**Zadatak 001 (Ivan, elektrotehnička škola)**

Dva tijela jednakih masa nalaze se na udaljenosti R. Između njih djeluje gravitacijska sila $F_g$. Kakva će biti sila ako se razmak među tijelima tri puta poveća?

**Rješenje 001**

1.inačica

Formula za gravitacijsku silu je:

$$F_g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \text{ , budući da tijela imaju jednake mase vrijedi } F_g = G \cdot \frac{m^2}{R^2} ,$$

što znači da je sila obrnuto razmjerna s kvadratom udaljenosti među tijelima. Razmak se tri puta poveća, dakle, sila je devet puta manja.

2.inačica

Kada se traži koliko je puta jedna veličina veća ili manja od druge, uvijek moramo postaviti omjer tih dviju veličina:

$$\text{Prva sila: } F_{g1} = G \cdot \frac{m^2}{R^2}, \quad \text{druga sila: } F_{g2} = G \cdot \frac{m^2}{(3 \cdot R)^2}.$$

$$\text{Gledamo omjer: } \frac{F_{g2}}{F_{g1}} = \frac{G \cdot \frac{m^2}{(3 \cdot R)^2}}{G \cdot \frac{m^2}{R^2}} = \left[\text{kratimo dvojni razlomak}\right] = \frac{1}{9} \Rightarrow F_{g2} = \frac{1}{9} \cdot F_{g1}.$$

**Vježba 001**

Dva tijela jednakih masa nalaze se na udaljenosti R. Između njih djeluje gravitacijska sila $F_g$. Kakva će biti sila ako se razmak među tijelima pet puta smanji?

**Rezultat:** Sila je 25 puta veća.

**Zadatak 002 (Marko, gimnazija)**

Koliko visoko iznad površine Zemlje treba podići tijelo da bi se gravitacijsko privlačenje smanjilo 2%? Za polumjer Zemlje uzmimo 6 367 km.

**Rješenje 002**

Označimo masu tijela slovom m, a masu Zemlje slovom M.

R = 6 367 km, p = 2%, h = ?

Na površini Zemlje privlačna sila između tijela mase m i Zemlje mase M iznosi:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2},$$

gdje je R srednji polumjer Zemlje. Na visini h iznad Zemlje privlačna sila iznosi:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2},$$

i bit će 2% manja, dakle iznosit će 98% vrijednosti od privlačne sile na Zemlji.

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} = \frac{98}{100} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \Rightarrow \left[\text{dijelimo s } G \cdot m \cdot M\right] \Rightarrow \frac{1}{(R+h)^2} = \frac{98}{100} \cdot \frac{1}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 98 \cdot (R+h)^2 = 100 \cdot R^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{vadimo korijen i uzimamo samo} \\ \text{pozitivnu vrijednost jer računamo duljinu}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{98}\cdot(R+h)=10\cdot R \;\Rightarrow\; h\cdot\sqrt{98}=10\cdot R-\sqrt{98}\cdot R \;\Rightarrow\; h=\frac{R\cdot(10-\sqrt{98})}{\sqrt{98}} \;\Rightarrow\; h=64.64\ km$$

Tijelo treba podići 64.64 km visoko iznad Zemlje.

**Vježba 002**

Koliko visoko iznad površine Zemlje treba podići tijelo da bi se gravitacijsko privlačenje smanjilo 50%? Za polumjer Zemlje uzmimo 6 400 km.

**Rezultat:** 2 650.967 km.

**Zadatak 003 (Marko, gimnazija)**

Satelit se giba oko Zemlje na udaljenosti 1700 km iznad Zemljine površine. Kolika je brzina satelita? (R = 6400 km, M = $6\cdot10^{24}$ kg)

**Rješenje 003**

Označimo masu satelita slovom m, a masu Zemlje slovom M.

h = 1700 km = $1.7\cdot10^{6}$ m, R = 6400 km = $6.4\cdot10^{6}$ m, M = $6\cdot10^{24}$ kg,

G = $6.67\cdot10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$, v = ?

Na površini Zemlje privlačna sila između tijela mase m i Zemlje mase M iznosi:

$$F=G\cdot\frac{m\cdot M}{R^2},$$

gdje je R srednji polumjer Zemlje. Na visini h iznad Zemlje privlačna sila iznosi:

$$F=G\cdot\frac{m\cdot M}{(R+h)^2}.$$

Budući da se satelit giba po kružnici, sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase M na udaljenosti R + h mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti R + h od središta vrtnje.

