Zadatak 321 (Marko, tehnička škola)

Izvor vala titra prema jednadžbi $x = 2\ cm \cdot \sin\left(7.4\ s^{-1} \cdot t\right)$. Val se širi duž žice brzinom 15 m / s. Kolika je razlika u fazi između dvaju točaka vala međusobno udaljenih 2 m?

Rješenje 321

$x = 2\ cm \cdot \sin\left(7.4\ s^{-1} \cdot t\right)$, v = 15 m / s, Δx = 2 m, Δφ = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \quad , \quad x = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t\right),$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T perioda (vrijeme jednog titraja), t vrijeme titranja. Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Vrijede formule:

$$\lambda = \mathrm{v} \cdot T \quad , \quad \lambda = \frac{\mathrm{v}}{\nu},$$

gdje je v brzina širenja vala, λ valna duljina, T perioda (vrijeme jednog titraja), ν frekvencija (broj ophoda (titraja) u jedinici vremena, u 1 sekundi).
Razlika faza dviju točaka udaljenih za $\Delta x = x_2 - x_1$ određena je izrazom:

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{\lambda}.$$

1.inačica

Izračunamo periodu T.

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ x = 2\ cm \cdot \sin\left(7.4\ s^{-1} \cdot t\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} = 7.4\ s^{-1} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} = 7.4\ s^{-1} \quad / \cdot \frac{T}{7.4\ s^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{7.4\ s^{-1}} = T \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{7.4\ s^{-1}} = 0.85\ s.$$

Pomak u fazi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \mathrm{v} \cdot T \\ \Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{\mathrm{v} \cdot T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2\ m}{15\ \frac{m}{s} \cdot 0.85\ s} = 0.99\ rad.$$

2.inačica

Izračunamo frekvenciju ν.

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t\right) \\ x = 2\ cm \cdot \sin\left(7.4\ s^{-1} \cdot t\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \nu = 7.4\ s^{-1} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \nu = 7.4\ s^{-1} \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{7.4\ s^{-1}}{2 \cdot \pi} = 1.18\ s^{-1}.$$

Pomak u fazi iznosi:

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \frac{v}{\nu} \\ \Delta\varphi &= \frac{2\cdot\pi\cdot\Delta x}{\lambda}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\cdot\pi\cdot\Delta x}{\frac{v}{\nu}} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\cdot\pi\cdot\Delta x\cdot\nu}{v} = \frac{2\cdot\pi\cdot 2\ m\cdot 1.18\ s^{-1}}{15\ \frac{m}{s}} = 0.99\ rad.$$

Vježba 321

Izvor vala titra prema jednadžbi $x = 2\ cm\cdot\sin\left(\pi\ s^{-1}\cdot t\right)$. Val se širi duž žice brzinom 15 m / s. Kolika je razlika u fazi između dvaju točaka vala međusobno udaljenih 2 m?

Rezultat: 0.42 rad.

Zadatak 322 (Lana, gimnazija)

Žica gitare ima frekvenciju 440 Hz. Kolika će biti frekvencija žice ako napetost žice povećamo za 10%?

Rješenje 322

$\nu = 440$ Hz, F, p = 10% = 0.1, $\nu_1 = ?$

Osnovna frekvencija kojom žica titra jednaka je

$$\nu = \frac{1}{2\cdot L}\cdot\sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

gdje je L duljina žice, F napetost žice, μ omjer mase i duljine žice.
Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.
Na primjer,

$$9\ \% = \frac{9}{100} \quad , \quad 81\ \% = \frac{81}{100} \quad , \quad 4.5\ \% = \frac{4.5}{100} \quad , \quad 547\ \% = \frac{547}{100} \quad , \quad p\ \% = \frac{p}{100}.$$

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100}\cdot x.$$

Kako zapisati da se x poveća za p% ?

$$x + \frac{p}{100}\cdot x.$$

Napetost žice povećana je za 10% i sada iznosi

$$F_1 = F + p\cdot F \Rightarrow F_1 = F + 0.1\cdot F \Rightarrow F_1 = 1.1\cdot F.$$

Gledamo omjer.

$$\frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\frac{1}{2\cdot L}\cdot\sqrt{\frac{F_1}{\mu}}}{\frac{1}{2\cdot L}\cdot\sqrt{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\frac{1}{2\cdot L}\cdot\sqrt{\frac{F_1}{\mu}}}{\frac{1}{2\cdot L}\cdot\sqrt{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\sqrt{\frac{F_1}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu} = \sqrt{\frac{\frac{F_1}{\mu}}{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu} = \sqrt{\frac{\frac{1.1\cdot F}{\mu}}{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu} = \sqrt{\frac{\frac{1.1\cdot F}{\mu}}{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu} = \sqrt{1.1} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu} = \sqrt{1.1}\ /\cdot\nu \Rightarrow \nu_1 = \nu\cdot\sqrt{1.1} = 440\ Hz\cdot\sqrt{1.1} = 461.48\ Hz.$$

Vježba 322

Žica gitare ima frekvenciju 440 Hz. Kolika će biti frekvencija žice ako napetost žice povećamo za 15%?

Rezultat: 471.85 Hz.

Zadatak 323 (Miroslav, gimnazija)

Tijelo mase 1 kg harmonijski titra. Ovisnost ubrzanja tijela o vremenu dana je jednadžbom $a = \left(24\ m \cdot s^{-2}\right) \cdot \sin\left(4\ s^{-1} \cdot t\right)$. Kolika je kinetička energija tijela u trenutku kada mu je elongacija 0.75 m?

