Zadatak 341 (Ina, gimnazija)

Tijelo mase 10 g harmonički titra s amplitudom 9 cm i maksimalnim ubrzanjem 0.4 m / s^2. Odredite kinetičku energiju tijela u točki u koju stiže poslije 0.05 s gibanja od ravnotežnog položaja kao početnog.

Rješenje 341

m = 10 g = 0.01 kg, A = 9 cm = 0.09 m, a_0 = 0.4 m / s^2, t = 0.05 s, E_k = ?

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji.

Brzina tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je A amplituda, tj. maksimalna elongacija (udaljenost od položaja ravnoteže), T vrijeme jednog titraja ili perioda, t vrijeme.

Maksimalna akceleracija tijela koje titra dana je formulom

$$a_\circ = A \cdot \omega^2,$$

gdje je $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ kutna brzina ili često zvana kružna akceleracija.

$$a_\circ = A \cdot \omega^2 \Rightarrow A \cdot \omega^2 = a_\circ \Rightarrow A \cdot \omega^2 = a_\circ \;/ \cdot \frac{1}{A} \Rightarrow \omega^2 = \frac{a_\circ}{A} \Rightarrow \omega^2 = \frac{a_\circ}{A} \;/ \sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_\circ}{A}} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{a_\circ}{A}} \Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}\right] \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{A}{a_\circ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{A}{a_\circ}} \;/ \cdot 2 \cdot \pi \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{A}{a_\circ}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.09\ m}{0.4\ \frac{m}{s^2}}} = 2.99\ s.$$

Kinetička energija tijela u točki u koju stiže poslije vremena t iznosi:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.01\ kg \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 0.09\ m}{2.99\ s} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2.99\ s} \cdot 0.05\ s\right)\right)^2 = \text{RAD} = 1.77 \cdot 10^{-4}\ J.$$

Vježba 341

Tijelo mase 1 dag harmonički titra s amplitudom 0.9 dm i maksimalnim ubrzanjem 4 dm / s^2. Odredite kinetičku energiju tijela u točki u koju stiže poslije 0.05 s gibanja od ravnotežnog položaja kao početnog.

Rezultat: $1.77 \cdot 10^{-4}$ J.

Zadatak 342 (Dominik, srednja škola)

Dva njihala titraju periodima od 2 s i 3 s. Za koliko metara treba skratiti dulju nit da bi njihala bila u rezonanciji? (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2)

Rješenje 342

$T_1 = 2$ s, $T_2 = 3$ s, $g = 9.81$ m / s^2, $\Delta l = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Rezonancija je pojava kada na neki sustav, koji se može gibati nekom svojom frekvencijom (tzv. vlastita frekvencija), djeluje sila čija je frekvencija upravo jednaka vlastitoj frekvenciji sustava.

Najprije odredimo duljine obje niti.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = T_1 \\ 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} = T_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = T_1 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \\ 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} = T_2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{l_1}{g}} = \frac{T_1}{2 \cdot \pi} \\ \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \frac{T_2}{2 \cdot \pi} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{l_1}{g}} = \frac{T_1}{2 \cdot \pi} \quad /^2 \\ \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \frac{T_2}{2 \cdot \pi} \quad /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{l_1}{g} = \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \\ \frac{l_2}{g} = \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{l_1}{g} = \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \quad / \cdot g \\ \frac{l_2}{g} = \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \quad / \cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_1 = g \cdot \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \\ l_2 = g \cdot \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \end{array}\right\}.$$

Dulju nit l_2 treba skratiti za Δl.

$$\Delta l = l_2 - l_1 \Rightarrow \Delta l = g \cdot \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} - g \cdot \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow \Delta l = \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(T_2^2 - T_1^2\right) =$$

$$= \frac{9.81 \frac{m}{s^2}}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left((3\ s)^2 - (2\ s)^2\right) = 1.24\ m$$

Vježba 342

Dva njihala titraju periodima od 3 s i 4 s. Za koliko metara treba skratiti dulju nit da bi njihala bila u rezonanciji? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m / s^2)
kao početnog.

Rezultat: 1.74 m.

Zadatak 343 (Mihael, gimnazija)

Matematičko njihalo prvo njiše uz titrajno vrijeme T_h u vagonu koji se ubrzava u horizontalnom smjeru ubrzanjem a. Kada isto matematičko njihalo njiše u dizalu koje ubrzava istim ubrzanjem a uvis, titrajno vrijeme T_v je 10 % manje od titrajnog vremena T_h. Koliko je minimalno ubrzanje a? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m / s^2)

Rješenje 343

T_h, T_v, $g = 9.81$ m / s^2, $a = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

U sustavu koji se uzdiže ubrzanjem a ukupno ubrzanje iznosi $g + a$ pa je period titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + a}}.$$

Ako se njihalo nalazi u sustavu koji ubrzava akceleracijom a u horizontalnom smjeru rezultantna akceleracija je tada

$$a_r = \sqrt{g^2 + a^2}$$

pa je period titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{a_r}} \quad , \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