$$F_{cp}=F_g \;\Rightarrow\; m\cdot\frac{v^2}{R+h}=G\cdot\frac{m\cdot M}{(R+h)^2}\;/\cdot\frac{R+h}{m} \;\Rightarrow\; v^2=G\cdot\frac{M}{R+h}\;/\sqrt{\ } \;\Rightarrow\; v=\sqrt{G\cdot\frac{M}{R+h}}=$$

$$=\sqrt{6.67\cdot10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{6\cdot10^{24}\ kg}{6.4\cdot10^{6}\ m+1.7\cdot10^{6}\ m}}=\sqrt{6.67\cdot10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{6\cdot10^{24}\ kg}{8.1\cdot10^{6}\ m}}=$$

$$=\sqrt{4.94\cdot10^{7}\ \frac{m^2}{s^2}}=7.03\cdot10^{3}\ \frac{m}{s}=7.03\ \frac{km}{s}.$$

**Vježba 003**

Satelit se giba oko Zemlje na udaljenosti 1500 km iznad Zemljine površine. Kolika je brzina satelita? (R = 6400 km, M = $6\cdot10^{24}$ kg)

**Rezultat:** $7.12\cdot10^{3}$ m/s = 7.12 km/s.

**Zadatak 004 (Martin, gimnazija)**

Pretpostavimo da su srednje gustoće Zemlje i Mjeseca jednake. Polumjeri Mjeseca i Zemlje odnose se kao 0.273 : 1. Odredite duljinu matematičkog njihala koje bi na Mjesecu imalo period titranja 2 s.

**Rješenje 004**

$\rho_Z=\rho_M$, $R_M : R_Z = 0.273 : 1$ => $R_M = 0.273\cdot R_Z$, $g_Z = 9.81$ m/s$^2$, T = 2s, l = ?

Za privlačenje nekog tijela mase m i Mjeseca mase $m_M$ možemo napisati:

$$m \cdot g_M = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{R_M^2},$$

a za privlačenje tog tijela mase m i Zemlje mase $m_Z$ vrijedi:

$$m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R_Z^2}.$$

Dijeljenjem dobivenih jednakosti dobije se akceleracija slobodnog pada na Mjesecu:

$$\frac{m \cdot g_M}{m \cdot g_Z} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_M}{R_M^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R_Z^2}} \Rightarrow \frac{g_M}{g_Z} = \frac{m_M \cdot R_Z^2}{m_Z \cdot R_M^2} \Rightarrow [m = \rho \cdot V] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_M = g_Z \cdot \frac{\rho_M \cdot \frac{4}{3} \cdot R_M^3 \cdot \pi \cdot R_Z^2}{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot R_Z^3 \cdot \pi \cdot R_M^2} \Rightarrow [\rho_M = \rho_Z] \Rightarrow g_M = g_Z \cdot \frac{R_M}{R_Z} = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{0.273 \cdot R_Z}{R_Z} = 2.678 \frac{m}{s^2}.$$

Duljina matematičkog njihala je:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_M}} \Rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g_M}{4 \cdot \pi^2} = \frac{4 s^2 \cdot 2.678 \frac{m}{s^2}}{4 \cdot \pi^2} = 0.27 \ m.$$



**Vježba 004**

Pretpostavimo da su srednje gustoće Zemlje i Mjeseca jednake. Polumjeri Mjeseca i Zemlje odnose se kao 0.273 : 1. Odredite duljinu matematičkog njihala koje bi na Mjesecu imalo period titranja 4 s.

**Rezultat:** 1.09 m.

**Zadatak 005 (Katarina, gimnazija)**

Koliko je najmanje energije potrebno uložiti da bi se Zemljin satelit mase 2 t doveo sa staze čija je visina $h_1 = R_Z$ na stazu visine $h_2 = 2 \cdot R_Z$? ($R_Z$ = 6370 km, $\rho_Z$ = 5500 kg/m$^3$, G = 6.67 · 10$^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$)

**Rješenje 005**

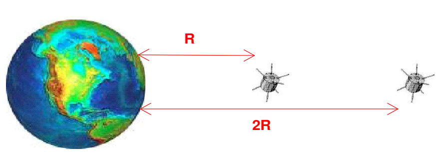
m = 2 t = 2000 kg, $h_1 = R_Z$, $h_2 = 2 \cdot R_Z$, $R_Z$ = 6370 km = 6.37 · 10$^6$ m,

$\rho_Z$ = 5500 kg/m$^3$, G = 6.67 · 10$^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$, W = ?

Ako se materijalna točka mase $m_1$ giba u gravitacijskom polju materijalne točke mase $m_2$ izvršeni je rad

$$W = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

gdje su $r_1$ i $r_2$ početna i konačna udaljenost među točkama.




