

Zadatak 021 (Ante, elektrotehnička škola)

Odredi gustoću planeta na kojemu dan i noć traju $T = 24$ sata i na ekvatoru kojega su tijela bez težine.

Rješenje 021

$$T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}, \quad r - \text{polumjer planeta}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2, \quad \rho = ?$$

Sila gravitacije između planeta mase m_p i nekog tijela mase m na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na tijelo na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$G \cdot \frac{m \cdot m_p}{r^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}$$

Izračunamo masu planeta m_p , a zatim gustoću ρ :

$$\begin{aligned} G \cdot \frac{m \cdot m_p}{r^2} &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2} \quad / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m} \Rightarrow m_p = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} \Rightarrow [m_p = \rho \cdot V] \Rightarrow \rho \cdot V = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} \quad / \cdot \frac{3}{4 \cdot r^3 \cdot \pi} \Rightarrow \rho = \frac{3 \cdot \pi}{G \cdot T^2} = \frac{3 \cdot \pi}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot (86400 \text{ s})^2} = 18.93 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0.02 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

Vježba 021

Odredi gustoću planeta na kojemu dan i noć traju $T = 12$ sati i na ekvatoru kojega su tijela bez težine.

Rezultat: $75.71 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Zadatak 022 (Mira, gimnazija)

Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca 30 km/s , a polumjer njezine staze $1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$?

Rješenje 022

$$v = 30 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s}, \quad r = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2, \quad m_s = ?$$

Sila gravitacije između Zemlje mase m i Sunca mase m_s na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na Zemlju na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$G \cdot \frac{m \cdot m_s}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m} \Rightarrow m_s = \frac{r \cdot v^2}{G} = \frac{1.5 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot \left(3 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}} = 2.02 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Vježba 022

Kolika je masa planeta kad znamo da je srednja brzina satelita pri kruženju oko planeta 10 km/s , a polumjer njegove staze $2 \cdot 10^7 \text{ km}$?

Rezultat: $3 \cdot 10^{28} \text{ kg}$

Zadatak 023 (Ivana, hotelijerska škola)

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Marsa? Masa Marsa je $6.42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$, a polumjer 3390 km .

Rješenje 023

$$m_M = 6.42 \cdot 10^{23} \text{ kg}, \quad r = 3390 \text{ km} = 3.39 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad g_M = ?$$



Na površini Marsa težina tijela mase m je:

$$G = m \cdot g_M$$

Za privlačenje tijela mase m i planeta Marsa mase m_M možemo napisati:

$$m \cdot g_M = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2}.$$

Akceleracija slobodnog pada na površini Marsa iznosi:

$$m \cdot g_M = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} \quad / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_M = G \cdot \frac{m_M}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{6.42 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(3.39 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 3.73 \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 023

Kolika je akceleracija slobodnog pada na planetu čija je masa $1.6 \cdot 10^{26}$ kg, a polumjer 4000 km?

Rezultat: $667 \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 024 (Ivana, hotelijerska škola)

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Sunca i Zemlje 1 : 4? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 024

$$r_S = 108 \cdot r_Z, \quad \rho_S = \frac{1}{4} \cdot \rho_Z, \quad g_Z = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad g_S = ?$$

Ponovimo!

Akceleracija slobodnog pada na planetu mase m i polumjera r iznosi:

$$g = G \cdot \frac{m}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja je eksperimentalno određena i iznosi $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Za akceleracije slobodnog pada na Suncu i Zemlji vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} g_S = G \cdot \frac{m_S}{r_S^2} \\ g_Z = G \cdot \frac{m_Z}{r_Z^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednakosti} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{G \cdot \frac{m_S}{r_S^2}}{G \cdot \frac{m_Z}{r_Z^2}} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{m_S \cdot r_Z^2}{m_Z \cdot r_S^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{definicija gustoće} \\ \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot V_S \cdot r_Z^2}{\rho_Z \cdot V_Z \cdot r_S^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_S^3 \cdot \pi \cdot r_Z^2}{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_Z^3 \cdot \pi \cdot r_S^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_S^3 \cdot r_Z^2}{r_Z^3 \cdot r_S^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_S}{r_Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{108 \cdot r_Z}{r_Z} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{1}{4} \cdot 108 \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = 27 \Rightarrow g_S = 27 \cdot g_Z = 27 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 264.87 \frac{m}{s^2} \approx 265 \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 024

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Sunca i Zemlje 1 : 4? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $270 \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 025 (Ante, elektrotehnička škola)

Planet X ima dvostruko veći polumjer od planeta Y, a gustoće su im jednake. Koliki je omjer ubrzanja slobodnog pada na površini planeta X i Y?