Iz uvjeta zadatka dobije se:

$$T_v + \frac{10}{100} \cdot T_h = T_h \Rightarrow T_v = T_h - \frac{10}{100} \cdot T_h \Rightarrow T_v = \frac{90}{100} \cdot T_h \Rightarrow T_v = \frac{90}{100} \cdot T_h \quad / \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot T_v = 9 \cdot T_h \Rightarrow \left[\begin{array}{l} T_v = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + a}} \\ T_h = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + a}} = 9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + a}} = 9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot \sqrt{\frac{l}{g + a}} = 9 \cdot \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \Rightarrow 10 \cdot \sqrt{\frac{l}{g + a}} = 9 \cdot \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \quad /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 \cdot \frac{l}{g + a} = 81 \cdot \frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}} \Rightarrow 100 \cdot \frac{l}{g + a} = 81 \cdot \frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}} \quad / \cdot \frac{1}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100}{g + a} = \frac{81}{\sqrt{g^2 + a^2}} \Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \right] \Rightarrow 100 \cdot \sqrt{g^2 + a^2} = 81 \cdot (g + a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 \cdot \sqrt{g^2 + a^2} = 81 \cdot (g + a) \quad /^2 \Rightarrow 10000 \cdot \left(g^2 + a^2\right) = 6561 \cdot (g + a)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10000 \cdot g^2 + 10000 \cdot a^2 = 6561 \cdot \left(g^2 + 2 \cdot g \cdot a + a^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10000 \cdot g^2 + 10000 \cdot a^2 = 6561 \cdot g^2 + 13122 \cdot g \cdot a + 6561 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10000 \cdot g^2 + 10000 \cdot a^2 - 6561 \cdot g^2 - 13122 \cdot g \cdot a - 6561 \cdot a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3439\cdot a^2-13122\cdot g\cdot a+3439\cdot g^2=0\ \Rightarrow\ 3439\cdot a^2-13122\cdot 9.81\cdot a+3439\cdot 9.81^2=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3439\cdot a^2-128726.82\cdot a+330955.9479=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{matrix} 3439\cdot a^2-128726.82\cdot a+330955.9479=0 \\ a=3439\ ,\ b=-128726.82\ ,\ c=330955.9479 \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left[a_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right]\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow\ a=2.78\ \frac{m}{s^2}.$

Vježba 343

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 344 (Marija, maturantica)

Gumeno uže, gustoće 1.2 g / cm^3, ima duljinu 4 m i promjer 6 mm. Kolikom je silom napeto, ako transverzalni impuls prijeđe uže za 0.6 s?

$$A.\,1.51\ N \qquad B.\,2.4\ N \qquad C.\,1.71\ N \qquad D.\,1.91\ N$$

Rješenje 344

ρ = 1.2 g / cm^3 = 1200 kg / m^3, l= 4 m, 2 · r = 6 mm => r = 3 mm = 0.003 m, t = 0.6 s, F = ?

Brzina transverzalnih valova u žici ili užetu dana je formulom

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

gdje je F sila napinjanja, a $\mu=\frac{m}{l}$ masa jedinice duljine.

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho=\frac{m}{V}\ \Rightarrow\ m=\rho\cdot V.$$

Obujam valjka čiji je polumjer baze r i visina h dan je formulom

$$V=r^2\cdot\pi\cdot h.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s=v\cdot t\ \Rightarrow\ v=\frac{s}{t},$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\ \Rightarrow\ v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\ /^2\ \Rightarrow\ v^2=\frac{F}{\mu}\ \Rightarrow\ \frac{F}{\mu}=v^2\ \Rightarrow\ \frac{F}{\mu}=v^2\ /\cdot\mu\ \Rightarrow\ F=\mu\cdot v^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ F=\frac{m}{l}\cdot\left(\frac{l}{t}\right)^2\ \Rightarrow\ F=\frac{\rho\cdot V}{l}\cdot\left(\frac{l}{t}\right)^2\ \Rightarrow\ F=\frac{\rho\cdot r^2\cdot\pi\cdot l}{l}\cdot\left(\frac{l}{t}\right)^2\ \Rightarrow\ F=\frac{\rho\cdot r^2\cdot\pi\cdot \cancel{l}}{\cancel{l}}\cdot\left(\frac{l}{t}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ F=\rho\cdot r^2\cdot\pi\cdot\left(\frac{l}{t}\right)^2=1200\ \frac{kg}{m^3}\cdot(0.003\ m)^2\cdot\pi\cdot\left(\frac{4\ m}{0.6\ s}\right)^2=1.51\ N.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 344

Gumeno uže, gustoće 1.2 g / cm^3, ima duljinu 8 m i promjer 6 mm. Kolikom je silom napeto, ako transverzalni impuls prijeđe uže za 1.2 s?

$$A.\ 1.51\ N \qquad B.\ 2.4\ N \qquad C.\ 1.71\ N \qquad D.\ 1.91\ N$$

Rezultat: A.