Masu Zemlje izračunat ćemo pomoću obujma (volumena) i gustoće:

$$m_Z = \rho_Z \cdot V_Z = \frac{4}{3} \cdot R_Z^3 \cdot \pi \cdot \rho_Z.$$

Uložena energija jednaka je izvršenom radu:

$$W=G\cdot m\cdot m_Z\cdot\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)=G\cdot m\cdot\frac{4}{3}\cdot R_Z^3\cdot\pi\cdot\rho_Z\cdot\left(\frac{1}{R_Z}-\frac{1}{2\cdot R_Z}\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot R_Z^2\cdot\pi\cdot\rho_Z\cdot G\cdot m\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot R_Z^2\cdot\pi\cdot\rho_Z\cdot G\cdot m=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(6.37\cdot10^6\ m\right)^2\cdot\pi\cdot5500\ \frac{kg}{m^3}\cdot6.67\cdot10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}\cdot2000\ kg=6.24\cdot10^{10}\ J.$$

**Vježba 005**

Koliko je najmanje energije potrebno uložiti da bi se Zemljin satelit mase 1 t doveo sa staze čija je visina $h_1 = R_Z$ na stazu visine $h_2 = 2 \cdot R_Z$? ($R_Z = 6370$ km, $\rho_Z = 5500$ kg/m$^3$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$)

**Rezultat:** $3.12 \cdot 10^{10}$ J.

**Zadatak 006 (Dvije frendice, gimnazija)**

Gravitacijsko ubrzanje tijela iznad Zemljine površine iznosi polovicu vrijednosti gravitacijskog ubrzanja na površini Zemlje. Kolika je visina u odnosu na polumjer Zemlje? (R – polumjer Zemlje)

**Rješenje 006**

Gravitacijsko ubrzanje na površini Zemlje je:

$$g=G\cdot\frac{M}{R^2},$$

a na visini h iznosi:

$$g_h=G\cdot\frac{M}{(R+h)^2},$$

gdje je M masa Zemlje, R polumjer Zemlje, G gravitacijska konstanta, h visina. Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$g_h=\frac{1}{2}\cdot g\ \Rightarrow\ G\cdot\frac{M}{(R+h)^2}=\frac{1}{2}\cdot G\cdot\frac{M}{R^2}\ /\cdot\frac{1}{G\cdot M}\ \Rightarrow\ \frac{1}{(R+h)^2}=\frac{1}{2R^2}\ \Rightarrow\ (R+h)^2=2\cdot R^2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ R+h=\sqrt{2}\cdot R\ \Rightarrow\ h=\sqrt{2}\cdot R-R=R\cdot\left(\sqrt{2}-1\right).$$

**Vježba 006**

Gravitacijsko ubrzanje tijela iznad Zemljine površine iznosi četvrtinu vrijednosti gravitacijskog ubrzanja na površini Zemlje. Kolika je visina u odnosu na polumjer Zemlje? (R – polumjer Zemlje)

**Rezultat:** h = R.

**Zadatak 007 (Dvije frendice, gimnazija)**

Koliko puta brže bi se morala okretati Zemlja da bi na njezinu ekvatoru osjetili bestežinsko stanje? (Računajte s polumjerom Zemlje $R = 6.38 \cdot 10^6$ m i gravitacijskim ubrzanjem, bez centripetalnog ubrzanja, $g = 9.8$ m/s$^2$.)

**Rješenje 007**

Zemlja se jedanput okrene oko svoje osi za 24 h pa je njezina frekvencija rotacije:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{24\ h}=\frac{1}{24\cdot3600\ s}=1.16\cdot10^{-5}\ s^{-1}.$$

Da bismo na ekvatoru osjećali bestežinsko stanje mora centrifugalna sila koja djeluje na tijelo mase m biti po iznosu jednaka njegovoj težini (sile imaju suprotne smjerove):

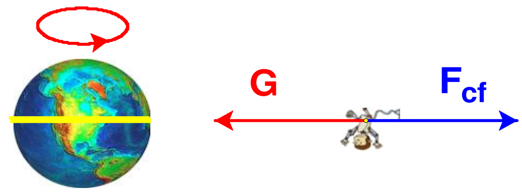
$$F_{cf}=G\ \Rightarrow\ m\cdot4\pi^2\cdot R\cdot f_1^2=m\cdot g\ /\cdot\frac{1}{m\cdot4\pi^2\cdot R}\ \Rightarrow\ f_1^2=\frac{g}{4\pi^2\cdot R}\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ f_1=\sqrt{\frac{g}{4\pi^2\cdot R}}=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{g}{R}}=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{9.8 \ \frac{m}{s^2}}{6.38 \cdot 10^6 \ m}} = 1.97 \cdot 10^{-4} \ s^{-1}.$$

Iz omjera:

$$\frac{f_1}{f} = \frac{1.97 \cdot 10^{-4} \ s^{-1}}{1.16 \cdot 10^{-5} \ s^{-1}} = 16.98 \approx 17$$

slijedi da se Zemlja mora okretati 17 puta brže.




**Vježba 007**

Odredi masu M Zemljine kugle uzevši da je srednji polumjer Zemlje R = 6400 km, a akceleracija slobodnog pada $g = 9.8 \ m/s^2$. ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \ Nm^2kg^{-2}$).

