

### Zadatak 241 (Neda, gimnazija)

Frekvencija matematičkog njihala je 4 Hz. Za koliko treba skratiti nit da bi se njegova frekvencija povećala dva puta?

#### Rješenje 241

$$v_1 = 4 \text{ Hz}, \quad v_2 = 2 \cdot v_1 = 2 \cdot 4 \text{ Hz} = 8 \text{ Hz}, \quad \frac{l_2}{l_1} = ?$$

Frekvencija  $v$  je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda  $T$  je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije  $v$  i periode  $T$  postoji veza:

$$T \cdot v = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{v} \Rightarrow v = \frac{1}{T}.$$

**Matematičko njihalo** je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow v = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}},$$

gdje je  $l$  duljina njihala, a  $g$  akceleracija slobodnog pada.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}} \\ v_2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{1} \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\frac{g}{l_1}}}{\sqrt{\frac{g}{l_2}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{g}{l_1} \cdot \frac{l_2}{g}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = \frac{v_1}{v_2} / 2 \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \left( \frac{4 \text{ Hz}}{8 \text{ Hz}} \right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \left( \frac{4 \text{ Hz}}{8 \text{ Hz}} \right)^2 \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{4} / \cdot l_1 \Rightarrow l_2 = \frac{1}{4} \cdot l_1.$$

Nit treba skratiti za  $\frac{3}{4}$  prvobitne duljine.

#### Vježba 241

Frekvencija matematičkog njihala je 4 Hz. Za koliko treba skratiti nit da bi se njegova frekvencija povećala tri puta?

**Rezultat:**  $l_2 = \frac{1}{9} \cdot l_1.$

### Zadatak 242 (Azra, medicinska škola)

Kolika je masa utega koji će elastičnom deformacijom produljiti oprugu, koeficijenta elastičnosti 1 kN / m, za 1 cm? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m} / \text{s}^2$ )

- A. 1 kg      B. 2 kg      C. 9.81 kg      D. 10 kg      E. 100 kg

#### Rješenje 242

$$k = 1 \text{ kN / m} = 1000 \text{ N / m}, \quad x = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m / s}^2, \quad m = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija  $g$  kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Sila koja djeluje na tijelo mase  $m$  i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je  $k$  konstanta elastičnosti,  $x$  pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus. Kada je riječ o opruzi, konstanta  $k$  zove se konstanta elastičnosti opruge.

Ako se na oprugu objesi uteg mase  $m$  opruga se izduži za  $x$ . U ovom slučaju sila teža je uzrok titranja opruge, tj. sila teža je harmonička sila:

$$G = F \Rightarrow m \cdot g = k \cdot x \Rightarrow m \cdot g = k \cdot x \cdot \frac{1}{g} \Rightarrow m = \frac{k \cdot x}{g} = \frac{1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0.01 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1 \text{ kg}.$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 242

Kolika je masa utega koji će elastičnom deformacijom produljiti oprugu, koeficijenta elastičnosti  $10 \text{ kN / m}$ , za  $1 \text{ mm}$ ? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m / s}^2$ )

- A.  $1 \text{ kg}$       B.  $2 \text{ kg}$       C.  $9.81 \text{ kg}$       D.  $10 \text{ kg}$       E.  $100 \text{ kg}$

**Rezultat:** A.

### Zadatak 243 (Dolores, gimnazija)

Ako je omjer perioda dvaju harmoničkih oscilatora jednakih opruga  $2 : 3$ , koliki je omjer njihovih masa?

### Rješenje 243

$$T_1 : T_2 = 2 : 3, \quad m_1 : m_2 = ?$$

Sila koja djeluje na tijelo mase  $m$  i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je  $k$  konstanta elastičnosti,  $x$  pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus.

Pomoću konstante elastičnosti  $k$  možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kada je riječ o opruzi, konstanta  $k$  zove se konstanta elastičnosti opruge.

$$T_1 : T_2 = 2 : 3 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{m_1}{k}}}{\sqrt{\frac{m_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\frac{m_1}{k}}{\frac{m_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{\frac{m_1}{k}}{\frac{m_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{2}{3} / 2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow m_1 : m_2 = 4 : 9.$$

### Vježba 243

Ako je omjer perioda dvaju harmoničkih oscilatora jednakih opruga 3 : 5, koliki je omjer njihovih masa?