Zadatak 345 (Frendice, maturantice)

Tijelo mase m harmonijski titra s amplitudom A. Kada se masa tijela poveća dva puta, ali amplituda ostane jednaka kao i prije, što se događa s ukupnom energijom titranja sustava?

A. Ukupna energija poraste dva puta. *B.* Ukupna energija se smanji dva puta.
C. Ukupna energija se ne mijenja. *D.* Ukupna energija poraste četiri puta.

Rješenje 345

m, A, E = ?

Ukupna energija sustava koji titra u svakom je trenutku

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2,$$

gdje je A amplituda (najveći otklon od ravnotežnog položaja).
Ukupna energija

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

ne ovisi o ovješenoj masi pa se ne mijenja.
Odgovor je pod C.

Vježba 345

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 346 (Frendice, maturantice)

Tijelo mase m harmonijski titra s amplitudom A. Kada se amplituda titranja tijela poveća dva puta, što se događa s ukupnom energijom titranja sustava?

A. Ukupna energija poraste dva puta. *B.* Ukupna energija se smanji dva puta.
C. Ukupna energija se ne mijenja. *D.* Ukupna energija poraste četiri puta.

Rješenje 346

m, A, E = ?

Ukupna energija sustava koji titra u svakom je trenutku

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2,$$

gdje je A amplituda (najveći otklon od ravnotežnog položaja).

1.inačica

$$\left. \begin{aligned} E_\circ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ E &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2 \cdot A)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{E}{E_\circ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot (2 \cdot A)^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2} \Rightarrow \frac{E}{E_\circ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot (2 \cdot A)^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2} \Rightarrow \frac{E}{E_\circ} = \frac{(2 \cdot A)^2}{A^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E}{E_\circ} = \frac{4 \cdot A^2}{A^2} \Rightarrow \frac{E}{E_\circ} = \frac{4 \cdot A^2}{A^2} \Rightarrow \frac{E}{E_\circ} = 4 \Rightarrow \frac{E}{E_\circ} = 4 \ / \cdot E_\circ \Rightarrow E = 4 \cdot E_\circ .$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2 \cdot A)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot 4 \cdot A^2 \Rightarrow E = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \right) \Rightarrow \left[E_\circ = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = 4 \cdot E_\circ.$$

Odgovor je pod D.

3.inačica

$$E_\circ = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow E_\circ \sim A^2.$$

Budući da je energija razmjerna s kvadratom amplitude, dva puta veća amplituda daje četiri puta veću energiju.

Odgovor je pod D.

Vježba 346

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 347 (Frendice, maturantice)

Tijelo mase m titra na opruzi. Kada se masa tijela poveća dva puta, što se događa s periodom titranja sustava?

A. Period se poveća dva puta. *B.* Period se poveća za manje od dva puta.
C. Period se smanji dva puta. *D.* Period se smanji za manje od dva puta.

Rješenje 347

m, 2 · m, T = ?

Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti period titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdje je m masa tijela ovješeno o elastičnu oprugu.

1.inačica

$$\left. \begin{array}{l} T_\circ = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{T}{T_\circ} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T}{T_\circ} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T}{T_\circ} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot m}{k}}}{\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T}{T_\circ} = \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot m}{k}}{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T}{T_\circ} = \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot m}{k}}{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T}{T_\circ} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{T}{T_\circ} = \sqrt{2} \;/ \cdot T_\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{2} \cdot T_\circ \Rightarrow T \approx 1.41 \cdot T_\circ.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = \sqrt{2} \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \right] \Rightarrow T = \sqrt{2} \cdot T_\circ \Rightarrow T \approx 1.41 \cdot T_\circ.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 347

Tijelo mase m titra na opruzi. Kada se masa tijela poveća četiri puta, što se događa s periodom titranja sustava?

A. Period se poveća dva puta. *B.* Period se poveća za manje od dva puta.
C. Period se smanji dva puta. *D.* Period se smanji za manje od dva puta.

Rezultat: A.

Zadatak 348 (Frendice, maturantice)

Tijelo mase m harmonijski titra s amplitudom A. Kada se amplituda tijela poveća dva puta, što se događa s periodom titranja sustava?

A. Period se poveća dva puta. *B.* Period se poveća za $\sqrt{2}$.
C. Period se smanji dva puta. *D.* Period se ne mijenja.

Rješenje 348

m, A, T = ?

Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti period titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdje je m masa tijela ovješeno o elastičnu oprugu.
Iz formule vidi se da period ne ovisi o amplitudi.
Odgovor je pod D.

Vježba 348

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 349 (Josip, maturant)

Tijelo harmonijski titra amplitudom 10 cm i u 12 s učini jedan potpuni titraj. Za koje će najkraće vrijeme tijelo od ravnotežnog položaja doći u položaj s elongacijom 5 cm?