**Rezultat:** $m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \Rightarrow M = \frac{g \cdot R^2}{G} = 6 \cdot 10^{24} \ kg.$

**Zadatak 008 (Dvije frendice, gimnazija)**

Ako se međusobna udaljenost dviju masa trostruko poveća gravitacijska sila među njima se:

a) poveća za faktor 3
b) ostaje nepromijenjena
c) smanji za faktor 3
d) smanji za faktor 1/9

**Rješenje 008**

1.inačica

Formula za gravitacijsku silu je:

$$F_g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2},$$

što znači da je sila obrnuto razmjerna s kvadratom udaljenosti među tijelima. Razmak se tri puta poveća, dakle, sila je devet puta manja. Odgovor je pod d.

2.inačica

Kada se traži koliko je puta jedna veličina veća ili manja od druge, uvijek moramo postaviti omjer tih dviju veličina:

$$\text{Prva sila}: \ F_{g1} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}, \quad \text{druga sila}: \ F_{g2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{(3 \cdot R)^2}.$$

$$\text{Gledamo omjer}: \ \frac{F_{g2}}{F_{g1}} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{(3 \cdot R)^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}} = \left[\text{kratimo dvojni razlomak}\right] = \frac{1}{9} \Rightarrow F_{g2} = \frac{1}{9} \cdot F_{g1}.$$

Odgovor je pod d.

**Vježba 008**

Ako se međusobna udaljenost dviju masa dvostruko poveća gravitacijska sila među njima se:

a) smanji za faktor 2
b) smanji za faktor 1/4
c) poveća za faktor 2
d) ostaje nepromijenjena

**Rezultat:** Odgovor: b.

**Zadatak 009 (Dvije frendice, gimnazija)**

Ako se međusobna udaljenost dviju masa trostruko smanji gravitacijska sila među njima se:

a) poveća za faktor 9
b) ostaje nepromijenjena
c) smanji za faktor 1/3
d) smanji za faktor 1/9

**Rješenje 009**

1.inačica

Formula za gravitacijsku silu je:

$$F_g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2},$$

što znači da je sila obrnuto razmjerna s kvadratom udaljenosti među tijelima. Razmak se tri puta smanji, dakle, sila je devet puta veća. Odgovor je pod a.

2.inačica

Kada se traži koliko je puta jedna veličina veća ili manja od druge, uvijek moramo postaviti omjer tih dviju veličina:

$$\text{Prva sila}: \ F_{g1} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}, \quad \text{druga sila}: \ F_{g2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{\left(\frac{1}{3} \cdot R\right)^2}.$$

$$\text{Gledamo omjer}: \ \frac{F_{g2}}{F_{g1}} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{\left(\frac{1}{3} \cdot R\right)^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}} = \left[\text{kratimo dvojni razlomak}\right] = 9 \ \Rightarrow \ F_{g2} = 9 \cdot F_{g1}.$$

Odgovor je pod a.



**Vježba 009**

Ako se međusobna udaljenost dviju masa dvostruko smanji gravitacijska sila među njima se:

a) poveća za faktor 4
b) ostaje nepromijenjena
c) smanji za faktor 1/2
d) smanji za faktor 1/4

**Rezultat:** Odgovor: a.

**Zadatak 010 (Dvije frendice, gimnazija)**

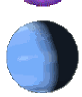
Treći Keplerov zakon definira proporcionalnu povezanost između:

a) polumjera putanje i perioda revolucije
b) kvadrata polumjera i kvadrata perioda
c) kvadrata polumjera i kuba perioda
d) kuba polumjera i kvadrata perioda

**Rješenje 010**

Keplerovi zakoni opisuju kinematiku gibanja planeta oko Sunca. Keplerovi zakoni glase:

1. Svaki planet giba se po elipsi, a Sunce je u jednom žarištu te elipse.



2. Radijvektor, tj. spojnica Sunce – planet u jednakim vremenskim intervalima opisuje jednake površine.

3. Kvadrati ophodnih vremena planeta oko Sunca odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti od Sunca:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Odgovor je pod d.