Rješenje 323

m = 1 kg, $a = \left(24\ m \cdot s^{-2}\right) \cdot \sin\left(4\ s^{-1} \cdot t\right)$, x = 0.75 m, E_k = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna brzina v_0 tijela koje harmonički titra

$$v_{\circ} = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A amplituda (najveća udaljenost od položaja ravnoteže), T perioda (vrijeme jednog titraja).
Akceleracija tijela koje titra dana je formulom

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

gdje je ω kutna brzina

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}.$$

Negativan predznak pokazuje da su elongacija (udaljenost tijela od položaja ravnoteže) i ubrzanje suprotnog smjera.
Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Elastična potencijalna energija

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\omega \cdot x)^2,$$

gdje je m masa tijela koje titra, ω kutna brzina, x elongacija.
Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Brzina v čestice iznosi:

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2},$$

gdje je ω kutna brzina, A amplituda (najveća udaljenost od položaja ravnoteže), x elongacija (udaljenost tijela od položaja ravnoteže).

1.inačica

Usporedit ćemo opću formulu za akceleraciju tijela koje titra sa zadanom jednadžbom i naći A i ω.

$$\left.\begin{array}{l} a = \omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ a = \left(24\ m \cdot s^{-2}\right) \cdot \sin\left(4\ s^{-1} \cdot t\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ a = \left(24\ m \cdot s^{-2}\right) \cdot \sin\left(4\ s^{-1} \cdot t\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \omega^2 \cdot A = 24 \\ \omega = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4^2 \cdot A = 24 \Rightarrow 16 \cdot A = 24 \Rightarrow 16 \cdot A = 24\ /:16 \Rightarrow A = 1.5\ m.$$

Računamo periodu T.

$$\omega=\frac{2\cdot\pi}{T} \Rightarrow \omega=\frac{2\cdot\pi}{T}\ /\cdot\frac{T}{\omega} \Rightarrow T=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\frac{2\cdot\pi}{4\ \frac{1}{s}}=\frac{2\cdot\pi}{4}\ s=\frac{\pi}{2}\ s.$$

Maksimalna brzina tijela koje titra iznosi:

$$v_\circ=\frac{2\cdot\pi\cdot A}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot 1.5\ m}{\frac{\pi}{2}\ s}=\frac{2\cdot\pi\cdot 1.5\ m}{\frac{\pi}{2}\ s}=6\ \frac{m}{s}.$$

Ukupna energija E sastoji se od kinetičke energije i elastične potencijalne energije.

$$E=E_k+E_{ep}.$$

Kada čestica ima maksimalnu brzinu, ima i maksimalnu kinetičku energiju. Ta je energija ukupna energija jer je elastična potencijalna jednaka nuli.

$$E=E_k+E_{ep} \Rightarrow E=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_\circ^2+0=\frac{1}{2}\cdot 1\ kg\cdot\left(6\ \frac{m}{s}\right)^2=18\ J.$$

Elastična potencijalna energije tijela u trenutku elongacije x je

$$E_{ep}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot(\omega\cdot x)^2=\frac{1}{2}\cdot 1\ kg\cdot\left(4\ \frac{1}{s}\cdot 0.75\ m\right)^2=4.5\ J.$$

Tada je kinetička energija jednaka:

$$E_k=E-E_{ep}=18\ J-4.5\ J=13.5\ J.$$

2.inačica

Usporedit ćemo opću formulu za akceleraciju tijela koje titra sa zadanom jednadžbom i naći A i ω.

$$\left.\begin{array}{l} a=\omega^2\cdot A\cdot\sin(\omega\cdot t) \\ a=\left(24\ m\cdot s^{-2}\right)\cdot\sin\left(4\ s^{-1}\cdot t\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=\omega^2\cdot A\cdot\sin(\omega\cdot t) \\ a=\left(24\ m\cdot s^{-2}\right)\cdot\sin\left(4\ s^{-1}\cdot t\right)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \omega^2\cdot A=24 \\ \omega=4\ \frac{1}{s}\end{array}\right\} \Rightarrow 4^2\cdot A=24 \Rightarrow 16\cdot A=24 \Rightarrow 16\cdot A=24\ /:16 \Rightarrow A=1.5\ m.$$

Sada je:

$$v=\omega\cdot\sqrt{A^2-x^2} \Rightarrow v=\omega\cdot\sqrt{A^2-x^2}\ /^2 \Rightarrow v^2=\omega^2\cdot\left(A^2-x^2\right) \Rightarrow \left[E_k=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2\cdot\left(A^2-x^2\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\ kg\cdot\left(4\ \frac{1}{s}\right)^2\cdot\left((1.5\ m)^2-(0.75\ m)^2\right)=13.5\ J.$$

Vježba 323

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 324 (Goran, gimnazija)

Lopta visi na niti duljine 2 m i otklonjena je za kut od 4º. Odredite njezinu maksimalnu brzinu. (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2)

Rješenje 324

l = 2 m, α = 4º, g = 9.81 m / s^2, v = ?

Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna brzina v_0 tijela koje harmonički titra

$$v_\circ = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A amplituda (najveća udaljenost od položaja ravnoteže), T perioda (vrijeme jednog titraja).
Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.
Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

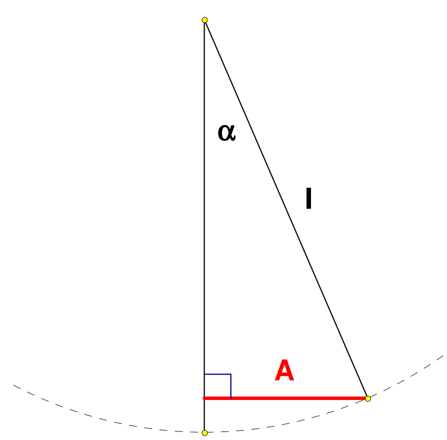
$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Mehanička energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije u mehaničkom sustavu, tj. energija koja ovisi o položaju i gibanju tijela zbog djelovanja sile.
U zatvorenome sustavu zbroj potencijalne i kinetičke energije je konstantan.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

1.inačica



Perioda njihanja lopte je

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

a **zbog malog kuta otklona** (male amplitude) od ravnotežnog položaja amplituda se može naći pomoću funkcije sinus.

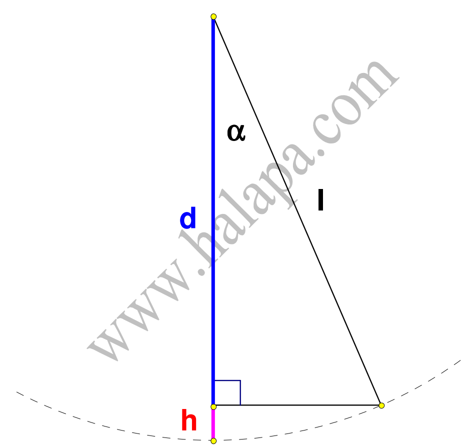
$$\sin\alpha = \frac{A}{l} \Rightarrow \frac{A}{l} = \sin\alpha \Rightarrow \frac{A}{l} = \sin\alpha \; / \cdot l \Rightarrow A = l \cdot \sin\alpha.$$

Kada lopta prolazi ravnotežnim položajem ima maksimalnu brzinu.

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot l \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow v = \frac{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot l \cdot \sin\alpha}{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow v = \frac{l \cdot \sin\alpha}{\sqrt{\frac{l}{g}}} =$$

$$= \frac{2\ m \cdot \sin 4^{\circ}}{\sqrt{\frac{2\ m}{9.81\ \frac{m}{s^2}}}} = 0.31\ \frac{m}{s}.$$

2.inačica



Sa slike vidi se:

$$\cos\alpha = \frac{d}{l} \Rightarrow \frac{d}{l} = \cos\alpha \Rightarrow \frac{d}{l} = \cos\alpha \; / \cdot l \Rightarrow d = l \cdot \cos\alpha \Rightarrow \left[\, h = l - d \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = l - l \cdot \cos\alpha \Rightarrow h = l \cdot (1 - \cos\alpha).$$

Zbog zakona očuvanja energije gravitacijska potencijalna energija lopte na visini h na koju je lopta podignuta jednaka je kinetičkoj energiji lopte kada prolazi ravnotežnim položajem maksimalnom brzinom.

$$E_{gp} = E_k \Rightarrow E_k = E_{gp} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \; / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\, h = l \cdot (1 - \cos\alpha) \,\right] \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\alpha) \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\alpha) \; / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\alpha)} = \sqrt{2 \cdot 9.81\ \frac{m}{s^2} \cdot 2\ m \cdot \left(1 - \cos 4^{\circ}\right)} = 0.31\ \frac{m}{s}.$$

Vježba 324

Lopta visi na niti duljine 4 m i otklonjena je za kut od 4º. Odredite njezinu maksimalnu brzinu. (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2)

Rezultat: 0.44 m / s.

Zadatak 325 (Goran, gimnazija)

Kuglica mase m harmonički titra s amplitudom A, a nalazi se na opruzi koeficijenta elastičnosti k. Ako na udaljenosti $0.5 \cdot A$ od položaja ravnoteže postavimo čeličnu ploču od koje će se kuglica odbiti, kolika će u tome slučaju biti njezina perioda?

Rješenje 325

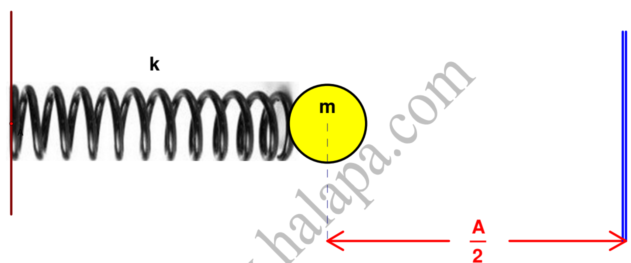
m, A, $x = 0.5 \cdot A$, k, $T_1 = ?$

Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = - k \cdot x$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T perioda (vrijeme jednog titraja), t vrijeme titranja.
Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti periodu titranja opruge

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$



Iz jednadžbe harmoničkog titranja odredit ćemo vrijeme t za koje kuglica stigne od položaja ravnoteže do ploče (do polovice amplitude).

$$\frac{1}{2} \cdot A = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \Rightarrow A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \cdot A \Rightarrow A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \cdot A \; / : A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t = \frac{\pi}{6} \; / \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow t = \frac{T}{12}.$$

Kuglica će se za jednako vrijeme t vratiti u položaj ravnoteže. Na suprotnu stranu od ravnotežnog položaja gibat će se kao da nema ploče i vratiti u položaj ravnoteže za vrijeme $\frac{1}{2} \cdot T$.