Rješenje 349

A = 10 cm, T = 12 s, x = 5 cm, t = ?

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra, mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T perioda (vrijeme jednog titraja), t vrijeme titranja.

$$x = A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} \Rightarrow A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = x \Rightarrow A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = x \; / \cdot \frac{1}{A} \Rightarrow \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{x}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{5 \; cm}{10 \; cm} \Rightarrow \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{5 \; cm}{10 \; cm} \Rightarrow \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{\pi}{6} \; / \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow t = \frac{T}{12} = \frac{12 \; s}{12} = 1 \; s.$$

Vježba 349

Tijelo harmonijski titra amplitudom 20 cm i u 12 s učini jedan potpuni titraj. Za koje će najkraće vrijeme tijelo od ravnotežnog položaja doći u položaj s elongacijom 10 cm?

Rezultat: 1 s.

Zadatak 350 (Willy, gimnazija)

Za koliko treba produžiti njihalo duljine L da mu period u dizalu koje se uzdiže ubrzanjem a ostane jednak? (ubrzanje slobodnog pada g)

$$A.\ \Delta L = L\cdot\frac{g}{a} \qquad B.\ \Delta L = L\cdot\frac{a}{g} \qquad C.\ \Delta L = L\cdot\frac{g+a}{g} \qquad D.\ \Delta L = L\cdot\frac{g-a}{a}$$

Rješenje 350

L, a, g, ΔL = ?

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

U sustavu koji se uzdiže ubrzanjem a ukupno ubrzanje iznosi g + a.

Ako njihalo, u dizalu koje se uzdiže ubrzanjem a, produžimo za ΔL, njegov period iznosit će

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L+\Delta L}{g+a}}.$$

Prema uvjetu zadatka taj period treba ostati jednak periodu njihala duljine L u dizalu koje miruje ili se jednoliko giba.

$$T_\circ = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

$$T = T_\circ \;\Rightarrow\; 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L+\Delta L}{g+a}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}} \;\Rightarrow\; 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L+\Delta L}{g+a}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}} \;/\cdot\frac{1}{2\cdot\pi} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{L+\Delta L}{g+a}} = \sqrt{\frac{L}{g}} \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{L+\Delta L}{g+a}} = \sqrt{\frac{L}{g}} \;/^2 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{\frac{L+\Delta L}{g+a}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L+\Delta L}{g+a} = \frac{L}{g} \;\Rightarrow\; \frac{L+\Delta L}{g+a} = \frac{L}{g} \;/\cdot g\cdot(g+a) \;\Rightarrow\; g\cdot(L+\Delta L) = L\cdot(g+a) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\cdot L + g\cdot\Delta L = L\cdot g + L\cdot a \;\Rightarrow\; g\cdot L + g\cdot\Delta L = L\cdot g + L\cdot a \;\Rightarrow\; g\cdot\Delta L = L\cdot a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\cdot\Delta L = L\cdot a \;/\cdot\frac{1}{g} \;\Rightarrow\; \Delta L = L\cdot\frac{a}{g}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 350

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 351 (Willy, gimnazija)

Starinski sat s njihalom od mesinga pokazuje točno vrijeme pri temperaturi t_1. Kako će se ponašati sat i koliko će kasniti ili raniti kada se temperatura poveća na t_2 tijekom vremena σ. Koeficijent linearnog rastezanja mesinga je β. Pretpostavite da je sat jednostavno njihalo.

Rješenje 351

t_1, t_2, σ, β, $\Delta T = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Kad štapu nekog čvrstog tijela, koji prema dogovoru pri 0 °C ima duljinu l_0, povisimo temperaturu za t (od 0 °C do t), on će se produljiti za:

$$\Delta l = \beta \cdot l_\circ \cdot t,$$

gdje je β koeficijent linearnog rastezanja koji se definira izrazom:

$$\beta = \frac{l_t - l_\circ}{l_\circ \cdot t}.$$

Iz izraza za β slijedi da će nakon zagrijavanja duljina štapa biti jednaka:

$$l_t = l_\circ \cdot (1 + \beta \cdot t).$$

Periodi njihala su:

- na temperaturi t_1

$$T_\circ = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L_\circ}{g}}$$

- na temperaturi t_2

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Razlika pri svakom titraju iznosi:

$$\Delta T = T - T_\circ.$$

Računamo izgubljeno vrijeme tijekom svakog perioda T_0.

