin{array}{l} g_Z = G \cdot \frac{m_Z}{R_Z^2} \\ g_M = G \cdot \frac{m_M}{R_M^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{g_Z}{g_M} = \frac{G \cdot \frac{m_Z}{R_Z^2}}{G \cdot \frac{m_M}{R_M^2}} \Rightarrow \frac{g_Z}{g_M} = \frac{m_Z \cdot R_M^2}{m_M \cdot R_Z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_Z}{g_M} = \frac{m_Z \cdot (0.53 \cdot R_Z)^2}{0.11 \cdot m_Z \cdot R_Z^2} \Rightarrow \frac{g_Z}{g_M} = \frac{m_Z \cdot 0.53^2 \cdot R_Z^2}{0.11 \cdot m_Z \cdot R_Z^2} \Rightarrow \frac{g_Z}{g_M} = \frac{0.53^2}{0.11} \Rightarrow \frac{g_Z}{g_M} = 2.55.$$

Vježba 043

Polumjer Marsa iznosi 0.53 polumjera Zemlje, a masa 0.11 mase Zemlje. Koliko je puta sila teža na Zemlji veća nego na Marsu?

Rezultat: 2.55.

Zadatak 044 (Anamarija, gimnazija)

Planet Mars ima dva prirodna satelita, Fobosa i Demiosa. Prvi se nalazi na udaljenosti r_1 = 9500 km od središta Marsa, a drugi na udaljenosti r_2 = 24000 km. Nađi periode kruženja tih satelita oko Marsa. Masa Marsa iznosi 0.107 mase Zemlje. ($m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Rješenje 044

r_1 = 9500 km = $9.5 \cdot 10^6$ m, r_2 = 24000 km = $2.4 \cdot 10^7$ m, $m_M = 0.107 \cdot m_Z$,
T_1, T_2 = ?


Mars , Fobos , Deimos

Sila gravitacije između Marsa mase m_M i Fobosa mase m na udaljenosti r_1 mora biti jednaka centripetalnoj sili na Fobos na udaljenosti r_1 od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r_1}{T_1^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r_1^2} \, / \cdot \frac{T_1^2 \cdot r_1^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^3 = G \cdot m_M \cdot T_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^3}{G \cdot m_M} \, / \sqrt{\ } \Rightarrow T_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^3}{G \cdot m_M}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \left(9.5 \cdot 10^6 \ m\right)^3 \cdot \pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 0.107 \cdot 6 \cdot 10^{24} \ kg}} = 28107 \ s \approx 7.8 \text{ h}.$$

Sila gravitacije između Marsa mase m_M i Demiosa mase m na udaljenost r_2 mora biti jednaka centripetalnoj sili na Demios na udaljenosti r_2 od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r_2}{T_2^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r_2^2} \, / \cdot \frac{T_2^2 \cdot r_2^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^3 = G \cdot m_M \cdot T_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^3}{G \cdot m_M} \, / \sqrt{\ } \Rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^3}{G \cdot m_M}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \left(2.4 \cdot 10^7 \ m\right)^3 \cdot \pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 0.107 \cdot 6 \cdot 10^{24} \ kg}} = 112888 \ s \approx 31.35 \text{ h}.$$

Vježba 044

Planet Mars ima dva prirodna satelita, Fobosa i Demiosa. Prvi se nalazi na udaljenosti $r_1 = 9.5 \cdot 10^6$ m od središta Marsa, a drugi na udaljenosti $r_2 = 2.4 \cdot 10^7$ m. Nađi periode kruženja tih satelita oko Marsa. Masa Marsa iznosi 0.107 mase Zemlje. ($m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Rezultat: T_1 = 7.8 h , T_2 = 31.35 h.

Zadatak 045 (Anamarija, gimnazija)

Neka je polumjer nekog asteroida 5 km i pretpostavimo da mu je gustoća ρ = 5.5 g/cm^3. a) Nađi akceleraciju slobodnog pada g_a na njegovoj površini. b) Odredi na koju će visinu poskočiti čovjek na asteroidu ako uporabi isti napor kojim bi na Zemlji poskočio 5 cm visoko. Asteroid ima oblik kugle. ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Rješenje 045

r = 5 km = 5000 m, ρ = 5.5 g/cm^3 = 5500 kg/m^3, h_Z = 5 cm = 0.05 m,
G = 6.67 · 10^{-11} Nm^2/kg^2, g_a = ?,

h_a = ?