Rješenje 025

$$R_X = 2 \cdot R_Y, \quad \rho_X = \rho_Y = \rho, \quad g_X : g_Y = ?$$

Računamo omjer ubrzanja slobodnog pada na površini planeta X i Y:

$$\frac{g_X}{g_Y} = \frac{G \cdot \frac{m_X}{R_X^2}}{G \cdot \frac{m_Y}{R_Y^2}} \Rightarrow \frac{g_X}{g_Y} = \frac{m_X \cdot R_Y^2}{m_Y \cdot R_X^2} \Rightarrow \left[m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \right] \Rightarrow \frac{g_X}{g_Y} = \frac{\rho_X \cdot \frac{4}{3} \cdot R_X^3 \cdot \pi \cdot R_Y^2}{\rho_Y \cdot \frac{4}{3} \cdot R_Y^3 \cdot \pi \cdot R_X^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_X}{g_Y} = \frac{\rho \cdot R_X^3 \cdot R_Y^2}{\rho \cdot R_Y^3 \cdot R_X^2} \Rightarrow \frac{g_X}{g_Y} = \frac{R_X^3 \cdot R_Y^2}{R_Y^3 \cdot R_X^2} \Rightarrow \frac{g_X}{g_Y} = \frac{R_X}{R_Y} \Rightarrow \frac{g_X}{g_Y} = \frac{2 \cdot R_Y}{R_Y} \Rightarrow \frac{g_X}{g_Y} = \frac{2}{1} \Rightarrow g_X : g_Y = 2 : 1.$$

Vježba 025

Planet X ima trostruko veći polumjer od planeta Y, a gustoće su im jednake. Koliki je omjer ubrzanja slobodnog pada na površini planeta X i Y?

Rezultat: 3 : 1.

Zadatak 026 (Ante, elektrotehnička škola)

Nadite razliku prve i druge kozmičke brzine na planetu iste prosječne gustoće kao Zemlja i dvostruko većeg polumjera od Zemljinog (polumjer Zemlje je 6400 km, gustoća 5500 kg/m³, G = 6.67 · 10⁻¹¹ Nm²/kg²).

Rješenje 026

$$\rho = 5500 \text{ kg/m}^3, \quad R_Z = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad R = 2 \cdot R_Z = 1.28 \cdot 10^7 \text{ m},$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad v_2 - v_1 = ?$$

Računamo razliku druge i prve kozmičke brzine:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \sqrt{G \cdot \frac{m}{R}} \\ v_2 &= \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{m}{R}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_2 - v_1 = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{m}{R}} - \sqrt{G \cdot \frac{m}{R}} \Rightarrow v_2 - v_1 = \sqrt{G \cdot \frac{m}{R}} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{G \cdot \frac{m}{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 - v_1 = \sqrt{G \cdot \frac{m}{R}} \cdot (\sqrt{2} - 1) \Rightarrow v_2 - v_1 = \sqrt{G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi}{R}} \cdot (\sqrt{2} - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot G \cdot \rho \cdot R^2 \cdot \pi} \cdot (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (1.28 \cdot 10^7 \text{ m})^2 \cdot \pi} \cdot (\sqrt{2} - 1) =$$

$$= 6572.38 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 6.57 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Vježba 026

Nadite razliku prve i druge kozmičke brzine na planetu Zemlja. (polumjer Zemlje je 6400 km, gustoća 5500 kg/m³, G = 6.67 · 10⁻¹¹ Nm²/kg²).

Rezultat: $v_2 - v_1 = 11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}} - 7.9 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3.3 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$

Zadatak 027 (Mira, gimnazija)

Koliko je puta Newtonova gravitacijska sila između dva protona u vakuumu manja od Coulombove sile između njih, ako razmak između središta dvaju protona iznosi 10⁻¹⁴ m?