$$\frac{\Delta T}{T_\circ} = \frac{T - T_\circ}{T_\circ} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \frac{T}{T_\circ} - \frac{T_\circ}{T_\circ} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \frac{T}{T_\circ} - \frac{T_\circ}{T_\circ} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \frac{T}{T_\circ} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L_\circ}{g}}} - 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L_\circ}{g}}} - 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \frac{\sqrt{\frac{L}{g}}}{\sqrt{\frac{L_\circ}{g}}} - 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \sqrt{\frac{\frac{L}{g}}{\frac{L_\circ}{g}}} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \sqrt{\frac{\frac{L}{g}}{\frac{L_\circ}{g}}} - 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \sqrt{\frac{L}{L_\circ}} - 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \sqrt{\frac{L_\circ \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)}{L_\circ}} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \sqrt{\frac{L_\circ \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)}{L_\circ}} - 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \sqrt{1 + \beta \cdot \Delta t} - 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \sqrt{1 + \beta \cdot (t_2 - t_1)} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T_\circ} = \sqrt{1 + \beta \cdot (t_2 - t_1)} - 1 \quad / \cdot T_\circ \Rightarrow \Delta T = \left(\sqrt{1 + \beta \cdot (t_2 - t_1)} - 1\right) \cdot T_\circ.$$

Za vrijeme σ to iznosi:

$$\Delta T = \left(\sqrt{1 + \beta \cdot (t_2 - t_1)} - 1\right) \cdot \sigma.$$

Vježba 351

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 352 (Martina, gimnazija)

Na elastičnoj opruzi obješena su jedan ispod drugoga dva utega mase $m_2 = 2$ kg i $m_1 = 1$ kg. Nađite početnu akceleraciju utega mase m_2 u slučaju da se u položaju ravnoteže prekine veza i drugi uteg mase m_1 otpadne. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m / s^2)

$$A.\ 3.72\ \frac{m}{s^2} \qquad B.\ 3.52\ \frac{m}{s^2} \qquad C.\ 4.91\ \frac{m}{s^2} \qquad D.\ 3.84\ \frac{m}{s^2} \qquad E.\ 4.63\ \frac{m}{s^2}$$

Rješenje 352

$m_2 = 2$ kg, $m_1 = 1$ kg, $g = 9.81$ m / s^2, $a = ?$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Elastična sila je

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x},$$

gdje je x pomak iz položaja ravnoteže (elongacije), a k konstanta opruge. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. Znak minus u tom izrazu možemo izostaviti kada nas zanima samo veličina sile, a ne njezin smjer.

$$F = k \cdot x.$$

Ako su na opruzi obješena oba utega tada je amplituda s_2.

$$\left(m_1 + m_2\right) \cdot g = k \cdot s_2.$$

Kada uteg mase m_1 otpadne amplituda je s_1.

$$m_2 \cdot g = k \cdot s_1.$$

Iz sustava jednadžba dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} \left(m_1 + m_2\right) \cdot g = k \cdot s_2 \\ m_2 \cdot g = k \cdot s_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \left(m_1 + m_2\right) \cdot g - m_2 \cdot g = k \cdot s_2 - k \cdot s_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot g + m_2 \cdot g - m_2 \cdot g = k \cdot \left(s_2 - s_1\right) \Rightarrow m_1 \cdot g + m_2 \cdot g - m_2 \cdot g = k \cdot \left(s_2 - s_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot g = k \cdot \left(s_2 - s_1\right).$$

Prema drugom Newtonovu poučku je

$$m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - k \cdot \left(s_2 - s_1\right) \Rightarrow \left[m_1 \cdot g = k \cdot \left(s_2 - s_1\right)\right] \Rightarrow m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \ /: m_2 \Rightarrow a = g - \frac{m_1}{m_2} \cdot g \Rightarrow a = g \cdot \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) = 9.81\ \frac{m}{s^2} \cdot \left(1 - \frac{1\ kg}{2\ kg}\right) =$$

$$=4.91\frac{m}{s^2}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 352

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 353 (Nino, tehnička škola)

Bakrenu žicu duljine 5 m presjeka 2 mm^2 opteretimo silom od 4 N. Koliko je produljenje? (modul elastičnosti za bakar E = 100 GPa)

$A.\ 0.01\ mm \qquad B.\ 0.1\ mm \qquad C.\ 1\ mm \qquad D.\ 5\ mm$

Rješenje 353

$l = 5$ m, $S = 2$ mm$^2 = 2 \cdot 10^{-6}$ m^2, $F = 4$ N, $E = 100$ GPa $= 1 \cdot 10^{11}$ Pa, $\Delta l = ?$

Elastična sila nastaje pri deformacijama tijela. Za žice, šipke, cijevi i sl. vrijedi:

$$\Delta l=\frac{l}{E}\cdot\frac{F}{S},$$

gdje je Δl mala promjena duljine l, E modul elastičnosti ovisan o vrsti materijala, S površina poprečnog presjeka, l duljina.

$$\Delta l=\frac{l}{E}\cdot\frac{F}{S}=\frac{5\ m}{1\cdot 10^{11}\ Pa}\cdot\frac{4\ N}{2\cdot 10^{-6}\ m^2}=1\cdot 10^{-4}\ m=1\cdot 10^{-1}\ mm=0.1\ mm.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 353

Bakrenu žicu duljine 1 m presjeka 1 mm^2 opteretimo silom od 10 N. Koliko je produljenje? (modul elastičnosti za bakar E = 100 GPa)

$A.\ 0.01\ mm \qquad B.\ 0.1\ mm \qquad C.\ 1\ mm \qquad D.\ 5\ mm$

Rezultat: B.