Za privlačenje tijela mase m i asteroida mase m_a možemo napisati (m · g_a je težina tijela mase m na asteroidu):

$$m \cdot g_a = G \cdot \frac{m \cdot m_a}{r^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_a = G \cdot \frac{m_a}{r^2} \Rightarrow \left[m_a = \rho \cdot V \Rightarrow m_a = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_a = G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi}{r^2} \Rightarrow g_a = G \cdot \frac{4 \cdot \rho \cdot r \cdot \pi}{3} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{4 \cdot 5500 \frac{kg}{m^3} \cdot 5000 \; m \cdot \pi}{3} = 0.0077 \frac{m}{s^2}.$$

Budući da čovjek uporabi isti napor kojim bi na Zemlji poskočio h_Z visoko, imat će jednaku gravitacijska potencijalna energija na asteroidu i Zemlji:

$$m \cdot g_Z \cdot h_Z = m \cdot g_a \cdot h_a \; /:m \Rightarrow m \cdot g_Z \cdot h_Z = m \cdot g_a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{g_Z \cdot h_Z}{g_a} = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0.05 \; m}{0.0077 \frac{m}{s^2}} = 63.70 \; m.$$

Vježba 045

Neka je polumjer nekog asteroida 5000 m i pretpostavimo da mu je gustoća ρ = 5.5 g/cm^3. a) Nađi akceleraciju slobodnog pada g_a na njegovoj površini. b) Odredi na koju će visinu poskočiti čovjek na asteroidu ako uporabi isti napor kojim bi na Zemlji poskočio 50 mm visoko. Asteroid ima oblik kugle.

Rezultat: $g_a = 0077 \frac{m}{s^2}$, $h_a = 63.70 \; m.$

Zadatak 046 (Anamarija, gimnazija)

Koliko je dugačka nit jednostavnog njihala ako zamislimo da se njiše na nekom planetu jednake gustoće kao Zemlja, polumjera dva puta manjeg od Zemlje? Njihalo učini tri titraja u minuti. (g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 046

$\rho = \rho_Z$, $R = \frac{1}{2} \cdot R_Z$, g = 9.81 m/s^2, l = ?

$$t = 3 \frac{titraja}{\min} \Rightarrow t = 3 \frac{titraja}{60 \; s} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{period,} \\ \text{vrijeme jednog titraja} \end{array} \right] \Rightarrow T = \frac{1}{t} \Rightarrow T = \frac{60 \; s}{3} = 20 \; s,$$

Za privlačenje tijela mase m i planeta mase m_p možemo napisati (m · g_p je težina tijela mase m na planetu):

$$m \cdot g_p = G \cdot \frac{m \cdot m_p}{R^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_p = G \cdot \frac{m_p}{R^2}.$$

Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase m_Z možemo napisati (m · g je težina tijela mase m na Zemlji):

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R_Z^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g = G \cdot \frac{m_Z}{R_Z^2}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se akceleracija slobodnog pada tijela na površini planeta:

$$\left.\begin{array}{l} g_p = G\cdot\frac{m_p}{R^2} \\ g = G\cdot\frac{m_Z}{R_Z^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{g_p}{g} = \frac{G\cdot\frac{m_p}{R^2}}{G\cdot\frac{m_Z}{R_Z^2}} \Rightarrow \frac{g_p}{g} = \frac{m_p\cdot R_Z^2}{m_Z\cdot R^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_p = \rho\cdot\frac{4}{3}\cdot R^3\cdot\pi \\ m_Z = \rho_Z\cdot\frac{4}{3}\cdot R_Z^3\cdot\pi\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_p}{g} = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot R^3\cdot\pi\cdot R_Z^2}{\rho_Z\cdot\frac{4}{3}\cdot R_Z^3\cdot\pi\cdot R^2} \Rightarrow \frac{g_p}{g} = \frac{\rho\cdot R}{\rho_Z\cdot R_Z} \Rightarrow \frac{g_p}{g} = \frac{\rho\cdot\frac{1}{2}\cdot R_Z}{\rho\cdot R_Z} \Rightarrow \frac{g_p}{g} = \frac{1}{2} \Rightarrow g_p = \frac{1}{2}\cdot g_Z =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} = 4.905\,\frac{m}{s^2}.$$

Iz formule za vrijeme jednog titraja matematičkog njihala na planetu čija je akceleracija slobodnog pada g_p, dobije se duljina njihala:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_p}}\ /^2 \Rightarrow T^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{l}{g_p} \Rightarrow l = \frac{g_p\cdot T^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{4.905\,\frac{m}{s^2}\cdot(20\,s)^2}{4\cdot\pi^2} = 49.70\,m.$$

Vježba 046

Koliko je dugačka nit jednostavnog njihala ako zamislimo da se njiše na nekom planetu jednake gustoće kao Zemlja, polumjera dva puta manjeg od Zemlje? Njihalo učini šest titraja u dvije minute. ($G = 6.67\cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$)

Rezultat: 49.70 m.