Perioda kuglice iznosi:

$$T_1 = 2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot T \Rightarrow T_1 = 2 \cdot \frac{T}{12} + \frac{1}{2} \cdot T \Rightarrow T_1 = 2 \cdot \frac{T}{12} + \frac{1}{2} \cdot T \Rightarrow T_1 = \frac{1}{6} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1+3}{6} \cdot T \Rightarrow T_1 = \frac{4}{6} \cdot T \Rightarrow T_1 = \frac{4}{6} \cdot T \Rightarrow T_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_1 = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Vježba 325

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 326 (Iva, gimnazija)

Na niti dugoj 2 m visi uteg. Uteg gurnemo iz položaja ravnoteže brzinom 0.3 m / s. Za koliko se uteg udaljio od položaja ravnoteže? (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2)

Rješenje 326

$l = 2$ m, $v_0 = 0.3$ m / s, $g = 9.81$ m / s^2, $A = ?$

Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna brzina tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A maksimalna udaljenost od položaja ravnoteže ili amplituda, T vrijeme jednog titraja ili perioda.

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} = v_0 \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} = v_0 \; / \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow A = \frac{v_0 \cdot T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \left[T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{v_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow A = \frac{v_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow A = v_0 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 0.3 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{2 \; m}{9.81 \frac{m}{s^2}}} = 0.14 \; m = 14 \; cm.$$

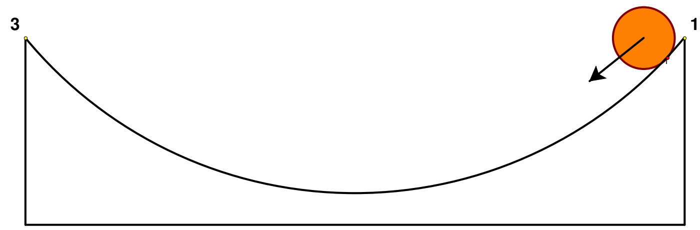
Vježba 326

Na niti dugoj 2 m visi uteg. Uteg gurnemo iz položaja ravnoteže brzinom 0.6 m / s. Za koliko se uteg udaljio od položaja ravnoteže? (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2)

Rezultat: 27 cm.

Zadatak 327 (Bero3, maturant)

Kuglica mase 400 g harmonijski titra po žlijebu prikazanome na slici između položaja 1 i 3 s amplitudom 40 cm. Put od položaja 1 do položaja 3 kuglica prijeđe za 0.5 s.



Kolika je ukupna energija kuglice?

Rješenje 327

m = 400 g = 0.4 kg, A = 40 cm = 0.4 m, t = 0.5 s, $E_u = ?$

Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna brzina tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A maksimalna udaljenost od položaja ravnoteže ili amplituda, T vrijeme jednog titraja ili perioda.
Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 .$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Mehanička energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije u mehaničkom sustavu, tj. energija koja ovisi o položaju i gibanju tijela zbog djelovanja sile.
U zatvorenome sustavu zbroj potencijalne i kinetičke energije je konstantan.
Kuglica napravi jedan titraj kada iz položaja 1 dođe u položaj 3 i vrati se natrag. Perioda T iznosi:

$$T = 2 \cdot t = 2 \cdot 0.5\ s = 1\ s.$$

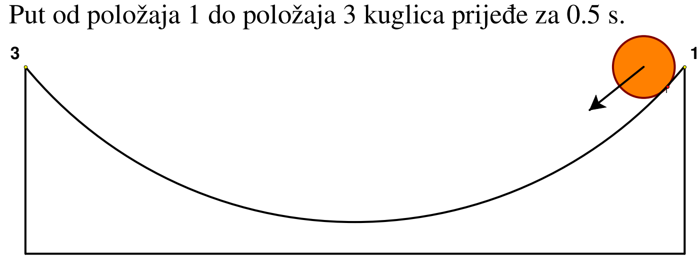
Ukupna mehanička energija (kinetička + potencijalna) ne mijenja se u vremenu. Kuglica ima najveću kinetičku energiju kada se giba maksimalnom brzinom. To je, ujedno, njezina ukupna energija.

$$\left.\begin{array}{l} v_{\circ} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \\ E_{km} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\circ}^2 \\ E_u = E_{km} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} E_{km} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\dfrac{2 \cdot \pi \cdot A}{T}\right)^2 \\ E_u = E_{km} \end{array}\right\} \Rightarrow E_u = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.4\ kg \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 0.4\ m}{1\ s}\right)^2 = 1.26\ J.$$

Vježba 327

Kuglica mase 800 g harmonijski titra po žlijebu prikazanome na slici između položaja 1 i 3 s amplitudom 50 cm. Put od položaja 1 do položaja 3 kuglica prijeđe za 0.5 s.



Kolika je ukupna energija kuglice?

Rezultat: 3.95 J.

Zadatak 328 (Bero3, maturant)

Intenzitet zvuka milijun je puta veći od intenziteta pri pragu čujnosti. Kolika je razina jakosti toga zvuka?

$$A.\ 0\ dB \qquad B.\ 6\ dB \qquad C.\ 10\ dB \qquad D.\ 60\ dB$$

Rješenje 328

$I = 10^6 \cdot I_0, \qquad L = ?$

Razina intenziteta zvuka (L) izražena u decibelima (dB) definira se izrazom

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_\circ}\right),$$

gdje intenzitet I_0 odgovara otprilike najslabijem zvuku kojeg još prosječno uho može čuti te iznosi

$$I_\circ = 10^{-12} \ \frac{W}{m^2}$$

pri frekvenciji 1 kHz. Decibel je brojčana jedinica.