(Masa protona je m_p = 1.6726 · 10⁻²⁷ kg, naboj protona je brojačno jednak naboju elektrona e = 1.602 · 10⁻¹⁹ C, Newtonova gravitacijska konstanta G = 6.673 · 10⁻¹¹ m³/kgs², dielektrična konstanta vakuuma ε₀ = 8.854 · 10⁻¹² C²/Nm²)

Rješenje 027

$$r = 10^{-14} \text{ m}, \quad m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2,$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2, \quad n = ?$$

Računamo omjer sila F_C i F_G:



Newton Coulomb

$$\left. \begin{aligned} F_C &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{e^2}{r^2} \quad \text{Coulombova sila} \\ F_G &= G \cdot \frac{m_p^2}{r^2} \quad \text{gravitacijska sila} \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = \frac{F_C}{F_G} \Rightarrow n = \frac{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{e^2}{r^2}}{G \cdot \frac{m_p^2}{r^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot G \cdot m_p^2} \Rightarrow \left[\text{u vakuumu je } \epsilon_r = 1 \right] \Rightarrow n = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot G \cdot m_p^2} =$$

$$= \frac{(1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot (1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2} = 1.24 \cdot 10^{36}.$$

Uočite da omjer ne ovisi o razmaku r.

Vježba 027

Koliko je puta Coulombova sila između dva protona u vakuumu veća od Newtonove gravitacijske sile između njih, ako razmak između središta dvaju protona iznosi 10^{-14} m?

(Masa protona je $m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg, naboj protona je brojčano jednak naboju elektrona $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C, Newtonova gravitacijska konstanta $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ m³/kgs², dielektrična konstanta vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ C²/Nm²)

Rezultat: $1.24 \cdot 10^{36}$.

Zadatak 028 (Mira, gimnazija)

Uporabom jednoga od uređaja za provjeravanje gravitacijske sile izmjereno je da se olovna kugla mase 5 kg i kuglica mase 10 g na udaljenosti 7 cm privlače silom $6.13 \cdot 10^{-10}$ N. Kolika je gravitacijska konstanta kad je izračunamo iz tih pokusnih podataka?

Rješenje 028

$$m_1 = 5 \text{ kg}, \quad m_2 = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}, \quad r = 7 \text{ cm} = 0.07 \text{ m}, \quad F = 6.13 \cdot 10^{-10} \text{ N},$$

$$G = ?$$

Dva tijela koje možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije. Računamo gravitacijsku konstantu G:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad | \cdot r^2 \Rightarrow F \cdot r^2 = G \cdot m_1 \cdot m_2 \Rightarrow G = \frac{F \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2} = \frac{6.13 \cdot 10^{-10} \text{ N} \cdot (0.07 \text{ m})^2}{5 \text{ kg} \cdot 0.01 \text{ kg}} = 6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}.$$

Vježba 028

Uporabom jednoga od uređaja za provjeravanje gravitacijske sile izmjereno je da se olovna kugla mase 5 kg i kuglica mase 20 g na udaljenosti 7 cm privlače silom $1.226 \cdot 10^{-9}$ N. Kolika je gravitacijska konstanta kad je izračunamo iz tih pokusnih podataka?

Rezultat: $6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

Zadatak 029 (Mira, gimnazija)

Koliko se privlače dvije lađe svaka mase 10^7 kg kad se nalaze na udaljenosti 1 km? ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

Rješenje 029

$$m_1 = m_2 = 10^7 \text{ kg}, \quad r = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad F = ?$$

Dva tijela koje možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.



Iz njega slijedi:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{(10^7 \text{ kg})^2}{(1000 \text{ m})^2} = 0.00667 \text{ N} = 6.67 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Vježba 029

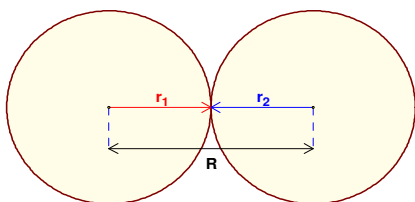
Koliko se privlače dvije lađe svaka mase $2 \cdot 10^7 \text{ kg}$ kad se nalaze na udaljenosti 2 km ?
 $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$.