Zadatak 354 (Miroslav, tehnička škola)

Dva njihala počinju istodobno njihati. Za prvih 20 titraja prvog njihala drugo njihalo učini 15 titraja. Koliki je omjer duljina ovih njihala?

$A.\ \frac{3}{5} \qquad B.\ \frac{9}{16} \qquad C.\ \frac{4}{3} \qquad D.\ \frac{3}{4}$

Rješenje 354

$20 \cdot T_1 = 15 \cdot T_2$, $\quad \frac{l_1}{l_2}=?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

$$20\cdot T_1=15\cdot T_2 \Rightarrow \left[T_1=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}\ ,\ T_2=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_2}{g}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 15 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow 40 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 30 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 30 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \; / \cdot \frac{1}{10 \cdot \pi} \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \; /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot \frac{l_1}{g} = 9 \cdot \frac{l_2}{g} \Rightarrow 16 \cdot \frac{l_1}{g} = 9 \cdot \frac{l_2}{g} \; / \cdot \frac{g}{16 \cdot l_2} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{9}{16}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 354

Dva njihala počinju istodobno njihati. Za prvih 28 titraja prvog njihala drugo njihalo učini 21 titraja. Koliki je omjer duljina ovih njihala?

$$A. \frac{3}{5} \qquad B. \frac{9}{16} \qquad C. \frac{4}{3} \qquad D. \frac{3}{4}$$

Rezultat: B.

Zadatak 355 (Matija, maturant)

Uteg se objesi na oprugu i ona se produži za 5 cm. Za koliko će se skratiti opruga, ako je opruga s utegom obješena na strop dizala koje se spušta ubrzanjem 3 m / s^2? (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2)

$$A. \, 1.53 \, cm \qquad B. \, 3.07 \, cm \qquad C. \, 5.00 \, cm \qquad D. \, 0.47 \, cm$$

Rješenje 355

s_1 = 5 cm = 0.05 m, a = 3 m / s^2, g = 9.81 m / s^2, Δs = ?

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.
Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus. Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge.
Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a, neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju – a . U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila **– m · a** . Takvu silu zovemo inercijskom silom.
Sila koja djeluje na oprugu je težina utega.
Kada se uteg mase m objesi na oprugu onda je

$$m \cdot g = k \cdot s_1.$$

Kada se opruga s utegom objesi na strop dizala koje se spušta ubrzanjem a onda je

$$m \cdot (g - a) = k \cdot s_2.$$

Imamo:

$$\left.\begin{matrix} m \cdot g = k \cdot s_1 \\ m \cdot (g - a) = k \cdot s_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k \cdot s_1 = m \cdot g \\ k \cdot s_2 = m \cdot (g - a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{k \cdot s_2}{k \cdot s_1} = \frac{m \cdot (g - a)}{m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k \cdot s_2}{k \cdot s_1} = \frac{m \cdot (g - a)}{m \cdot g} \Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{g - a}{g} \Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{g - a}{g} \; / \cdot s_1 \Rightarrow s_2 = \frac{g - a}{g} \cdot s_1.$$

Opruga se skrati za

$$\Delta s = s_1 - s_2 \Rightarrow \Delta s = s_1 - \frac{g - a}{g} \cdot s_1 \Rightarrow \Delta s = s_1 \cdot \left(1 - \frac{g - a}{g}\right) \Rightarrow \Delta s = s_1 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{g - a}{g}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = s_1 \cdot \frac{g - (g - a)}{g} \Rightarrow \Delta s = s_1 \cdot \frac{g - g + a}{g} \Rightarrow \Delta s = s_1 \cdot \frac{g - g + a}{g} \Rightarrow \Delta s = s_1 \cdot \frac{a}{g} =$$

$$= 0.05 \; m \cdot \frac{3 \; \frac{m}{s^2}}{9.81 \; \frac{m}{s^2}} = 0.0153 \; m = 1.53 \; cm.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 355

Uteg se objesi na oprugu i ona se produži za 8 cm. Za koliko će se skratiti opruga, ako je opruga s utegom obješena na strop dizala koje se spušta ubrzanjem 3 m / s^2? (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2)

$A.\; 1.93 \; cm \qquad B.\; 2.45 \; cm \qquad C.\; 4.05 \; cm \qquad D.\; 4.95 \; cm$

Rezultat: B.

Zadatak 356 (Leon, maturant)

Tijelo harmonički titra. Period titranja je 8 s, a masa tijela 5 kg. Kolika je konstanta opruge?

$A.\; 0.49 \; \frac{N}{m} \qquad B.\; 5.4 \; \frac{N}{m} \qquad C.\; 3.1 \; \frac{N}{m} \qquad D.\; 0.7 \; \frac{N}{m}$

Rješenje 356

T = 8 s, m = 5 kg, k = ?