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_\circ}\right) \Rightarrow L = 10 \cdot \log\left(\frac{10^6 \cdot I_\circ}{I_\circ}\right) \Rightarrow L = 10 \cdot \log\left(\frac{10^6 \cdot I_\circ}{I_\circ}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = 10 \cdot \log\left(10^6\right) \Rightarrow L = 10 \cdot 6 \Rightarrow L = 60 \ dB.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 328

Intenzitet zvuka deset je puta veći od intenziteta pri pragu čujnosti. Kolika je razina jakosti toga zvuka?

$A. \ 0 \ dB \qquad B. \ 6 \ dB \qquad C. \ 10 \ dB \qquad D. \ 60 \ dB$

Rezultat: C.

Zadatak 329 (Tina, strukovna škola)

Tijelo mase 0.1 kg harmonički titra s amplitudom 4 cm. Ako je najveće ubrzanje tijela 2 cm / s^2 njegova kinetička energija pri prolasku kroz ravnotežni položaj iznosi:

$A. \ 2 \cdot 10^{-5} \ J \qquad B. \ 4 \cdot 10^{-4} \ J \qquad C. \ 4 \cdot 10^{-6} \ J \qquad D. \ 4 \cdot 10^{-5} \ J$

Rješenje 329

m = 0.1 kg, A = 4 cm = 0.04 m, a_0 = 2 cm / s^2 = 0.02 m / s^2, E_k = ?

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna brzina v_0 tijela koje harmonički titra

$$v_\circ = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A amplituda (najveća udaljenost od položaja ravnoteže), T perioda (vrijeme jednog titraja). Maksimalna akceleracija tijela koje titra dana je formulom

$$a_\circ = \frac{v_\circ^2}{A} \Rightarrow v_\circ^2 = A \cdot a_\circ.$$

Pri prolasku kroz ravnotežni položaj tijelo, koje harmonički titra, ima maksimalnu kinetičku energiju.

$$\left.\begin{array}{l} v_\circ^2 = A \cdot a_\circ \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\circ^2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A \cdot a_\circ = \frac{1}{2} \cdot 0.1 \ kg \cdot 0.04 \ m \cdot 0.02 \ \frac{m}{s^2} = 4 \cdot 10^{-5} \ J.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 329

Tijelo mase 0.2 kg harmonički titra s amplitudom 4 cm. Ako je najveće ubrzanje tijela 1 cm / s^2 njegova kinetička energija pri prolasku kroz ravnotežni položaj iznosi:

$$A.\ 2 \cdot 10^{-5}\ J \qquad B.\ 4 \cdot 10^{-4}\ J \qquad C.\ 4 \cdot 10^{-6}\ J \qquad D.\ 4 \cdot 10^{-5}\ J$$

Rezultat: D.

Zadatak 330 (Tina, strukovna škola)

Tijelo harmonički titra amplitudom 10 cm i u 12 sekunda učini jedan potpuni titraj. Za koje će najkraće vrijeme tijelo od ravnotežnog položaja doći u položaj s elongacijom 5 cm?

$$A.\ 0.5\ s \qquad B.\ 1\ s \qquad C.\ 2\ s \qquad D.\ 3\ s$$

Rješenje 330

A = 10 cm = 0.1 m, T = 12 s, x = 5 cm = 0.05 m, t = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra, mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je x elongacija, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titraja ili perioda.

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \Rightarrow A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = x \Rightarrow A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = x \ / \cdot \frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{x}{A} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) \ / \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{T}{2 \cdot \pi} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = \frac{12\ s}{2 \cdot \pi} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{0.05\ m}{0.1\ m}\right) = \text{RAD} = 1\ s.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 330

Tijelo harmonički titra amplitudom 20 cm i u 12 sekunda učini jedan potpuni titraj. Za koje će najkraće vrijeme tijelo od ravnotežnog položaja doći u položaj s elongacijom 10 cm?

$$A.\ 0.5\ s \qquad B.\ 1\ s \qquad C.\ 2\ s \qquad D.\ 3\ s$$

Rezultat: B.

Zadatak 331 (Tomy, tehnička škola)

Uteg težak 3 N visi na jednom kraju opruge i harmonički titra periodom od 1.5 s. Kolika će biti perioda titranja utega od 12 N koji harmonički titra ovješen na istu oprugu?

$$A.\ 2\ s \qquad B.\ 3\ s \qquad C.\ 5\ s \qquad D.\ 6\ s$$

Rješenje 331

G_1 = 3 N, T_1 = 1.5 s, G_2 = 12 N, T_2 = ?

Perioda titranja dana je jednadžbom

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdje je k konstanta elastičnosti opruge, m masa tijela koje harmonički titra obješeno o elastičnu oprugu.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g \;\Rightarrow\; m = \frac{G}{g},$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_2}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_1}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{m_2}{k}}}{\sqrt{\dfrac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\dfrac{m_2}{k}}{\dfrac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\dfrac{m_2}{k}}{\dfrac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\dfrac{G_2}{g}}{\dfrac{G_1}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\dfrac{G_2}{g}}{\dfrac{G_1}{g}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{G_2}{G_1}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{G_2}{G_1}} \;/ \cdot T_1 \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{G_2}{G_1}} = 1.5\ s \cdot \sqrt{\frac{12\ N}{3\ N}} = 3\ s.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 331

Uteg težak 6 N visi na jednom kraju opruge i harmonički titra periodom od 1.5 s. Kolika će biti perioda titranja utega od 24 N koji harmonički titra ovješen na istu oprugu?