Rezultat: $6.67 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

Zadatak 030 (Mira, gimnazija)

Kolikom se silom privlače dvije aluminijske kugle polumjera 0.5 m koje se dodiruju?
 $(\rho = 2700 \text{ kg/m}^3, G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)$

Rješenje 030



$$r_1 = r_2 = r = 0.5 \text{ m}, \quad m_1 = m_2 = m, \quad \rho = 2700 \text{ g/m}^3, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad F = ?$$

Dva tijela koje možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Udaljenost kugala jednaka je udaljenosti između njihovih središta:

$$R = r_1 + r_2 = 0.5 \text{ m} + 0.5 \text{ m} = 1 \text{ m}.$$

Kugle imaju jednake mase. Iz formule za gustoću izračunamo mase kugala. Privlačna sila iznosi:

$$F = G \cdot \frac{m^2}{R^2} \Rightarrow \left[m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \right] \Rightarrow F = G \cdot \frac{\left(\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \right)^2}{R^2} \Rightarrow F = G \cdot \frac{16 \cdot \rho^2 \cdot r^6 \cdot \pi^2}{9 \cdot R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{16}{9} \cdot G \cdot \frac{\left(\rho \cdot r^3 \cdot \pi \right)^2}{R^2} = \frac{16}{9} \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{\left(2700 \frac{kg}{m^3} \cdot (0.5 \text{ m})^3 \cdot \pi \right)^2}{(1 \text{ m})^2} = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

Vježba 030

Kolikom se silom privlače dvije aluminijske kugle polumjera 50 cm koje se dodiruju?
 $(\rho = 2700 \text{ kg/m}^3, G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)$

Rezultat: $1.3 \cdot 10^{-4} \text{ N}$.

Zadatak 031 (Mira, gimnazija)

Kolika je privlačna sila između dva neutrona koji su udaljeni 10^{-10} m jedan od drugoga?
 ($m = 1.675 \cdot 10^{-27}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

Rješenje 031

$$r = 10^{-10} \text{ m}, \quad m_1 = m_2 = m = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad F = ?$$

Dva tijela koje možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije. Privlačna sila između neutrona iznosi:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow F = G \cdot \frac{m^2}{R^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{(1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}{(10^{-10} \text{ m})^2} = 1.87 \cdot 10^{-44} \text{ N}.$$

Vježba 031

Kolika je privlačna sila između dva neutrona koji su udaljeni $2 \cdot 10^{-10}$ m jedan od drugoga?
 ($m = 1.675 \cdot 10^{-27}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

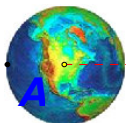
Rezultat: $4.68 \cdot 10^{-45}$ N.

Zadatak 032 (Mira, gimnazija)

Masa Zemlje je $6 \cdot 10^{24}$ kg, a masa Mjeseca $7.3 \cdot 10^{22}$ kg. Udaljenost između njihovih središta je 384000 km. Kolikom se silom privlače Zemlja i Mjesec? ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

Rješenje 032

$$M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad m = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}, \quad r = 384000 \text{ km} = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}, \\ G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad F = ?$$



r



Dva tijela koje možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije. Privlačna sila između Zemlje i Mjeseca iznosi:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3.84 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = 1.98 \cdot 10^{20} \text{ N}.$$

Vježba 032

Masa Zemlje je $6 \cdot 10^{24}$ kg, a masa Mjeseca $7.3 \cdot 10^{22}$ kg. Udaljenost između njihovih središta je 384000000 m. Kolikom se silom privlače Zemlja i Mjesec? ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

Rezultat: $1.98 \cdot 10^{20}$ N.

Zadatak 033 (Mira, gimnazija)

Za koliko se puta smanji težina nekog tijela kada ga donesemo na vrh planine visoke 2400 metara?
 ($R = 6367$ km)

Rješenje 033

$$h = 2400 \text{ m}, \quad R = 6367 \text{ km} = 6.367 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad F_1 : F = ?$$

Na površini Zemlje privlačna sila između tijela mase m i Zemlje mase m_Z iznosi:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2},$$

gdje je R srednji polumjer Zemlje. Na visini h iznad Zemlje bit će:

$$F_1 = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2}.$$

Računamo omjer privlačnih sila:

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{F} &= \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2}} \Rightarrow \frac{F_1}{F} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2}} \Rightarrow \frac{F_1}{F} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow \frac{F_1}{F} = \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{F_1}{F} = \left(\frac{6.367 \cdot 10^6 \text{ m}}{6.367 \cdot 10^6 \text{ m} + 2400 \text{ m}} \right)^2 \Rightarrow \frac{F_1}{F} = 0.999 \Rightarrow F_1 = 99.9\%F. \end{aligned}$$

Vježba 033

Za koliko se puta smanji težina nekog tijela kada ga donesemo na vrh planine visoke 4000 metara? ($R = 6367 \text{ km}$)

Rezultat: $F_1 = 99.87\%F$.