**Rezultat:** 9 : 25.

### Zadatak 244 (Dolores, gimnazija)

Ako je omjer perioda dvaju matematičkih njihala na Zemlji 2 : 3, koliki je omjer njihovih duljina?

#### Rješenje 244

$$T_1 : T_2 = 2 : 3, \quad l_1 : l_2 = ?$$

**Matematičko njihalo** je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja niže koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdje je  $l$  duljina njihala, a  $g$  akceleracija slobodnog pada.

$$T_1 : T_2 = 2 : 3 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{l_1}{k}}}{\sqrt{\frac{l_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\frac{l_1}{k}}{\frac{l_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{\frac{l_1}{k}}{\frac{l_2}{k}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{2}{3} / 2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow l_1 : l_2 = 4 : 9.$$

### Vježba 244

Ako je omjer perioda dvaju matematičkih njihala na Zemlji 4 : 3, koliki je omjer njihovih duljina?

**Rezultat:** 16 : 9.

### Zadatak 245 (Ante, gimnazija)

Elastičnu oprugu prenesemo na planet gdje je ubrzanje sile teže jednako polovici ubrzanja na Zemlji. Perioda titranja opruge bit će u usporedbi s periodom titranja na Zemlji:

- A. nepromijenjena      B. 1.41 puta veća      C. 1.41 puta manja  
D. četiri puta manja      E. četiri puta veća

#### Rješenje 245

$$g = g_Z / 2, \quad T = ?$$

Sila koja djeluje na tijelo mase  $m$  i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je  $k$  konstanta elastičnosti,  $x$  pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus.

Pomoću konstante elastičnosti  $k$  možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kada je riječ o opruzi, konstanta  $k$  zove se konstanta elastičnosti opruge.

Uočimo da se u formuli za periodu  $T$  ne pojavljuje akceleracija  $g$ . Perioda ovisi samo o masi tijela  $m$  i konstanti elastičnosti opruge  $k$ . Perioda titranja opruge bit će u usporedbi s periodom titranja na Zemlji nepromijenjena.

Odgovor je pod A.

### Vježba 245

Elastičnu oprugu prenesemo na planet gdje je ubrzanje sile teže jednako trećini ubrzanja na Zemlji. Perioda titranja opruge bit će u usporedbi s periodom titranja na Zemlji:

- A. nepromijenjena      B. 1.41 puta veća      C. 1.41 puta manja  
D. četiri puta manja      E. četiri puta veća

**Rezultat:** A.

### Zadatak 246 (Tomislav, gimnazija)

Ako tijelo harmonički titra amplitudom od 4 cm koliki put prijeđe tijekom jedne periode?

#### Rješenje 246

$$A = 4 \text{ cm}, \quad s = ?$$

Sila koja djeluje na tijelo mase  $m$  i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

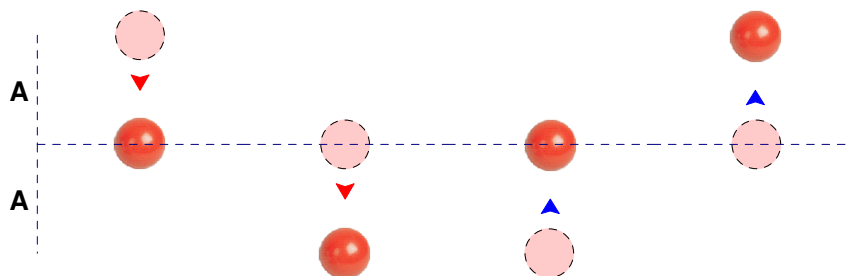
$$F = -k \cdot x,$$

gdje je  $k$  konstanta elastičnosti,  $x$  pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus.

Amplituda je maksimalan pomak, najveći otklon (elongacija) iz ravnotežnoga položaja čestice pri titranju ili čestice medija pri širenju valova. Perioda  $T$  je vrijeme jednog ophoda (titraja).

Put koji tijelo prijeđe tijekom jedne periode iznosi:

$$s = 4 \cdot A = 4 \cdot 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}.$$



### Vježba 246

Ako tijelo harmonički titra amplitudom od 5 cm koliki put prijeđe tijekom jedne periode?

**Rezultat:** 20 cm.

### Zadatak 247 (Ivan, tehnička škola)

Amplituda harmoničkog titranja je 30 cm, a perioda 2 s. U trenutku  $t = 0$  elongacija je  $y = 0$  i tijelo se giba u smjeru  $+y$ . Kolike su vrijednosti elongacije, brzine i akceleracije u trenutku  $t = T / 12$ ?