Zadatak 047 (Anamarija, gimnazija)

Znamo da je zbog rotacije planeta sila teža na ekvatoru manja nego na polovima. Na kojoj je visini iznad površine planeta na polu sila teža jednaka sili teži na ekvatoru? Planet neka je kugla polumjera r. Vrijeme jednog okreta planeta oko osi neka je T, a njegova srednja gustoća ρ.

Rješenje 047

r, T, ρ, h = ?

Na ekvatoru je gravitacijska sila koja djeluje između nekog tijela mase m i planeta mase m_p umanjena za centrifugalnu silu koja djeluje na tijelo mase m u suprotnom smjeru od gravitacijske sile:

$$G\cdot\frac{m\cdot m_p}{(r+h)^2} = G\cdot\frac{m\cdot m_P}{r^2} - \frac{4\cdot\pi^2\cdot m\cdot r}{T^2}\ /\cdot\frac{1}{m} \Rightarrow G\cdot\frac{m_p}{(r+h)^2} = G\cdot\frac{m_P}{r^2} - \frac{4\cdot\pi^2\cdot r}{T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\cdot\frac{m_p}{(r+h)^2} = \frac{G\cdot m_p\cdot T^2 - 4\cdot\pi^2\cdot r^3}{r^2\cdot T^2}\ /\cdot r^2\cdot T^2\cdot(r+h)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\cdot m_p\cdot r^2\cdot T^2 = \left(G\cdot m_p\cdot T^2 - 4\cdot\pi^2\cdot r^3\right)\cdot(r+h)^2 \Rightarrow (r+h)^2 = \frac{G\cdot m_p\cdot r^2\cdot T^2}{G\cdot m_p\cdot T^2 - 4\cdot\pi^2\cdot r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[m_p = \rho\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi\right] \Rightarrow (r+h)^2 = \frac{G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi\cdot r^2\cdot T^2}{G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi\cdot T^2 - 4\cdot\pi^2\cdot r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r+h)^2 = \frac{\frac{4}{3}\cdot G\cdot\rho\cdot r^5\cdot\pi\cdot T^2}{\frac{4\cdot G\cdot\rho\cdot r^3\cdot\pi\cdot T^2 - 12\cdot\pi^2\cdot r^3}{3}} \Rightarrow (r+h)^2 = \frac{4\cdot G\cdot\rho\cdot r^5\cdot\pi\cdot T^2}{4\cdot G\cdot\rho\cdot r^3\cdot\pi\cdot T^2 - 12\cdot\pi^2\cdot r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r+h)^2 = \frac{4 \cdot G \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \cdot T^2}{4 \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \left(G \cdot \rho \cdot T^2 - 3 \cdot \pi\right)} \Rightarrow (r+h)^2 = \frac{G \cdot \rho \cdot r^2 \cdot T^2}{G \cdot \rho \cdot T^2 - 3 \cdot \pi} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r+h = \sqrt{\frac{G \cdot \rho \cdot r^2 \cdot T^2}{G \cdot \rho \cdot T^2 - 3 \cdot \pi}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{G \cdot \rho \cdot r^2 \cdot T^2}{G \cdot \rho \cdot T^2 - 3 \cdot \pi}} - r \Rightarrow h = r \cdot \sqrt{\frac{G \cdot \rho \cdot T^2}{G \cdot \rho \cdot T^2 - 3 \cdot \pi}} - r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = r \cdot \left(\sqrt{\frac{G \cdot \rho \cdot T^2}{G \cdot \rho \cdot T^2 - 3 \cdot \pi}} - 1 \right).$$

Vježba 047

Znamo da je zbog rotacije planeta sila teža na ekvatoru manja nego na polovima. Na kojoj je visini iznad površine planeta na polu sila teža jednaka sili teži na ekvatoru? Planet neka je kugla polumjera r. Vrijeme jednog okreta planeta oko osi neka je T, a njegova srednja gustoća ρ.