Period harmoničkog titranja je

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

gdje je m masa tijela koje titra zbog elastične sile opruge, k konstanta opruge.

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{m}{k}} \; /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 = \frac{m}{k} \Rightarrow \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{m}{k} \Rightarrow \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{m}{k} \; / \cdot k \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \Rightarrow k = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} =$$

$$= 5 \; kg \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{(8 \; s)^2} = 3.1 \; \frac{N}{m}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 356

Tijelo harmonički titra. Period titranja je 16 s, a masa tijela 20 kg. Kolika je konstanta opruge?

$$A.\ 0.49\ \frac{N}{m} \qquad B.\ 5.4\ \frac{N}{m} \qquad C.\ 3.1\ \frac{N}{m} \qquad D.\ 0.7\ \frac{N}{m}$$

Rezultat: C.

Zadatak 357 (Vjeko, tehnička škola)

Materijalna točka titra po zakonu $s(t) = 0.2\ m \cdot \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$, gdje je s izraženo u metrima, a t u sekundama. Odredite:

- amplitudu
- početnu fazu
- period titranja
- trenutak kada je faza titranja jednaka $\frac{\pi}{2}$
- elongaciju u tom trenutku.

Rješenje 357

$$s(t) = 0.2\ m \cdot \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right), \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad A = ?, \quad \varphi_0 = ?, \quad T = ?, \quad t_1 = ?, \quad s_1 = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · y ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost y od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), ω kutna (kružna) frekvencija, t vrijeme titranja. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija y mijenja se s vremenom

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_\circ),$$

gdje je φ_0 početni fazni kut, $\omega \cdot t + \varphi_0 = \varphi$ faza titranja u trenutku t, φ_0 faza u trenutku t = 0. T vrijeme jednog titraja ili perioda i ω kutna frekvencija povezani su formulom

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}.$$

Usporedbom općeg oblika jednadžbe harmoničkog titranja i zadane jednadžbe vidi se:

$$\left.\begin{array}{l} s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_\circ) \\ s(t) = 0.2\ m \cdot \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 0.2\ m \\ \omega = \pi\ \frac{1}{s} \\ \varphi_\circ = \frac{\pi}{4} \end{array}\right\}.$$

Period titranja iznosi:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi\ \frac{1}{s}} = \frac{2 \cdot \cancel{\pi}}{\cancel{\pi}\ \frac{1}{s}} = 2\ s.$$

Računamo t_1 kada je faza titranja jednaka $\frac{\pi}{2}$.

$$\omega \cdot t_1 + \varphi_\circ = \varphi \Rightarrow \omega \cdot t_1 = \varphi - \varphi_\circ \Rightarrow \omega \cdot t_1 = \varphi - \varphi_\circ \ / \cdot \frac{1}{\omega} \Rightarrow t_1 = \frac{\varphi - \varphi_\circ}{\omega} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{\pi \frac{1}{s}} = \frac{1}{4} \; s.$$

Tada je elongacija s_1 jednaka:

$$s_1 = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t_1 + \varphi_\circ\right) \Rightarrow s_1 = 0.2 \; m \cdot \sin\left(\pi \; \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{4} \; s + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow s_1 = 0.2 \; m \cdot \sin\left(\pi \; \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{4} \; s + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_1 = 0.2 \; m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow s_1 = 0.2 \; m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow s_1 = 0.2 \; m \cdot 1 \Rightarrow s_1 = 0.2 \; m = A.$$

Vježba 357

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 358 (Ivana, gimnazija)

Materijalna točka harmonički titra amplitudom 4 cm tako da maksimalna kinetička energija iznosi $6 \cdot 10^{-7}$ J. Odredite udaljenost od ravnotežnog položaja na kojoj će na točku djelovati sila od $1.5 \cdot 10^{-5}$ N.

A. 2 *cm* *B.* 3 *cm* *C.* 3.5 *cm* *D.* 1 *cm*

Rješenje 358

$A = 4$ cm $= 0.04$ m, $E_{km} = 6 \cdot 10^{-7}$ J, $F = 1.5 \cdot 10^{-5}$ N, $x = ?$

Titranje je gibanje kod kojeg tijelo stalno prolazi, gibajući se u dvama suprotnim smjerovima, isti dio krivulje ili pravca. Udaljenost od položaja ravnoteže naziva se elongacija x. Najveća elongacija je amplituda A. Položaj ravnoteže je položaj u kojem bi tijelo mirovalo. Kada tijelo titra, u tom je položaju najmanja potencijalna energija E_p, a najveća kinetička energija E_k. Zbroj tih dviju energija je stalan i jednak najvećoj potencijalnoj ili najvećoj kinetičkoj energiji.
Elastična opruga produžena za x ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je k konstanta opruge.
Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus. Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti.
Maksimalna potencijalna energija, a ujedno i ukupna energija oscilatora (opruge) je

$$E_{pm} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2.$$

Budući da je maksimalna kinetička energija jednaka po iznosu maksimalnoj potencijalnoj energiji, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} E_{pm} = E_{km} \\ E_{pm} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_{km} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = E_{km} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = E_{km} \; / \cdot \frac{2}{A^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 \cdot E_{km}}{A^2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \; J}{(0.04 \; m)^2} = 7.5 \cdot 10^{-4} \; \frac{N}{m}.$$