**Vježba 010**

Treći Keplerov zakon definira proporcionalnu povezanost između:

a) kvadrata perioda i kuba polumjera
b) kuba polumjera i kuba perioda
c) kvadrata polumjera i kuba perioda
d) kvadrata polumjera i kvadrata perioda

**Rezultat:** Odgovor: a.

**Zadatak 011 (Dvije frendice, gimnazija)**

Koja je mjerna jedinica gravitacijske konstante:

a) $(kg^2\ m^2)$ / N
b) $(kg^2$ N) / $m^2$
c) (N $m^2$) / $kg^2$
d) N / $(kg^2\ m^2)$

**Rješenje 011**

Formula za gravitacijsku silu je:

$$F_g=G\cdot\frac{m\cdot M}{R^2}.$$

Tada vrijedi:

$$F_g=G\cdot\frac{m\cdot M}{R^2}\ /\cdot R^2\ \Rightarrow\ R^2\cdot F_g=G\cdot m\cdot M\ \Rightarrow\ G=\frac{R^2\cdot F_g}{m\cdot M}.$$

Mjerna jedinica za gravitacijsku konstantu je:

$$[G]=\frac{[R]^2\cdot[F_g]}{[m]\cdot[M]}=\frac{m^2\cdot N}{kg\cdot kg}=\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\ \text{ili}\ [G]==\frac{N\cdot m^2}{kg^2}=\frac{kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot m^2}{kg^2}=\frac{m^3}{kg\cdot s^2}.$$



Odgovor je pod c.

**Vježba 011**

Koja je mjerna jedinica za silu:

a) kg m $s^{-2}$
b) kg $m^{-1}$ $s^2$
c) $kg^2$ m $s^{-2}$
d) kg $m^{-1}$ $s^{-2}$

**Rezultat:** Odgovor: a.

**Zadatak 012 (Dvije frendice, gimnazija)**

Masa tijela A je dvostruko veća od mase tijela B. $F_{AB}$ je sila kojom tijelo A djeluje na tijelo B, a $F_{BA}$ je sila kojom tijelo B djeluje na tijelo A. Koja je od sljedećih tvrdnji točna?

a) iznosi tih sila su jednaki
b) $F_{AB} > F_{BA}$
c) $F_{AB} < F_{BA}$
d) ne može se odrediti odnos jer nije poznata njihova međusobna udaljenost

**Rješenje 012**

Podsjetimo se!

III. Newtonov poučak (aksiom, zakon) ili zakon akcije i reakcije

- Ako neko tijelo djeluje na drugo nekom silom, tada i drugo djeluje na prvo silom koja je po iznosu jednaka, ali suprotnog smjera smjeru prve sile.
- Ako tijelo A djeluje na tijelo B nekom silom, tijelo B djeluje na tijelo A silom jednakog iznosa, ali suprotnog smjera:

$$F_{12}=F_{21}\ \text{ili vektorski}\ \vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}.$$

a) obje sile, tj. akcija i reakcija uvijek djeluju istodobno
b) akcija i reakcija ne djeluju na isto tijelo, već na dva različita tijela
c) zakon vrijedi za svaka dva tijela koja međudjeluju, bez obzira miruju li ili se gibaju (bilo jednoliko, bilo akcelerirano)
d) iz zakona akcije i reakcije proizlazi da se mase dvaju tijela odnose obrnuto nego njihove akceleracije:

$$m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2 \;\Rightarrow\; m_1 : m_2 = a_2 : a_1 .$$

Odgovor je pod a.

**Vježba 012**

Masa tijela A je trostruko manja od mase tijela B. $F_{AB}$ je sila kojom tijelo A djeluje na tijelo B, a $F_{BA}$ je sila kojom tijelo B djeluje na tijelo A. Koja je od sljedećih tvrdnji točna?

a) $F_{AB} > F_{BA}$
b) iznosi tih sila su jednaki
c) $F_{AB} < F_{BA}$
d) ne može se odrediti odnos jer nije poznata njihova međusobna udaljenost

**Rezultat:** Odgovor: b.

**Zadatak 013 (Dvije frendice, gimnazija)**

Na kojem se dijelu orbite oko Sunca najbrže giba Zemlja?

a) kad se nalazi u afelu
b) kad se nalazi u perihelu
c) kad se nalazi u afelu ili perihelu
d) kad se nalazi daleko od jednog i drugog položaja

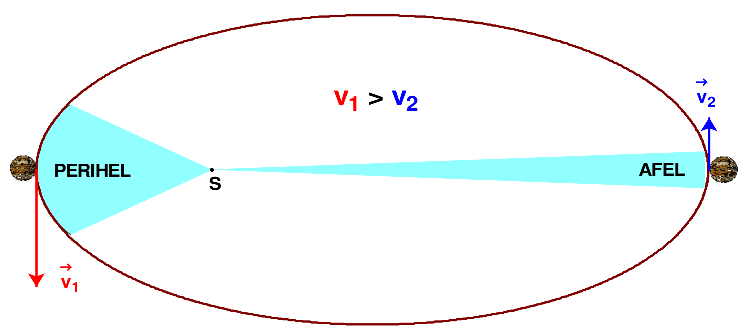
**Rješenje 013**

Afel (grč. apo = od, helios = sunce) je točka u kojoj je planet na svojoj eliptičnoj putanji najudaljeniji od Sunca. Zemlja prolazi kroz afel svake godine početkom srpnja i tada je udaljena od Sunca 152,1 milijuna kilometara

Perihel (grč. helios = sunce) je položaj nekog planeta na svojoj eliptičnoj putanji kada je najbliži Suncu. Zemlja prolazi kroz perihel svake godine početkom siječnja i tada je udaljena od Sunca 147,1 milijun kilometara (srednja je vrijednost udaljenosti Zemlje od Sunca 149,6 milijuna kilometara). Zanimljivo je to da je Zemlja najbliža Suncu kad je temperatura na sjevernoj polutki najniža u godini dana. To je očiti dokaz da godišnja doba ne diktira blizina Sunca, već nagnutost Zemljine osi prema Suncu.