Zadatak 034 (Mira, gimnazija)

Koliko puta postane tijelo mase 1 kg lakše ako ga dignemo 1 km uvis? Polumjer Zemlje je $R = 6367 \text{ km}$ te uzmemo $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Rješenje 034

$$m = 1 \text{ kg}, \quad h = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}, \quad R = 6367 \text{ km} = 6.367 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_1 : F = ?$$

Na površini Zemlje privlačna sila (sila gravitacije) između tijela mase m i Zemlje mase m_Z iznosi:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2},$$

gdje je R srednji polumjer Zemlje. Na visini h iznad Zemlje bit će:

$$F_1 = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2}.$$

Računamo omjer privlačnih sila:

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{F} &= \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2}} \Rightarrow \frac{F_1}{F} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2}} \Rightarrow \frac{F_1}{F} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow \frac{F_1}{F} = \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{F_1}{F} = \left(\frac{6.367 \cdot 10^6 \text{ m}}{6.367 \cdot 10^6 \text{ m} + 1000 \text{ m}} \right)^2 \Rightarrow \frac{F_1}{F} = 0.999 \Rightarrow F_1 = 99.9\%F. \end{aligned}$$

Budući da za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase m_Z možemo napisati:

$$G = F \Rightarrow \left[\begin{array}{l} G \text{ težina tijela} \\ F \text{ sila gravitacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{G_1}{G} = \frac{F_1}{F} \Rightarrow \frac{G_1}{G} = 0.999 \Rightarrow G_1 = 99.9\%G.$$

Vježba 034

Koliko puta postane tijelo mase 1000 g lakše ako ga dignemo 1000 m uvis? Polumjer Zemlje je $R = 6367 \text{ km}$ te uzmemo $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Rezultat: $G_1 = 99.9\%G$.

Zadatak 035 (Mira, gimnazija)

Kolika je akceleracija Zemljine sile teže na udaljenosti iznad površine Zemlje koja je jednaka njezinu polumjeru? Koliki je put što ga u prvoj sekundi prijeđe tijelo padajući slobodno na toj visini? Za polumjer Zemlje možemo uzeti $R = 6400$ km. ($m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

Rješenje 035

$$h = R = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad t = 1 \text{ s}, \quad g = ?, \quad s = ?$$

Na površini Zemlje privlačna sila (sila gravitacije) između tijela mase m i Zemlje mase m_Z iznosi:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2},$$

gdje je R srednji polumjer Zemlje.

Budući da za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase m_Z možemo napisati:

$$\begin{aligned} G = F &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} G = m \cdot g \text{ težina tijela} \\ F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} \text{ sila gravitacije} \end{array} \right] \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} /: m \Rightarrow g = G \cdot \frac{m_Z}{(2 \cdot R)^2} = \\ &= 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 2.44 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Put što ga u prvoj sekundi prijeđe tijelo padajući slobodno iznosi:

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2.44 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1 \text{ s})^2 = 1.22 \text{ m}.$$

Vježba 035

Kolika je akceleracija Zemljine sile teže na udaljenosti iznad površine Zemlje koja je jednaka njezinu dvostrukom polumjeru? Koliki je put što ga u prvoj sekundi prijeđe tijelo padajući slobodno na toj visini? Za polumjer Zemlje možemo uzeti $R = 6400$ km. ($m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

Rezultat: $g = 1.09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $s = 0.55 \text{ m}$.

Zadatak 036 (Mira, gimnazija)

Na kojoj se visini od površine Zemlje mora nalaziti neko tijelo da mu težina bude dva puta manja od težine na površini Zemlje? Za polumjer Zemlje možemo uzeti $R = 6400$ km.

Rješenje 036

$$G_2 = \frac{1}{2} \cdot G_1, \quad R = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad h = ?$$

Na površini Zemlje privlačna sila (sila gravitacije) između tijela mase m i Zemlje mase m_Z iznosi:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2},$$

gdje je R srednji polumjer Zemlje.