### Rješenje 247

$$A = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}, \quad T = 2 \text{ s}, \quad t = \frac{T}{12} = \frac{2 \text{ s}}{12} = \frac{1}{6} \text{ s}, \quad y = ?, \quad v = ?, \quad a = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost  $y$  od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) brzina i akceleracija pri harmoničkom titranju koje počinje iz položaja ravnoteže računaju se pomoću izraza:

- elongacija  $y = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$
- brzina  $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$
- akceleracija  $a = -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot A}{T^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$ ,

gdje je  $A$  amplituda (maksimalna elongacija),  $T$  perioda (vrijeme jednog titraja),  $t$  vrijeme titranja. Negativni predznak akceleracije točke koja titra uvijek ćemo izostaviti u zadacima, osim u slučaju da se izričito traži smjer. Nas obično zanima apsolutni iznos akceleracije.

Računamo elongaciju.

$$\begin{aligned} y &= A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = 0.3 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \text{ s}} \cdot \frac{1}{6} \text{ s}\right) = 0.3 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \text{ s}} \cdot \frac{1}{6} \text{ s}\right) = \\ &= 0.3 \text{ m} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 0.15 \text{ m} = 15 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Računamo brzinu.

$$\begin{aligned} v &= \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.3 \text{ m}}{2 \text{ s}} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \text{ s}} \cdot \frac{1}{6} \text{ s}\right) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.3 \text{ m}}{2 \text{ s}} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \text{ s}} \cdot \frac{1}{6} \text{ s}\right) = \\ &= \pi \cdot 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 0.8162 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 81.62 \frac{\text{cm}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Računamo akceleraciju.

$$\begin{aligned} a &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot A}{T^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.3 \text{ m}}{(2 \text{ s})^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \text{ s}} \cdot \frac{1}{6} \text{ s}\right) = \\ &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.3 \text{ m}}{4 \text{ s}^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \text{ s}} \cdot \frac{1}{6} \text{ s}\right) = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.3 \text{ m}}{4 \text{ s}^2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \pi^2 \cdot 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \\ &= 1.4804 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 148.04 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

### Vježba 247

Amplituda harmoničkog titranja je 3 dm, a perioda 2 s. U trenutku  $t = 0$  elongacija je  $y = 0$  i tijelo se giba u smjeru  $+y$ . Kolike su vrijednosti elongacije, brzine i akceleracije u trenutku  $t = T / 12$ ?

**Rezultat:**  $15 \text{ cm}, 81.62 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, 148.04 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ .

### Zadatak 248 (Ivan, tehnička škola)

Tijelo ovješeno na oprugu izvučemo iz ravnotežnog položaja za 10 cm i pustimo titrati. Na kojoj će udaljenosti od ravnotežnog položaja:

- brzina tijela biti jednaka polovici najveće brzine?
- akceleracija tijela biti jednaka polovici najveće akceleracije?

#### Rješenje 248

$$A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad y = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost  $y$  od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) brzina i akceleracija pri harmoničkom titranju koje počinje iz položaja ravnoteže računaju se pomoću izraza:

- elongacija  $y = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$
- brzina  $v = v_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$
- akceleracija  $a = a_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ,

gdje je  $A$  amplituda (maksimalna elongacija),  $\omega$  kutna brzina,  $t$  vrijeme titranja,  $v_0$  maksimalna brzina,  $a_0$  maksimalna akceleracija.

a) Kada je brzina tijela jednaka polovici najveće brzine dobije se:

$$\begin{aligned} v = \frac{1}{2} \cdot v_0 &\Rightarrow v_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot v_0 \Rightarrow v_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot v_0 \quad /: v_0 \Rightarrow \cos(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \cos(\omega \cdot t) = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega \cdot t = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Tada elongacija iznosi:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} A = 0.1 \text{ m} \\ \omega \cdot t = \frac{\pi}{3} \end{array} \right] \Rightarrow y = 0.1 \text{ m} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 0.0866 \text{ m} = 8.66 \text{ cm}.$$

b) Kada je akceleracija tijela jednaka polovici najveće akceleracije dobije se:

$$a = \frac{1}{2} \cdot a_0 \Rightarrow a_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \Rightarrow a_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \quad /: a_0 \Rightarrow \sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{2}.$$

Tada elongacija iznosi:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} A = 0.1 \text{ m} \\ \sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \end{array} \right] \Rightarrow y = 0.1 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}.$$

### Vježba 248

Tijelo ovješeno na oprugu izvučemo iz ravnotežnog položaja za 100 mm i pustimo titrati. Na kojoj će udaljenosti od ravnotežnog položaja:

- brzina tijela biti jednaka polovici najveće brzine?
- akceleracija tijela biti jednaka polovici najveće akceleracije?