Rezultat: $h = r \cdot \left(\sqrt{\frac{G \cdot \rho \cdot T^2}{G \cdot \rho \cdot T^2 - 3 \cdot \pi}} - 1 \right).$

Zadatak 048 (Anamarija, gimnazija)

Koliko je puta kinetička energija umjetnog Zemljinog satelita manja od njegove potencijalne energije? Pretpostavimo da je staza satelita kružna.

Rješenje 048

r = h , $E_k : E_{gp} = ?$

Na visini h od površine Zemlje satelit ima:

- gravitacijsku potencijalnu energiju $E_{gp} = m \cdot g \cdot (r+h) \Rightarrow E_{gp} = 2 \cdot m \cdot g \cdot h$
- kinetičku energiju $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Računamo omjer kinetičke i gravitacijske potencijalne energije:

$$\frac{E_k}{E_{gp}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{2 \cdot m \cdot g \cdot h} \Rightarrow \left[v^2 = 2 \cdot g \cdot h \right] \Rightarrow \frac{E_k}{E_{gp}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot h}{2 \cdot m \cdot g \cdot h} \Rightarrow \frac{E_k}{E_{gp}} = \frac{1}{2} \Rightarrow E_k = \frac{E_{gp}}{2}.$$

Vježba 048

Koliko je puta potencijalna energija umjetnog Zemljinog satelita veća od njegove kinetičke energije? Pretpostavimo da je staza satelita kružna.

Rezultat: $E_{gp} = 2 \cdot E_k.$

Zadatak 049 (Anamarija, gimnazija)

Neki satelit obilazi Zemlju svakih 98 minuta krećući se na srednjoj visinu 500 km. Izračunaj iz tih podataka masu Zemlje. (Polumjer Zemlje r = 6400 km, G = 6.67 · 10^{-11} Nm^2/kg^2)

Rješenje 049

T = 98 min = [98 · 60] = 5880 s, h = 500 km = 500000 m,
r = 6400 km = 6400000 m, G = 6.67 · 10^{-11} Nm^2/kg^2, $m_Z = ?$

Udaljenost satelita od središta Zemlje iznosi:

$$R = r + h = 6400000\ m + 500000\ m = 6900000\ m.$$

Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase m_Z na udaljenosti R mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti R od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot R}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2} \; / \cdot \frac{T^2 \cdot R^2}{m} \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3 = G \cdot m_Z \cdot T^2 \Rightarrow m_Z = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (6900000\ m)^3}{6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot (5880\ s)^2} = 5.62 \cdot 10^{24}\ kg.$$

Vježba 049

Neki satelit obilazi Zemlju svakih 98 minuta krećući se na srednjoj visinu 500000 m. Izračunaj iz tih podataka masu Zemlje. (Polumjer Zemlje r = 6400000 m, G = 6.67 · 10^{-11} Nm^2/kg^2)

Rezultat: $5.62 \cdot 10^{24}\ kg.$

Zadatak 050 (Anamarija, gimnazija)

Oko planeta mase m_p kruži satelit. Koliki je polumjer staze ako je T ophodno vrijeme satelita?

Rješenje 050

m_p, T, r = ?

Sila gravitacije između satelita mase m i planeta mase m_p na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot R}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_p}{R^2} \ / \cdot \frac{T^2 \cdot R^2}{m} \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3 = G \cdot m_p \cdot T^2 \Rightarrow R^3 = \frac{G \cdot m_p \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^3 = G \cdot \frac{m_p \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow R = \sqrt[3]{G \cdot \frac{m_p \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}.$$

Vježba 050

Oko planeta mase M kruži satelit. Koliki je polumjer staze ako je T ophodno vrijeme satelita?

Rezultat: $R = \sqrt[3]{G \cdot \frac{M \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}.$

Zadatak 051 (Anamarija, gimnazija)

Kolika je prva kozmička brzina za Mjesec ako znamo da je polumjer Mjeseca 1.74 · 10^6 m, a masa 7.3 · 10^{22} kg? (G = 6.67 · 10^{-11} Nm^2/kg^2)

Rješenje 051

r = 1.74 · 10^6 m, m_M = 7.3 · 10^{22} kg, G = 6.67 · 10^{-11} Nm^2/kg^2, v = ?