U našem zadatku postavljen je zahtjev da težina nekog tijela na visini h mora biti dva puta manja od težine na površini Zemlje:

$$\begin{aligned} G_2 = \frac{1}{2} \cdot G_1 &\Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2} /: \frac{1}{G \cdot m \cdot m_Z} \Rightarrow \frac{1}{(R+h)^2} = \frac{1}{2 \cdot R^2} \Rightarrow 2 \cdot R^2 = (R+h)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot R^2 = R^2 + 2 \cdot R \cdot h + h^2 \Rightarrow 2 \cdot R^2 - R^2 - 2 \cdot R \cdot h - h^2 = 0 \Rightarrow -h^2 - 2 \cdot R \cdot h + R^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -h^2 - 2 \cdot R \cdot h + R^2 = 0 /: (-1) \Rightarrow h^2 + 2 \cdot R \cdot h - R^2 = 0 \Rightarrow h_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_{1,2} = \frac{-2 \cdot R \pm \sqrt{4 \cdot R^2 + 4 \cdot R^2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow h_{1,2} = \frac{-2 \cdot R \pm \sqrt{8 \cdot R^2}}{2} \Rightarrow h_{1,2} = \frac{-2 \cdot R \pm 2 \cdot R \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$h_{1,2} = \frac{2 \cdot R \cdot (-1 \pm \sqrt{2})}{2} \Rightarrow h_{1,2} = R \cdot (-1 \pm \sqrt{2}) \Rightarrow \left. \begin{aligned} h_1 &= R \cdot (-1 + \sqrt{2}) = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot (-1 + \sqrt{2}) \\ h_2 &= R \cdot (-1 - \sqrt{2}) = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot (-1 - \sqrt{2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} h_1 &= 6.4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot (-1 + \sqrt{2}) = 2651 \text{ km} \\ h_2 &= 6.4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot (-1 - \sqrt{2}) \text{ nema fizikalnog smisla} \end{aligned} \right\}$$

Vježba 036

Na kojoj se visini od površine Zemlje mora nalaziti neko tijelo da mu težina bude dva puta manja od težine na površini Zemlje? Za polumjer Zemlje možemo uzeti $R = 6500 \text{ km}$.

Rezultat: 2692 km.

Zadatak 037 (Mira, gimnazija)

Kolikom silom Mjesec privlači uteg mase 1 kg koji se nalazi na njegovoj površini ako znamo da je polumjer Mjeseca $1.7 \cdot 10^6 \text{ m}$, a masa $7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$? ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$)

Rješenje 037

$$m = 1 \text{ kg}, \quad r = 1.7 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad m_M = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad F = ?$$

Pomoću općeg zakona gravitacije dobije se:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1 \text{ kg} \cdot 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(1.7 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 1.68 \text{ N}.$$

Vježba 037

Kolikom silom Mjesec privlači uteg mase 2 kg koji se nalazi na njegovoj površini ako znamo da je polumjer Mjeseca $1.7 \cdot 10^6 \text{ m}$, a masa $7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$? ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$)

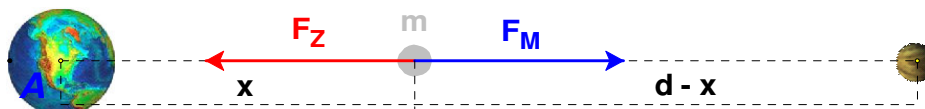
Rezultat: 3.37 N.

Zadatak 038 (Mira, gimnazija)

Na dužini koja spaja Zemlju i Mjesec odredi točku u kojoj su sile privlačenja Zemlje i Mjeseca jednake. Udaljenost između Zemlje i Mjeseca jest 60 Zemljinih polumjera, a Zemljina je masa 81 puta veća od Mjesečeve mase.

Rješenje 038

$$d = 60 \cdot R, \quad m_Z = 81 \cdot m_M, \quad F_Z = F_M, \quad x = ?$$



Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{x^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{(d-x)^2} \quad / \cdot \frac{1}{G \cdot m} \Rightarrow \frac{m_Z}{x^2} = \frac{m_M}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{81 \cdot m_M}{x^2} = \frac{m_M}{(60 \cdot R - x)^2} \quad / \cdot \frac{1}{m_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{81}{x^2} = \frac{1}{(60 \cdot R - x)^2} \Rightarrow 81 \cdot (60 \cdot R - x)^2 = x^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow 9 \cdot (60 \cdot R - x) = x \Rightarrow 540 \cdot R - 9 \cdot x = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot x = 540 \cdot R \quad / : 10 \Rightarrow x = 54 \cdot R.$$

Vježba 038

Na dužini koja spaja Zemlju i Mjesec odredi točku u kojoj su sile privlačenja Zemlje i Mjeseca jednake. Udaljenost između Zemlje i Mjeseca jest 60 Zemljinih polumjera, a Mjesečeva je masa 81 puta manja od Zemljine mase.