**Rezultat:** 8.66 cm, 5 cm.

### Zadatak 249 (Marko, tehnička škola)

Odredi položaj u kome se nalazi čestica, koja harmonički titra, 2 sekunde nakon početka titranja, ako je amplituda titranja 5 cm, a perioda titranja 5 sekundi.

#### Rješenje 249

$$t = 2 \text{ s}, \quad A = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, \quad T = 5 \text{ s}, \quad y = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne

elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost  $y$  od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je  $A$  amplituda (maksimalna elongacija),  $T$  perioda (vrijeme jednog titraja),  $t$  vrijeme titranja.

$$\begin{aligned} y &= A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = 0.05 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{5 \text{ s}} \cdot 2 \text{ s}\right) = 0.05 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{5 \text{ s}} \cdot 2 \text{ s}\right) = \\ &= 0.05 \text{ m} \cdot \sin\frac{4 \cdot \pi}{5} = 0.0294 \text{ m} = 2.94 \text{ cm}. \end{aligned}$$

### Vježba 249

Odredi položaj u kome se nalazi čestica, koja harmonički titra, 2 sekunde nakon početka titranja, ako je amplituda titranja 0.5 dm, a perioda titranja 5 sekundi.

**Rezultat:** 2.94 cm.

### Zadatak 250 (Marko, tehnička škola)

Koji dio vremena jednog titraja mora proći da točka koja harmonički titra postigne brzinu koja će po veličini biti jednaka polovici maksimalne brzine? Početni fazni kut jednak je nuli.

#### Rješenje 250

$$v = \frac{1}{2} \cdot v_0, \quad t = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Brzina pri harmoničkom titranju koje počinje iz položaja ravnoteže računa se pomoću izraza:

$$v = v_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je  $v_0$  maksimalna brzina,  $T$  perioda (vrijeme jednog titraja),  $t$  vrijeme titranja.

Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \cdot v_0 \Rightarrow v_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \cdot v_0 \Rightarrow v_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \cdot v_0 \quad /: v_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) &= \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t = \frac{\pi}{3} \quad /: \frac{2 \cdot \pi}{T} \Rightarrow t = \frac{T}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{6} \cdot T. \end{aligned}$$

### Vježba 250

Koji dio vremena jednog titraja, koji iznosi 12 s, mora proći da točka koja harmonički titra postigne brzinu koja će po veličini biti jednaka polovici maksimalne brzine? Početni fazni kut jednak je nuli.

**Rezultat:** 2 s.

### Zadatak 251 (Marko, tehnička škola)

Opruga na koju je ovješena utega titra tako da učini 45 titraja u minuti. Što treba učiniti s masom utega da bi sustav titrao s 30 titraja u minuti?

#### Rješenje 251

$$n_1 = 45, \quad t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad n_2 = 30, \quad t_2 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad m_2 : m_1 = ?$$

Sila koja djeluje na tijelo mase  $m$  i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus.

Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge.

Perioda titranja T računa se po formuli

$$T = \frac{t}{n},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t.

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{m_2}{k}}{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{k}{k}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{T_2}{T_1} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} T_2 = \frac{t_2}{n_2} \\ T_1 = \frac{t_1}{n_1} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left( \frac{\frac{t_2}{n_2}}{\frac{t_1}{n_1}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left( \frac{t_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot t_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left( \frac{60 \text{ s} \cdot 45}{30 \cdot 60 \text{ s}} \right)^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left( \frac{60 \text{ s} \cdot 45}{30 \cdot 60 \text{ s}} \right)^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left( \frac{3}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 2.25 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 2.25 \cdot m_1 \Rightarrow m_2 = 2.25 \cdot m_1.$$

Masu treba povećati 2.25 puta.

### Vježba 251

Opruga na koju je ovješena uteg titra tako da učini 45 titraja u minuti. Što treba učiniti s masom utega da bi sustav titrao s 0.5 titraja u sekundi?