Drugi Keplerov zakon: Radijvektor, tj. spojnica Sunce – planet u jednakim vremenskim intervalima opisuje jednake površine.

Odgovor je pod b.




**Vježba 013**

Na kojem se dijelu orbite oko Sunca najsporije giba Zemlja?

a) kad se nalazi u afelu
b) kad se nalazi u perihelu
c) kad se nalazi u afelu ili perihelu
d) kad se nalazi daleko od jednog i drugog položaja

**Rezultat:** Odgovor: a.

**Zadatak 014 (Frenky, gimnazija)**

Kako se računa akceleracija slobodnog pada na visini h iznad površine nekog planeta?

**Rješenje 014**

Ako se tijelo mase m nalazi na visini h iznad površine planeta polumjera R i mase M, tada je gravitacijska sila jednaka:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2},$$

gdje je G univerzalna gravitacijska konstanta.

Akceleracija slobodnog pada na visini h iznad površine planeta polumjera R i mase M iznosi:

$$g_h = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} \quad \text{ili} \quad g_h = g \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2},$$

gdje je g vrijednost alceleracije na površini planeta.

**Vježba 014**

Kako se računa akceleracija slobodnog pada na površini Zemlje?

**Rezultat:** $g \approx G \cdot \frac{M}{R^2},$ gdje su M i R masa i srednji polumjer Zemlje.

**Zadatak 015 (Frenky, gimnazija)**

Izračunajte srednju gustoću Zemlje pomoću akceleracije sile teže g = 9.81 m/s$^2$ i polumjera Zemlje R = 6.37 · 10$^6$ m. (G = 6.67 · 10$^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$)

**Rješenje 015**

g = 9.81 m/s$^2$, R = 6.37 · 10$^6$ m, G = 6.67 · 10$^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$, ρ = ?

Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M možemo napisati:

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \quad /:m \quad \Rightarrow \quad g = G \cdot \frac{M}{R^2}.$$

Masu Zemlje izrazimo pomoću njezine srednje gustoće i volumena:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi.$$

Odatle proizlazi gustoća:

$$\left.\begin{aligned} g &= G \cdot \frac{M}{R^2} \\ M &= \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow g = G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi}{R^2} \Rightarrow g = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R \cdot \pi \Rightarrow \rho = \frac{3 \cdot g}{4 \cdot \pi \cdot G \cdot R} =$$

$$= \frac{3 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}}{4 \cdot \pi \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 6.37 \cdot 10^6 \ m} = 5512.08 \frac{kg}{m^3}.$$

**Vježba 015**

Izračunajte srednju gustoću Zemlje pomoću akceleracije sile teže g = 10 m/s$^2$ i polumjera Zemlje R = 6.37 · 10$^6$ m. (G = 6.67 · 10$^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$)

**Rezultat:** $5618.83 \frac{kg}{m^3}.$

**Zadatak 016 (Iva, gimnazija)**

Na dužini koja spaja Zemlju i Mjesec odredi točku u kojoj su sile privlačenja Zemlje i Mjeseca jednake. Udaljenost između Zemlje i Mjeseca je 60 Zemljinih polumjera, a Zemljina je masa 81 puta veća od Mjesečeve mase.

**Rješenje 016**

R – polumjer Zemlje, M – masa Zemlje, $m_m$ – masa Mjeseca, $M = 81 \cdot m_m$, $d = 60 \cdot R$, $x = ?$

Neka je x udaljenost tražene točke od Zemlje. Budući da su u toj točki sile privlačenja Zemlje i Mjeseca jednake, slijedi:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{x^2} = G \cdot \frac{m_m \cdot m}{(d - x)^2},$$

gdje je m masa nekog tijela. Sa slike vidi se:


$$G \cdot \frac{M \cdot m}{x^2} = G \cdot \frac{m_m \cdot m}{(d - x)^2} \; / \cdot \frac{1}{G \cdot m} \Rightarrow \frac{M}{x^2} = \frac{m_m}{(d - x)^2} \Rightarrow \frac{81 \cdot m_m}{x^2} = \frac{m_m}{(60 \cdot R - x)^2} \; / : m_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{81}{x^2} = \frac{1}{(60 \cdot R - x)^2} \; / \sqrt{\ } \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{1}{60 \cdot R - x} \Rightarrow x = 9 \cdot (60 \cdot R - x) \Rightarrow x = 540 \cdot R - 9 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot x = 540 \cdot R \; / : 10 \Rightarrow x = 54 \cdot R.$$

**Vježba 016**

Na dužini koja spaja dva planeta odredi točku u kojoj su sile privlačenja planeta jednake. Udaljenost između planeta je 30 polumjera većeg planeta, a masa većeg planeta je 25 puta veća od mase manjeg planeta.