Sila gravitacije između satelita mase m i Mjeseca mase m_M na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} \ / \cdot \frac{r^2}{m} \Rightarrow v^2 \cdot r = G \cdot m_M \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot m_M}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{m_M}{r} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{m_M}{r}} = \sqrt{G \cdot \frac{m_M}{r}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{7.3 \cdot 10^{22}\ kg}{1.74 \cdot 10^6\ m}} = 1672.82\ \frac{m}{s}.$$

Vježba 051

Kolika je prva kozmička brzina za Mjesec ako znamo da je polumjer Mjeseca 1.74 · 10^3 km, a masa 7.3 · 10^{19} t?

Rezultat: $1672.82\ \frac{m}{s}.$

Zadatak 052 (Anamarija, gimnazija)

Izračunaj prvu kozmičku brzinu na površini Mjeseca kad znaš da je polumjer Mjeseca 1740 km, a akceleracija slobodnog pada na Mjesecu 0.17 Zemljine akceleracije. (g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 052

$r = 1740$ km $= 1.74 \cdot 10^6$ m, $g_M = 0.17 \cdot g$, $g = 9.81$ m/s^2, $v = ?$

Sila teža je uzrok kružnoga gibanja satelita mase m oko Mjeseca. Zato mora biti F_{cp} jednaka sili teži G:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g_M \; / \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = r \cdot g_M \; / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{r \cdot g_M} = \sqrt{1.74 \cdot 10^6 \; m \cdot 0.17 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 1703.5 \frac{m}{s}.$$

Vježba 052

Izračunaj prvu kozmičku brzinu na površini Mjeseca kad znaš da je polumjer Mjeseca 1740000 m, a akceleracija slobodnog pada na Mjesecu 0.17 Zemljine akceleracije. ($g = 9.81$ m/s^2)

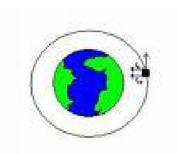
Rezultat: $1703.5 \frac{m}{s}.$

Zadatak 053 (Anamarija, gimnazija)

Koliki moraju biti polumjer kružne staze umjetnog Zemljina satelita i njegova brzina da njegov period bude jednak periodu obrtanja Zemlje, tj. da se sa Zemlje čini nepomičnim? ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg)

Rješenje 053

$T = T_Z = 24$ h $= [24 \cdot 3600] = 86400$ s, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg,
$R = ?$ $v = ?$



Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase m_Z na udaljenosti R mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti R od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot R}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2} \; / \cdot \frac{T^2 \cdot R^2}{m} \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3 = G \cdot m_Z \cdot T^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^3 = \frac{G \cdot m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow R^3 = G \cdot \frac{m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \; / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow R = \sqrt[3]{G \cdot \frac{m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \; kg \cdot (86400 \; s)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4.22 \cdot 10^7 \; m.$$

Brzinu ćemo dobiti iz izraza:

$$v = \frac{2 \cdot R \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot 4.22 \cdot 10^7 \; m \cdot \pi}{86400 \; s} = 3068.8 \; \frac{m}{s}.$$

Vježba 053

Koliki moraju biti polumjer kružne staze umjetnog Zemljina satelita i njegova brzina da njegov period bude jednak periodu obrtanja Zemlje, tj. da se sa Zemlje čini nepomičnim? ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg)

Rezultat: $R = 4.22 \cdot 10^7 \; m \;,\; v = 3068.8 \; \frac{m}{s}.$

Zadatak 054 (Anamarija, gimnazija)

Odredi udaljenost x od središta Zemlje do umjetnog satelita mase m i njegovu brzinu v ako satelit kruži u ravnini Zemljina ekvatora, a sa Zemlje se čini nepomičnim. ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg)

Rješenje 054

$T = T_Z = 24$ h $= [24 \cdot 3600] = 86400$ s, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg,
$x = ?$ $v = ?$

Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase m_Z na udaljenosti x mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti x od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot x}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{x^2} \; / \cdot \frac{T^2 \cdot x^2}{m} \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot x^3 = G \cdot m_Z \cdot T^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{G \cdot m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow x^3 = G \cdot \frac{m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \; / \sqrt[3]{\;} \Rightarrow x = \sqrt[3]{G \cdot \frac{m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \, kg \cdot (86400 \, s)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4.22 \cdot 10^7 \, m.$$