**Rezultat:** Masu treba povećati 2.25 puta.

### Zadatak 252 (Anica, srednja škola)

Ako tijelo objesimo na oprugu ona se produlji za 4 cm. Ako taj sustav (opruga + masa) zatitramo kolika je perioda i frekvencija? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 252

$$x = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T = ?, \quad v = ?$$

Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$



gdje je  $k$  konstanta elastičnosti,  $x$  pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus.

Pomoću konstante elastičnosti  $k$  možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Kada je riječ o opruzi, konstanta  $k$  zove se konstanta elastičnosti opruge.

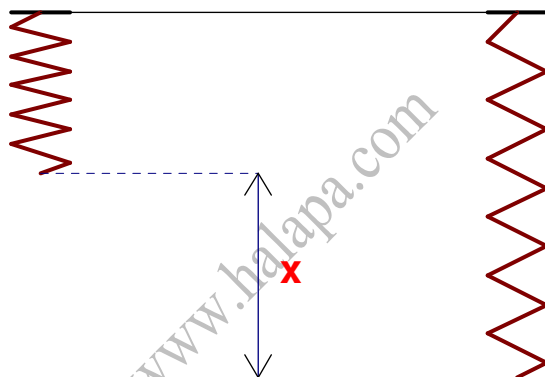
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija  $g$  kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Frekvencija  $\nu$  je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda  $T$  je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije  $\nu$  i periode  $T$  postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}$$



Tu je sila teža koja prisiljava tijelo da harmonički titra. Zato mora biti harmonička sila  $F$  jednaka sili teži  $G$ .

$$\left. \begin{array}{l} F = k \cdot x \\ G = m \cdot g \\ F = G \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \cdot x = m \cdot g \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \cdot x = m \cdot g \cdot \frac{1}{x} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k = \frac{m \cdot g}{x} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{x}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{1}{m \cdot g} \cdot x}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{1}{m \cdot g} \cdot x}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}}$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.04 \frac{m}{s^2}}{9.81 \frac{m}{s^2}}} = 0.4 \text{ s.}$$

Frekvencija iznosi:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.4 \text{ s}} = 2.5 \text{ Hz.}$$

### Vježba 252

Ako tijelo objesimo na oprugu ona se produlji za 0.4 dm. Ako taj sustav (opruga + masa) zatitramo kolika je perioda i frekvencija? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.4 s, 2.5 Hz.

### Zadatak 253 (BBB, tehnička škola)

Nađi maksimalnu brzinu i maksimalnu akceleraciju točke koja harmonički titra s amplitudom od 4 cm. Vrijeme jednog titraja je 2 s.

#### Rješenje 253

$$A = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}, \quad T = 2 \text{ s}, \quad v_0 = ?, \quad a_0 = ?$$

Amplituda je maksimalan pomak, najveći otklon (elongacija) iz ravnotežnoga položaja čestice pri titranju ili čestice medija pri širenju valova. Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna brzina i maksimalna akceleracija pri harmoničkom titranju koje počinje iz položaja ravnoteže računaju se pomoću izraza:

- $$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T}$$
- $$a_0 = -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot A}{T^2}$$

Negativni predznak akceleracije točke koja titra uvijek ćemo izostaviti u zadacima, osim u slučaju da se izričito traži smjer. Nas obično zanima apsolutni iznos akceleracije.

Računamo maksimalnu brzinu.

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.04 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 0.1257 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 12.57 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Računamo maksimalnu akceleraciju.

$$a_0 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot A}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.04 \text{ m}}{(2 \text{ s})^2} = 0.3948 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 39.48 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

### Vježba 253

Nađi maksimalnu brzinu i maksimalnu akceleraciju točke koja harmonički titra s amplitudom od 0.4 dm. Vrijeme jednog titraja je 2 s.

**Rezultat:** 12.57 cm / s, 39.48 cm / s<sup>2</sup>.

### Zadatak 254 (BBB, tehnička škola)

Tijelo harmonički titra. Treba 0.25 s da prijeđe od mjesta gdje mu je brzina jednaka nuli do drugog takvog mjesta na suprotnoj strani od ravnotežnog položaja. Ta dva mjesta udaljena su 36 cm. Odredite:

- periodu titranja
- frekvenciju titranja
- amplitudu titranja.