**Rezultat:** x = 25R.



**Zadatak 017 (Ante, gimnazija)**

Odredi akceleraciju slobodnog pada tijela na površini Sunca ako znamo da je polumjer Zemljine staze $R = 1.5 \cdot 10^8$ km, polumjer Sunca $r = 7 \cdot 10^5$ km i vrijeme ophoda Zemlje oko Sunca T = 1 godina.

**Rješenje 017**

$R = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $r = 7 \cdot 10^5 \text{ km} = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$,
$T = 1 \text{ godina} = 365.25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 3.15576 \cdot 10^7 \text{ s}$, $g_S = ?$

Za privlačenje tijela mase m i Sunca nase $m_S$ možemo napisati:

$$m \cdot g_S = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r^2} \; / : m \Rightarrow g_S = G \cdot \frac{m_S}{r^2} \left( \begin{array}{l} \text{akcelaracija slobodnog} \\ \text{pada na površini Sunca} \end{array} \right).$$

Budući da se Zemlja kružno giba oko Sunca, za Sunce i Zemlju vrijedi:

$$G \cdot \frac{m_Z \cdot m_S}{R^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_Z \cdot R}{T^2},$$

gdje je $m_Z$ masa Zemlje. Sada je:

$$\left. \begin{array}{l} g_S = G \cdot \dfrac{m_S}{r^2} \; / \cdot r^2 \\ G \cdot \dfrac{m_Z \cdot m_S}{R^2} = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_Z \cdot R}{T^2} \; / : m_Z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r^2 \cdot g_S = G \cdot m_S \\ G \cdot \dfrac{m_S}{R^2} = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{r^2 \cdot g_S}{R^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \cdot g_S \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3 \Rightarrow g_S = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{r^2 \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{(r \cdot T)^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(1.5 \cdot 10^{11} \, m\right)^3}{\left(7 \cdot 10^8 \cdot 3.15576 \cdot 10^7 \, s\right)^2} = 273.04 \, \frac{m}{s^2}.$$

**Vježba 017**

Odredi težinu tijela mase 100 kg na površini Sunca ako znamo da je polumjer Zemljine staze $R = 1.5 \cdot 10^8$ km, polumjer Sunca $r = 7 \cdot 10^5$ km i vrijeme ophoda Zemlje oko Sunca T = 1 godina.

**Rezultat:** G = 27304 N.

**Zadatak 018 (Rex, gimnazija)**

Neka je polumjer nekog asteroida 5 km i pretpostavimo da mu je gustoća $\rho_a = 5.5$ g/cm$^3$. Odredi na koju će visinu poskočiti čovjek na asteroidu ako uporabi isti napor kojim bi na Zemlji poskočio 5 cm visoko. Asteroid ima oblik kugle.

**Rješenje 018**

r = 5 km = 5000 m, $\rho_a = 5.5$ g/cm$^3$ = 5500 kg/m$^3$, $h_Z$ = 5 cm = 0.05 m,
$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m$^3$/kgs$^2$, $g_Z = 9.81$ m/s$^2$, $h_a$ = ?

Znamo da je:

$$g_a = G \cdot \frac{m_a}{r^2} \quad \left(\begin{array}{l}\text{akcelaracija slobodnog} \\ \text{pada na asteroidu}\end{array}\right).$$

Budući da je čovjek u oba slučaja imao jednaku kinetičku energiju, bit će i potencijalna energija jednaka:

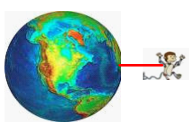
$$m \cdot g_Z \cdot h_Z = m \cdot g_a \cdot h_a,$$

gdje je m masa čovjeka. Dalje slijedi:

$$m \cdot g_Z \cdot h_Z = m \cdot g_a \cdot h_a \;\; /:m \;\Rightarrow\; g_Z \cdot h_Z = g_a \cdot h_a \;\Rightarrow\; h_a = \frac{g_Z \cdot h_Z}{g_a} = \frac{g_Z \cdot h_Z}{G \cdot \frac{m_a}{r^2}} = \frac{g_Z \cdot h_Z \cdot r^2}{G \cdot m_a} =$$

$$= \frac{g_Z \cdot h_Z \cdot r^2}{G \cdot \rho_a \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = \frac{3 \cdot g_Z \cdot h_Z}{4 \cdot G \cdot \rho_a \cdot r \cdot \pi} = \frac{3 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0.05\, m}{4 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5500 \frac{kg}{m^3} \cdot 5000\, m \cdot \pi} = 63.84\, m.$$





**Vježba 018**

Neka je polumjer nekog asteroida 5 km i pretpostavimo da mu je gustoća $\rho_a = 5.5$ g/cm$^3$. Odredi na koju će visinu poskočiti čovjek na asteroidu ako uporabi isti napor kojim bi na Zemlji poskočio 10 cm visoko. Asteroid ima oblik kugle.