$A.\ 2\ s \qquad B.\ 3\ s \qquad C.\ 5\ s \qquad D.\ 6\ s$

Rezultat: B.

Zadatak 332 (Ajax, tehnička škola)

Dva tijela pričvršćena na opruge imaju jednaku potencijalnu energiju u polju harmoničke sile kada je jedna rastegnuta za 4 cm, a druga za 2 cm. Koliki je omjer konstanti opiranja opruga $k_1 : k_2$?

$A.\ 2:1 \qquad B.\ 1:2 \qquad C.\ 1:4 \qquad D.\ 4:1$

Rješenje 332

$E_{ep1} = E_{ep2}$, $x_1 = 4$ cm $= 0.04$ m, $x_2 = 2$ cm $= 0.02$ m, $k_1 : k_2 = ?$

Elastična opruga produžena za x ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je k konstanta elastičnosti opruge.

$$E_{ep1} = E_{ep2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot x_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot x_2^2 \;/ \cdot \frac{2}{k_2 \cdot x_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{x_2^2}{x_1^2} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \left(\frac{0.02\ m}{0.04\ m}\right)^2 \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow k_1 : k_2 = 1:4.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 332

Dva tijela pričvršćena na opruge imaju jednaku potencijalnu energiju u polju harmoničke sile kada je jedna rastegnuta za 8 cm, a druga za 4 cm. Koliki je omjer konstanti opiranja opruga $k_1 : k_2$?

$$A.\ 2:1 \qquad B.\ 1:2 \qquad C.\ 1:4 \qquad D.\ 4:1$$

Rezultat: C.

Zadatak 333 (Zvone, tehnička škola)

Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala je 3.6 s. Odredite vrijeme potrebno da se njihalo od ravnotežnog položaja udalji za pola amplitude titranja.

$$A.\ 1\ s \qquad B.\ 3.6\ s \qquad C.\ 1.8\ s \qquad D.\ 0.3\ s \qquad E.\ 7.2\ s$$

Rješenje 333

T = 3.6 s, $x = \frac{1}{2} \cdot A$, t = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T perioda (vrijeme jednog titraja), t vrijeme titranja.

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ x = \frac{1}{2} \cdot A \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \cdot A \Rightarrow A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \cdot A \ /: A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t = \frac{\pi}{6} \ / \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{T}{12} = \frac{3.6\ s}{12} = 0.3\ s.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 333

Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala je 12 s. Odredite vrijeme potrebno da se njihalo od ravnotežnog položaja udalji za pola amplitude titranja.

$$A.\ 1\ s \qquad B.\ 3.6\ s \qquad C.\ 1.8\ s \qquad D.\ 0.3\ s \qquad E.\ 7.2\ s$$

Rezultat: A.

Zadatak 334 (Natalija, tehnička škola)

Matematičko njihalo napravi 10 titraja. Drugo njihalo za isto vrijeme napravi 6 titraja. Duljine njihala razlikuju se za 16 cm. Nađite duljine njihala.

Rješenje 334

$N_1 = 10$, $N_2 = 6$, t – vrijeme jednako za oba njihala, $\Delta l = 16$ cm = 0.16 m, $l_1 = ?$, $l_2 = ?$

Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).
Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Perioda titranja T računa se po formuli

$$T = \frac{t}{N},$$

gdje je N broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t.

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = \frac{t}{N_1} \ , \ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ T_2 = \frac{t}{N_2} \ , \ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{t}{N_1} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ \frac{t}{N_2} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{t}{N_1}}{\frac{t}{N_2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{\frac{t}{N_1}}{\frac{t}{N_2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \ /^2 \Rightarrow \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow \frac{N_2^2}{N_1^2} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \right] \Rightarrow N_2^2 \cdot l_2 = N_1^2 \cdot l_1.$$

Prvo njihalo je kraće duljine jer brže titra.

$$N_2 < N_1 \Rightarrow l_2 > l_1 \Rightarrow l_2 = l_1 + \Delta l.$$

Sada je

$$\left. \begin{array}{l} N_2^2 \cdot l_2 = N_1^2 \cdot l_1 \\ l_2 = l_1 + \Delta l \end{array} \right\} \Rightarrow N_2^2 \cdot \left(l_1 + \Delta l\right) = N_1^2 \cdot l_1 \Rightarrow N_2^2 \cdot l_1 + N_2^2 \cdot \Delta l = N_1^2 \cdot l_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2^2 \cdot \Delta l = N_1^2 \cdot l_1 - N_2^2 \cdot l_1 \Rightarrow N_2^2 \cdot \Delta l = \left(N_1^2 - N_2^2\right) \cdot l_1 \Rightarrow \left(N_1^2 - N_2^2\right) \cdot l_1 = N_2^2 \cdot \Delta l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(N_1^2 - N_2^2\right) \cdot l_1 = N_2^2 \cdot \Delta l \ / \cdot \frac{1}{N_1^2 - N_2^2} \Rightarrow l_1 = \frac{N_2^2 \cdot \Delta l}{N_1^2 - N_2^2} = \frac{6^2 \cdot 0.16 \ m}{10^2 - 6^2} = 0.09 \ m = 9 \ cm.$$

Računamo l_2.

$$l_2 = l_1 + \Delta l = 9 \ cm + 16 \ cm = 25 \ cm.$$

Vježba 334

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 335 (Natalija, tehnička škola)

Tijelo mase 1 kg ovješeno je na oprugu. Ako pričvrstimo još jedno tijelo mase 100 g opruga se dodatno produži za 1 cm. Kolika je perioda titranja opruge kada je ovješeno samo prvo tijelo?