#### Rješenje 254

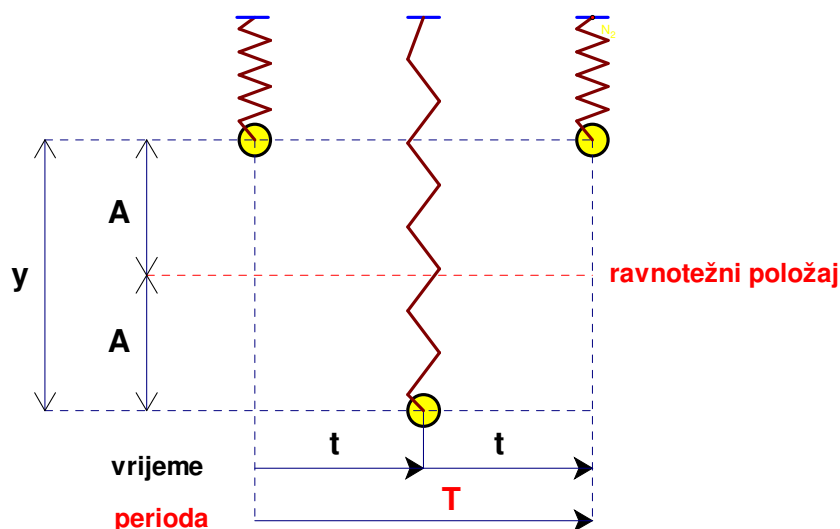
$$t = 0.25 \text{ s}, \quad y = 36 \text{ cm}, \quad T = ?, \quad v = ?, \quad A = ?$$

Frekvencija  $\nu$  je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije  $\nu$  i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}$$

Amplituda je maksimalan pomak, najveći otklon (elongacija) iz ravnotežnoga položaja čestice pri titranju ili čestice medija pri širenju valova. Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. **Kada je tijelo u amplitudnom položaju brzina mu je jednaka nuli.**



Budući da je  $t$  vrijeme za koje tijelo prijeđe od mjesta gdje mu je brzina jednaka nuli do drugog takvog mjesta na suprotnoj strani od ravnotežnog položaja, perioda titranja bit će

$$T = 2 \cdot t = 2 \cdot 0.25 \text{ s} = 0.5 \text{ s},$$

a frekvencija

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5 \text{ s}} = 2 \text{ Hz}.$$

Amplituda iznosi:

$$2 \cdot A = y \Rightarrow 2 \cdot A = y \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{y}{2} = \frac{36 \text{ cm}}{2} = 18 \text{ cm}.$$

### Vježba 254

Tijelo harmonički titra. Treba 0.5 s da prijeđe od mjesta gdje mu je brzina jednaka nuli do drugog takvog mjesta na suprotnoj strani od ravnotežnog položaja. Ta dva mjesta udaljena su 40 cm. Odredite:

- periodu titranja
- frekvenciju titranja
- amplitudu titranja.

**Rezultat:**  $T = 1 \text{ s}, \nu = 1 \text{ Hz}, A = 20 \text{ cm}.$

### Zadatak 255 (Mihovil, tehnička škola)

Njihalo duljine  $l_1$  ima periodu  $T_1 = 1.753 \text{ s}$ , produženo za  $\Delta l = 84 \text{ cm}$  ima periodu  $T_2 = 2.54 \text{ s}$ . Odredite ubrzanje sile teže.

### Rješenje 255

$$T_1 = 1.753 \text{ s}, \quad \Delta l = 84 \text{ cm} = 0.84 \text{ m}, \quad T_2 = 2.54 \text{ s}, \quad g = ?$$

**Matematičko njihalo** je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2},$$

gdje je  $l$  duljina njihala, a  $g$  akceleracija slobodnog pada.

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \frac{g \cdot T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \\ l_2 &= \frac{g \cdot T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\Delta l = l_2 - l_1] \Rightarrow \Delta l = \frac{g \cdot T_2^2}{4 \cdot \pi^2} - \frac{g \cdot T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow \Delta l = \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) = \Delta l \Rightarrow \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) = \Delta l \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \Delta l}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.84 \text{ m}}{(2.54 \text{ s})^2 - (1.753 \text{ s})^2} = 9.815 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

### Vježba 255

Njihalo duljine  $l_1$  ima periodu  $T_1 = 1.753$  s, produženo za  $\Delta l = 8.4$  dm ima periodu  $T_2 = 2.54$  s. Odredite ubrzanje sile teže.

**Rezultat:**  $9.815 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

### Zadatak 256 (Mira, gimnazija)

Neko tijelo harmonički titra s periodom 6 s i amplitudom 30 cm. Koliku brzinu ima kada se od ravnotežnog položaja udalji za 15 cm?