Rezultat: $x = 54 \cdot R$.

Zadatak 039 (Mira, gimnazija)

Znajući da su staze Zemlje i Mjeseca približno kružnice, odredi odnos masa Sunca i Zemlje. Poznato je da Mjesec u jednoj godini 13 puta obiđe Zemlju i da je udaljenost Sunca od Zemlje 390 puta veća nego udaljenost Mjeseca od Zemlje.

Rješenje 039

$$T_Z = 13 \cdot T_M, \quad R_Z = 390 \cdot R_M, \quad \frac{m_S}{m_Z} = ?$$

Sila gravitacije između Zemlje mase m_Z i Mjeseca mase m_M na udaljenost R_M mora biti jednaka centripetalnoj sili na Mjesec na udaljenosti R_M od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_M \cdot R_M}{T_M^2} = G \cdot \frac{m_Z \cdot m_M}{R_M^2} \quad / \cdot \frac{1}{m_M} \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_M}{T_M^2} = G \cdot \frac{m_Z}{R_M^2}$$

Sila gravitacije između Sunca mase m_S i Zemlje mase m_Z na udaljenost R_Z mora biti jednaka centripetalnoj sili na Zemlju na udaljenosti R_Z od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_Z \cdot R_Z}{T_Z^2} = G \cdot \frac{m_Z \cdot m_S}{R_Z^2} \quad / \cdot \frac{1}{m_Z} \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_Z}{T_Z^2} = G \cdot \frac{m_S}{R_Z^2}$$

Iz sustava jednadžbi dobije se omjer mase Sunca i Zemlje:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_Z}{T_Z^2} &= G \cdot \frac{m_S}{R_Z^2} \\ \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_M}{T_M^2} &= G \cdot \frac{m_Z}{R_M^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_Z}{T_Z^2}}{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_M}{T_M^2}} = \frac{G \cdot \frac{m_S}{R_Z^2}}{G \cdot \frac{m_Z}{R_M^2}} \Rightarrow \frac{\frac{R_Z}{T_Z^2}}{\frac{R_M}{T_M^2}} = \frac{\frac{m_S}{R_Z^2}}{\frac{m_Z}{R_M^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{R_Z \cdot T_M^2}{T_Z^2 \cdot R_M} = \frac{m_S \cdot R_M^2}{R_Z^2 \cdot m_Z} \quad / \cdot \frac{R_Z^2}{R_M^2} \Rightarrow \frac{m_S}{m_Z} = \frac{R_Z^3 \cdot T_M^2}{T_Z^2 \cdot R_M^3} \Rightarrow \frac{m_S}{m_Z} = \frac{390^3 \cdot R_M^3 \cdot T_M^2}{13^2 \cdot T_M^2 \cdot R_M^3} \Rightarrow \frac{m_S}{m_Z} = \frac{390^3}{13^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{m_S}{m_Z} = 3.51 \cdot 10^5$$

Vježba 039

Znajući da su staze Zemlje i Mjeseca približno kružnice, odredi odnos masa Sunca i Zemlje. Poznato je da Mjesec u jednoj godini 13 puta obiđe Zemlju i da je udaljenost Mjeseca od Zemlje 390 puta manja nego udaljenost Sunca od Zemlje.

Rezultat: $\frac{m_S}{m_Z} = 3.51 \cdot 10^5$

Zadatak 040 (Mira, gimnazija)

Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca 30 km/s, a polumjer njezine staze $1.5 \cdot 10^8$ km? ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$)

Rješenje 040

$$v = 30 \text{ km/s} = 30000 \text{ m/s}, \quad r = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \\ m = ?$$

Sila gravitacije između Sunca mase m_S i Zemlje mase m_Z na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na Zemlju na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F_G = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m_Z \cdot m_S}{r^2} = \frac{m_Z \cdot v^2}{r} \quad / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m_Z} \Rightarrow m_S = \frac{r \cdot v^2}{G} = \frac{\left(30000 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Vježba 040

Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca 30 km/s, a polumjer njezine staze $1.5 \cdot 10^{11}$ m? ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

Rezultat: $2 \cdot 10^{30}$ kg.

www.halapa.com