(ubrzanje slobodnog pada g = 10 m / s^2).

Rješenje 335

$m_1 = 1$ kg, $m_2 = 100g = 0.1$ kg, $\Delta x = 1$ cm $= 0.01$ m, $g = 10$ m / s^2, $T_1 = ?$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus. Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge. Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).

Elastična opruga produžena za x ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je k konstanta opruge.

Najveća kinetička energija tijela koje harmonički titra dana je jednadžbom

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, A amplituda, tj. maksimalna elongacija (udaljenost od položaja ravnoteže).

Maksimalna brzina pri harmoničkom titranju koje počinje iz položaja ravnoteže računa se pomoću izraza:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{v},$$

gdje je A amplituda, T perioda.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju translacije:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Težina tijela mase m_2 ima ulogu elastične sile F koja oprugu rastegne za Δx.

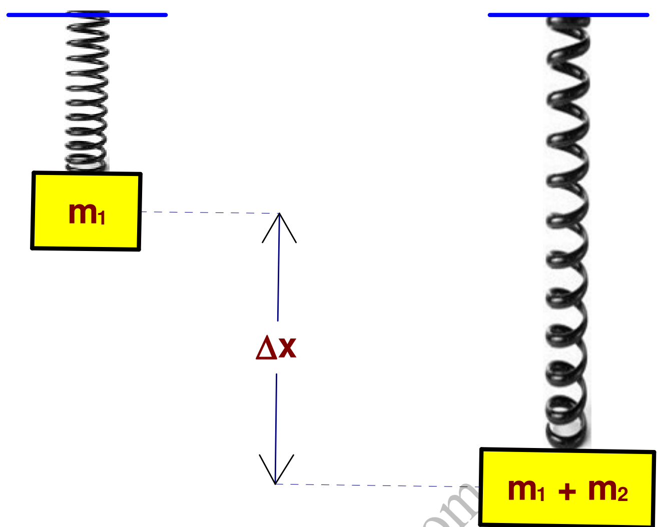
$$\left.\begin{array}{l} F = k \cdot \Delta x \\ F = G_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k \cdot \Delta x = G_2 \Rightarrow k \cdot \Delta x = m_2 \cdot g \Rightarrow k \cdot \Delta x = m_2 \cdot g \; / \cdot \frac{1}{\Delta x} \Rightarrow k = \frac{m_2 \cdot g}{\Delta x} =$$

$$= \frac{0.1\, kg \cdot 10\, \frac{m}{s^2}}{0.01\, m} = 100\, \frac{N}{m}.$$

Kada je na opruzi samo tijelo mase m_1 njegova težina ima ulogu elastične sile F koja oprugu izvede iz ravnotežnog položaja maksimalno za A (amplituda).

$$\left.\begin{array}{l} F = k \cdot A \\ F = G_1 \end{array}\right\} \Rightarrow k \cdot A = G_1 \Rightarrow k \cdot A = m_1 \cdot g \Rightarrow k \cdot A = m_1 \cdot g \; / \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow A = \frac{m_1 \cdot g}{k} =$$

$$= \frac{1\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2}}{100\,\frac{N}{m}} = 0.1\,m.$$



Maksimalna kinetička energija tijela mase m₁ jednaka je maksimalnoj elastičnoj potencijalnoj energiji tijela u položaju A. Maksimalna brzina v titranja dobije se iz zakona očuvanja energije.

$$E_k = E_{gp} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \; / \cdot \frac{2}{m_1} \Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot A^2}{m_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot A^2}{m_1} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot A^2}{m_1}} \Rightarrow v = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 0.1\,m \cdot \sqrt{\frac{100\,\frac{N}{m}}{1\,kg}} = 1\,\frac{m}{s}.$$

Perioda titranja T_1 opruge kada je ovješeno samo prvo tijelo iznosi:

$$T_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.1\,m}{1\,\frac{m}{s}} = 0.63\,s.$$

Vježba 335

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 336 (Maturantica, medicinska škola)

Kolika je ukupna razina intenziteta zvuka gudačkoga kvarteta ako svaki od četiriju instrumenata daje ton intenziteta 10^{-6} W / m^2?

Rješenje 336

n = 4, I = 10^{-6} W / m^2, L = ?

Razina intenziteta zvuka (L) izražena u decibelima (dB) definira se izrazom

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_\circ},$$

gdje intenzitet I_0 odgovara otprilike najslabijem zvuku kojeg još prosječno uho može čuti te iznosi

$$I_{\circ} = 10^{-12} \frac{W}{m^2},$$

pri frekvenciji 1 kHz. Decibel je brojčana jedinica.

Računamo razinu intenziteta zvuka L:

$$L = 10 \cdot \log \frac{n \cdot I}{I_{\circ}} = 10 \cdot \log \frac{4 \cdot 10^{-6} \frac{W}{m^2}}{10^{-12} \frac{W}{m^2}} = 66 \ dB.$$

Vježba 336

Kolika je ukupna razina intenziteta zvuka gudačkog okteta ako svaki od osam instrumenata daje ton intenziteta 10^{-6} W / m^2?

Rezultat: 69 dB.

Zadatak 337 (Ena, srednja škola)

Jedno njihalo učini 20, a drugo 26 titraja u sekundi. Kako se odnose njihove dužine?