Brzinu ćemo dobiti iz izraza:

$$v = \frac{2 \cdot x \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot 4.22 \cdot 10^7 \, m \cdot \pi}{86400 \, s} = 3068.8 \, \frac{m}{s}.$$

Vježba 054

Odredi udaljenost x od središta Zemlje do umjetnog satelita mase m i njegovu brzinu v ako satelit kruži u ravnini Zemljina ekvatora, a sa Zemlje se čini nepomičnim. ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg)

Rezultat: $R = 4.22 \cdot 10^7 \, m \; , \; v = 3068.8 \, \frac{m}{s}.$

Zadatak 055 (Megi, preh.bioteh. fakultet)

Na kojoj je visini iznad Zemljine površine gravitacijska sila Zemlje na neko tijelo 4 puta manja nego na površini Zemlje? Polumjer Zemlje $R = 6.37 \cdot 10^6$ m.

Rješenje 055

$R = 6.37 \cdot 10^6$ m, h = ?

Na površini Zemlje privlačna sila između tijela mase m i Zemlje mase M iznosi

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2},$$

gdje je R polumjer Zemlje. Na visini h iznad Zemlje bit će

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R + h)^2}.$$

U zadatku je postavljen uvjet:

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{(R + h)^2} = \frac{1}{4} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{(R + h)^2} = \frac{1}{4} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \; / \cdot \frac{1}{G \cdot m \cdot M} \Rightarrow \frac{1}{(R + h)^2} = \frac{1}{4 \cdot R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R + h)^2 = 4 \cdot R^2 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow R + h = 2 \cdot R \Rightarrow h = 2 \cdot R - R \Rightarrow h = R = 6.37 \cdot 10^6 \, m.$$

Vježba 055

Na kojoj je visini iznad Zemljine površine gravitacijska sila Zemlje na neko tijelo 4 puta manja nego na površini Zemlje? Polumjer Zemlje $R = 6.37 \cdot 10^6$ m.

Rezultat: $h = 2 \cdot R = 1.274 \cdot 10^7 \, m.$

Zadatak 056 (Ana Marija, gimnazija)

Na niti visi uteg mase 2 kg. Nađi napetost niti ako se nit s utegom diže akceleracijom 2 m/s^2. (g = 10 m/s^2).

Rješenje 056

m = 2 kg, a = 2 m/s^2, g = 10 m/s^2, F_N = ?

Nit ponajprije napinje težina utega mase m, ali i inercijska sila koja se javlja zato što nit i uteg vučemo gore akceleracijom a. Sila koja napinje nit jest

$$F_N = G + m \cdot a \Rightarrow F_N = m \cdot g + m \cdot a \Rightarrow F_N = m \cdot (g + a) = 2\ kg \cdot \left(10\ \frac{m}{s^2} + 2\ \frac{m}{s^2}\right) = 24\ N.$$

Vježba 056

Na niti visi uteg mase 2 kg. Nađi napetost niti ako nit s utegom pada akceleracijom 2 m/s^2. (g = 10 m/s^2).

Rezultat: $F_N = G - m \cdot a \Rightarrow F_N = m \cdot (g - a) = 16\ N.$

Zadatak 057 (Ana Marija, gimnazija)

Čelična žica određene debljine izdrži napetost do 2000 N. Kojim najvećim ubrzanjem možemo tom žicom dizati uteg mase 150 kg? (g = 10 m/s^2).

Rješenje 057

F_N = 2000 N, m = 150 kg, g = 10 m/s^2, a = ?

Budući da uteg dižemo, rezultantna sila (napetost žice) bit će jednaka zbroju težine utega mase m i inercijske sile koja se javlja zato što žicu i uteg vučemo gore akceleracijom a:

$$F_N = G + m \cdot a \Rightarrow m \cdot a = F_N - G\ /:m \Rightarrow a = \frac{F_N - G}{m} \Rightarrow a = \frac{F_N - m \cdot g}{m} =$$

$$= \frac{2000\ N - 150\ kg \cdot 10\ \frac{m}{s^2}}{150\ kg} = 3.33\ \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 057

Čelična žica određene debljine izdrži napetost do 1000 N. Kojim najvećim ubrzanjem možemo tom žicom dizati uteg mase 75 kg? (g = 10 m/s^2).