**Rezultat:** 127.68 m.

**Zadatak 019 (Mala, gimnazija)**

Znajući da su staze Zemlje i Mjeseca približno kružnice, odredi odnos masa Sunca i Zemlje. Poznato je da Mjesec u jednoj godini 13 puta obiđe Zemlju i da je udaljenost Sunca od Zemlje 390 puta veća nego udaljenost Mjeseca od Zemlje.

**Rješenje 019**

T – period ophoda Zemlje oko Sunca, $T_M$ – period ophoda Mjeseca oko Zemlje, $T_M = \frac{1}{13} \cdot T,$

r – udaljenost Mjeseca od Zemlje, $r_S$ – udaljenost Zemlje od Sunca, $r_S = 390 \cdot r,$ $\frac{m_S}{m_Z} = ?$

Budući da se Zemlja giba približno po kružnici oko Sunca, sila gravitacije između Sunca mase $m_S$ i Zemlje mase $m_Z$ na udaljenosti $r_S$ mora biti jednaka centripetalnoj sili na Zemlju na udaljenosti $r_S$ od središta vrtnje:

$$G \cdot \frac{m_Z \cdot m_S}{r_S^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_Z \cdot r_S}{T^2}.$$

Budući da se Mjesec giba približno po kružnici oko Zemlje, sila gravitacije između Zemlje mase $m_Z$ i Mjeseca mase m na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na Mjesec na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T_M^2}.$$

Kada ta dva izraza podijelimo, dobije se:

$$\frac{G \cdot \frac{m_Z \cdot m_S}{r_S^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r^2}} = \frac{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_Z \cdot r_S}{T^2}}{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T_M^2}} \Rightarrow \frac{\frac{m_S}{r_S^2}}{\frac{m}{r^2}} = \frac{\frac{m_Z \cdot r_S}{T^2}}{\frac{m \cdot r}{T_M^2}} \Rightarrow \frac{m_S \cdot r^2}{m \cdot r_S^2} = \frac{m_Z \cdot r_S \cdot T_M^2}{m \cdot r \cdot T^2} \ / \cdot \frac{m \cdot r_S^2}{m_Z \cdot r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_S}{m_Z} = \frac{r_S^3 \cdot T_M^2}{r^3 \cdot T^2} \Rightarrow \frac{m_S}{m_Z} = \left(\frac{r_S}{r}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_M}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{m_S}{m_Z} = \left(\frac{390 \cdot r}{r}\right)^3 \cdot \left(\frac{\frac{1}{13} \cdot T}{T}\right)^2 = 390^3 \cdot \frac{1}{13^2} = 3.51 \cdot 10^5.$$

**Vježba 019**

Znajući da su staze Zemlje i Mjeseca približno kružnice, odredi odnos masa Zemlje i Sunca. Poznato je da Mjesec u jednoj godini 13 puta obiđe Zemlju i da je udaljenost Sunca od Zemlje 390 puta veća nego udaljenost Mjeseca od Zemlje.

**Rezultat:** $\frac{m_Z}{m_S} = 2.85 \cdot 10^{-6}.$

**Zadatak 020 (Mala, gimnazija)**

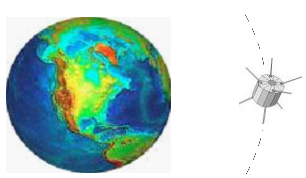
Koliko je puta kinetička energija umjetnog Zemljina satelita manja od njegove potencijalne energije? Pretpostavimo da je staza satelita kružna.

**Rješenje 020**

Ponovimo!

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju: $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju: $E_p = m \cdot g \cdot r,$ gdje je g akcelaracija slobodnog pada, a r vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.



U ovom je slučaju sila teža uzrok kružnog gibanja satelita oko Zemlje. Zato mora biti centripetalna sila jednaka sili teži:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g.$$

Ako pretpostavimo da je udaljenost satelita od površine Zemlje mnogo manja od polumjera Zemlje, dobije se:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g \ / \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot r \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot E_p.$$

**Vježba 020**

Koliko je puta potencijalna energija umjetnog Zemljina satelita veća od njegove kinetičke energije? Pretpostavimo da je staza satelita kružna.

**Rezultat:** $E_p = 2 \cdot E_k.$