Rješenje 337

$T_1 = 20$ s, $T_2 = 26$ s, $l_1 : l_2 = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{20 \ s}{26 \ s}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{20 \ s}{26 \ s}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{10}{13}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{100}{169}.$$

Vježba 337

Jedno njihalo učini 20, a drugo 22 titraja u sekundi. Kako se odnose njihove dužine?

Rezultat: $l_1 : l_2 = 100 : 121.$

Zadatak 338 (Ena, srednja škola)

Uteg mase m titra na elastičnoj opruzi periodom od 1.25 s. Dodamo li tom utegu drugi uteg mase 0.5 kg perioda titranja poveća se na 2.5 s. Kolika je masa m prvog tijela?

Rješenje 338

$m_1 = m, \quad T_1 = 1.25 \text{ s}, \quad m_2 = 0.5 \text{ kg}, \quad T_2 = 2.5 \text{ s}, \quad m = ?$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.

Iz uvjeta zadatka dobije se:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 &= 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} T_1 &= 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_2 &= 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m+m_2}{k}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m+m_2}{k}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m+m_2}{k}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{\frac{m+m_2}{k}}}{\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{m+m_2}{k}}{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{m+m_2}{k}}{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m+m_2}{m}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m+m_2}{m}} \; /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{m+m_2}{m} \Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{m+m_2}{m} \; /\cdot m \Rightarrow m\cdot\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = m+m_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - m = m_2 \Rightarrow m\cdot\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1\right) = m_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1\right) = m_2 \; /\cdot\frac{1}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1} \Rightarrow m = \frac{m_2}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1} = \frac{0.5\ kg}{\left(\frac{2.5\ s}{1.25\ s}\right)^2 - 1} = 0.167\ kg.$$

Vježba 338

Uteg mase m titra na elastičnoj opruzi periodom od 2.5 s. Dodamo li tom utegu drugi uteg mase 0.5 kg perioda titranja poveća se na 5 s. Kolika je masa m prvog tijela?

Rezultat: 0.167 kg.

Zadatak 339 (Ina, gimnazija)

Tijelo mase 1 kg visi na elastičnoj opruzi i titra gore – dolje po stazi dugoj 20 cm. Vrijeme titranja je 4 s. Odredi brzinu i ubrzanje pri prolazu kroz ravnotežni položaj.

Rješenje 339

m = 1 kg, 2 · A = 20 cm => A = 10 cm = 0.1 m, T = 4 s, v = ?, a = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji.

Brzina tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom

$$v=\frac{2\cdot\pi\cdot A}{T}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right),$$

gdje je A amplituda, tj. maksimalna elongacija (udaljenost od položaja ravnoteže), T vrijeme jednog titraja ili perioda, t vrijeme.

Akceleracija tijela koje titra dana je formulom

$$a=-\frac{4\cdot\pi^{2}}{T^{2}}\cdot x,$$

gdje negativan predznak pokazuje da su x i a suprotnog smjera.

Tijelo položajem ravnoteže prolazi u trenutku

$$t=\frac{T}{2}.$$

U tom času brzina ima vrijednost (apsolutnu vrijednost, predznak nas ne zanima)

$$v=\frac{2\cdot\pi\cdot A}{T}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right)\Rightarrow\left[t=\frac{T}{2}\right]\Rightarrow v=\frac{2\cdot\pi\cdot A}{T}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\frac{2\cdot\pi\cdot A}{T}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)\Rightarrow v=\frac{2\cdot\pi\cdot A}{T}\cdot\cos\pi=\frac{2\cdot\pi\cdot 0.1\ m}{4\ s}\cdot\cos\pi=\text{RAD}=0.16\ \frac{m}{s}.$$

Kada tijelo prolazi položajem ravnoteže elongacija je x = 0 pa je akceleracija

$$a=-\frac{4\cdot\pi^{2}}{T^{2}}\cdot x=-\frac{4\cdot\pi^{2}}{T^{2}}\cdot 0=0\ \frac{m}{s^{2}}.$$

Vježba 339

Tijelo mase 100 dag visi na elastičnoj opruzi i titra gore – dolje po stazi dugoj 2 dm. Vrijeme titranja je 4 s. Odredi brzinu i ubrzanje pri prolazu kroz ravnotežni položaj.

Rezultat: 0.16 m / s, 0 m / s^2.

Zadatak 340 (Ina, gimnazija)

Tijelo mase 10 g harmonički titra s amplitudom 9 cm i maksimalnim ubrzanjem 0.4 m / s^2. Odredite kinetičku energiju pri prolasku kroz ravnotežni položaj.

Rješenje 340

m = 10 g = 0.01 kg, A = 9 cm = 0.09 m, a_0 = 0.4 m / s^2, E_k = ?

Ako tijelo harmonički titra s amplitudom A (maksimalna udaljenost od položaja ravnoteže) i ima najveće ubrzanje a_0, njegova kinetička energija pri prolazu kroz ravnotežni položaj dana je formulom

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a_\circ \cdot A.$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a_\circ \cdot A = \frac{1}{2} \cdot 0.01\ kg \cdot 0.4\ \frac{m}{s^2} \cdot 0.09\ m = 1.8 \cdot 10^{-4}\ J.$$

Vježba 340

Tijelo mase 10 g harmonički titra s amplitudom 18 cm i maksimalnim ubrzanjem 0.2 m / s^2. Odredite kinetičku energiju pri prolasku kroz ravnotežni položaj.

Rezultat: $1.8 \cdot 10^{-4}$ J.