Tada sila F djeluje na udaljenosti

$$F = k \cdot x \Rightarrow k \cdot x = F \Rightarrow k \cdot x = F \;/ \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow x = \frac{F}{k} = \frac{1.5 \cdot 10^{-5}\ N}{7.5 \cdot 10^{-4}\ \frac{N}{m}} = 0.02\ m = 2\ cm.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 358

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 359 (Nives, gimnazija; Miroslav, tehnička škola)

Tijelo ukupne energije E titra na opruzi oko ravnotežnog položaja (x = 0) s amplitudom A. Koliko iznosi kinetička energija tijela kada se nalazi na udaljenosti $x = \frac{1}{2} \cdot A$?

$$A.\ \frac{1}{3} \cdot E \qquad B.\ \frac{1}{2} \cdot E \qquad C.\ \frac{2}{3} \cdot E \qquad D.\ \frac{3}{4} \cdot E$$

Rješenje 359

E, A, $x = \frac{1}{2} \cdot A$, $E_k = ?$

Titranje je gibanje kod kojeg tijelo stalno prolazi, gibajući se u dvama suprotnim smjerovima, isti dio krivulje ili pravca. Udaljenost od položaja ravnoteže naziva se elongacija x. Najveća elongacija je amplituda A. Položaj ravnoteže je položaj u kojem bi tijelo mirovalo. Kada tijelo titra, u tom je položaju najmanja potencijalna energija E_p, a najveća kinetička energija E_k. Zbroj tih dviju energija je stalan i jednak najvećoj potencijalnoj E_{pm} ili najvećoj kinetičkoj energiji E_{km}.

$$E_k + E_p = E_{pm} = E \quad , \quad E_k + E_p = E_{km} = E.$$

Dakle, ukupna energija u svakom trenutku je zbroj energija E_k i E_p.
Elastična opruga produžena za x ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je k konstanta opruge.
Kada se tijelo nalazi na udaljenosti x = A ima maksimalnu potencijalnu energiju E_{pm}, a kinetička energija je nula. Tada je ukupna energija jednaka

$$E = 0 + E_{pm} \Rightarrow E = E_{pm} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = E \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = E \;/ \cdot \frac{2}{A^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 \cdot E}{A^2}.$$

Tako smo odredili konstantu opruge.

Kada se tijelo nalazi na udaljenosti $x = \frac{1}{2} \cdot A$ ima potencijalnu energiju $E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A\right)^2$ i kinetičku energiju E_k. Ukupna energija u svakom trenutku je zbroj energija E_k i E_p.

$$E_k + E_p = E \Rightarrow E_k = E - E_p \Rightarrow E_k = E - \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A\right)^2 \Rightarrow \left[k = \frac{2 \cdot E}{A^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = E - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot E}{A^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot A^2 \Rightarrow E_k = E - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot E}{A^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot A^2 \Rightarrow E_k = E - \frac{1}{4} \cdot E \Rightarrow E_k = \frac{3}{4} \cdot E.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 359

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 360 (Siniša, maturant)

Njihalo određene duljine ima period 1.753 s, a produženo za 84 cm ima period 2.54 s. Odredite ubrzanje sile teže.

Rješenje 360

$T_1 = 1.753$ s, $\Delta l = 84$ cm $= 0.84$ m, $T_2 = 2.54$ s, $g = ?$

Period T je vrijeme jednog ophoda (titraja).

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{T_1}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ \frac{T_2}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{T_1}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l_1}{g}} \ /^2 \\ \frac{T_2}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l_2}{g}} \ /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{l_1}{g} \\ \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{l_2}{g} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{l_1}{g} \ / \cdot g \\ \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{l_2}{g} \ / \cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g \cdot \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} = l_1 \\ g \cdot \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} = l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} - g \cdot \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} = l_2 - l_1 \Rightarrow \left[l_2 - l_1 = \Delta l \right] \Rightarrow g \cdot \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} - g \cdot \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} = \Delta l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(T_2^2 - T_1^2\right) = \Delta l \Rightarrow \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(T_2^2 - T_1^2\right) = \Delta l \ / \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \Rightarrow g = \frac{\Delta l \cdot 4 \cdot \pi^2}{T_2^2 - T_1^2} =$$

$$= \frac{0.84 \ m \cdot 4 \cdot \pi^2}{(2.54 \ s)^2 - (1.753 \ s)^2} = 9.81 \ \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 360

Odmor!

Rezultat: …