Rezultat: $3.33\ \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 058 (Ana Marija, gimnazija)

Na nit je obješen uteg. Ako objesište niti podižemo akceleracijom a_1 = 2 m/s^2, napetost niti je dva puta manja od napetosti pri kojoj bi nit pukla. Kolikom akceleracijom moramo podizati objesište niti s utegom da nit pukne? (g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 058

a_1 = 2 m/s^2, $N_1 = \frac{N_2}{2}$, g = 9.81 m/s^2, a_2 = ?

Kada uteg dižemo, rezultantna sila (napetost niti) jednaka je zbroju težine utega mase m i inercijske sile koja se javlja zato što nit i uteg vučemo gore akceleracijom a.

Ako objesište niti podižemo akceleracijom a_1, napetost niti je:

$$N_1 = G + F_1 \Rightarrow N_1 = m \cdot g + m \cdot a_1 \Rightarrow N_1 = m \cdot (g + a_1).$$

Budući da je napetost niti N_1 dva puta manja od napetosti niti N_2 pri kojoj bi nit pukla, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} N_2 = G + F_2 \\ N_2 = 2 \cdot N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} N_2 = m \cdot g + m \cdot a_2 \\ N_2 = 2 \cdot m \cdot (g + a_1) \end{array}\right\} \Rightarrow m \cdot g + m \cdot a_2 = 2 \cdot m \cdot (g + a_1)\ /:m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g + a_2 = 2 \cdot \left(g + a_1 \right) \Rightarrow a_2 = 2 \cdot \left(g + a_1 \right) - g \Rightarrow a_2 = 2 \cdot g + 2 \cdot a_1 - g \Rightarrow a_2 = g + 2 \cdot a_1 =$$

$$= 9.81 \frac{m}{s^2} + 2 \cdot 2 \frac{m}{s^2} = 13.81 \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 058

Na nit je obješen uteg. Ako objesište niti podižemo akceleracijom $a_1 = 1$ m/s^2, napetost niti je dva puta manja od napetosti pri kojoj bi nit pukla. Kolikom akceleracijom moramo podizati objesište niti s utegom da nit pukne? (g = 9.81 m/s^2)

Rezultat: $11.81 \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 059 (Ana Marija, gimnazija)

Kugla mase 8 kg obješena je na kraju niti. Nađi akceleraciju kugle ako je napetost niti 80 N. (g = 10 m/s^2).

Rješenje 059

m = 8 kg, F_N = 80 N, g = 10 m/s^2, a = ?

Za napetost niti vrijedi:

$$F_N = G + F \Rightarrow F_N = m \cdot g + m \cdot a \Rightarrow m \cdot a = F_N - m \cdot g \; /: m \Rightarrow a = \frac{F_N - m \cdot g}{m} =$$

$$= \frac{80\ N - 8\ kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}}{8\ kg} = \frac{0\ N}{8\ kg} = 0 \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 059

Kugla mase 8 kg obješena je na kraju niti. Nađi akceleraciju kugle ako je napetost niti 40 N. (g = 10 m/s^2).

Rezultat: $F_N = G + F \Rightarrow \ldots \Rightarrow a = \frac{F_N - m \cdot g}{m} = -5 \frac{m}{s^2}.$ Kugla se giba prem dolje.

Zadatak 060 (Ana Marija, gimnazija)

Dizalo s putnicima ima masu 800 kg. Odredi u kojem se smjeru giba dizalo i kolikom akceleracijom ako je napetost užeta 12000 N. (g = 10 m/s^2)

Rješenje 060

m = 800 kg, F_N = 12000 N, g = 10 m/s^2, a = ?

Za napetost niti vrijedi:

$$F_N = G + F \Rightarrow F_N = m \cdot g + m \cdot a \Rightarrow m \cdot a = F_N - m \cdot g \; /: m \Rightarrow a = \frac{F_N - m \cdot g}{m} =$$

$$= \frac{12000\ N - 800\ kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}}{800\ kg} = 5 \frac{m}{s^2} \Rightarrow \left[a > 0 \right] \Rightarrow \text{Dizalo se giba prema gore.}$$

Vježba 060

Dizalo s putnicima ima masu 800 kg. Odredi u kojem se smjeru giba dizalo i kolikom akceleracijom ako je napetost užeta 6000 N. (g = 10 m/s^2)

Rezultat:

$$F_N = G + F \Rightarrow \ldots \Rightarrow a = \frac{F_N - m \cdot g}{m} = -2.5 \frac{m}{s^2} \Rightarrow \left[a < 0 \right] \Rightarrow \text{Dizalo se giba prema dolje.}$$