#### Rješenje 256

$$T = 6 \text{ s}, \quad A = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}, \quad y = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \quad v = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost  $y$  od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) i brzina pri harmoničkom titranju koje počinje iz položaja ravnoteže računaju se pomoću izraza:

- elongacija  $y = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$
- brzina  $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \cdot \cos(\omega \cdot t)$

gdje je  $A$  amplituda (maksimalna elongacija),  $\omega$  kutna brzina,  $T$  perioda (vrijeme jednog titraja),  $t$  vrijeme titranja.

$$\begin{aligned} y &= A \cdot \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow A \cdot \sin(\omega \cdot t) = y \Rightarrow A \cdot \sin(\omega \cdot t) = y \cdot \frac{1}{A} \Rightarrow \sin(\omega \cdot t) = \frac{y}{A} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \omega \cdot t = \sin^{-1}\left(\frac{y}{A}\right) \Rightarrow \omega \cdot t = \sin^{-1}\left(\frac{0.15 \text{ m}}{0.30 \text{ m}}\right) \Rightarrow \omega \cdot t = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

Sada izračunamo brzinu  $v$ .

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \cdot \cos(\omega \cdot t) = \left[ \begin{array}{l} A = 0.30 \text{ m} \\ T = 6 \text{ s} \\ \omega \cdot t = \frac{\pi}{6} \end{array} \right] = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.30 \text{ m}}{6 \text{ s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.272 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 27.2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

### Vježba 256

Neko tijelo harmonički titra s periodom 6 s i amplitudom 3 dm. Koliku brzinu ima kada se od ravnotežnog položaja udalji za 150 mm?

**Rezultat:**  $27.2 \text{ cm / s}$ .

### Zadatak 257 (Mira, gimnazija)

Tijelo harmonički titra. Treba 0.25 s da prijede od mjesta gdje mu je brzina jednaka nuli do drugog takvog mjesta na suprotnoj strani od ravnotežnog položaja. Ta dva mjesta udaljena su 36 cm. Odredite:

- periodu titranja
- frekvenciju titranja
- amplitudu titranja.

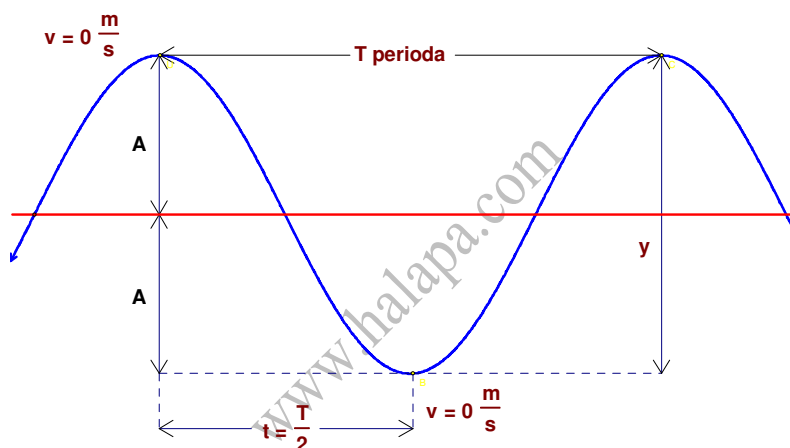
### Rješenje 257

$$t = 0.25 \text{ s}, \quad y = 36 \text{ cm} = 0.36 \text{ m}, \quad T = ?, \quad \nu = ?, \quad A = ?$$

Frekvencija  $\nu$  je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda  $T$  je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije  $\nu$  i periode  $T$  postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Amplituda je maksimalan pomak, najveći otklon (elongacija) iz ravnotežnoga položaja čestice pri titranju ili čestice medija pri širenju valova. Perioda  $T$  je vrijeme jednog ophoda (titraja). Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. **Kada je tijelo u amplitudnom položaju brzina mu je jednaka nuli.**



Budući da je  $t$  vrijeme za koje tijelo prijede od mjesta gdje mu je brzina jednaka nuli do drugog takvog mjesta na suprotnoj strani od ravnotežnog položaja, perioda titranja bit će

$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = t \Rightarrow \frac{T}{2} = t \cdot 2 \Rightarrow T = 2 \cdot t = 2 \cdot 0.25 \text{ s} = 0.5 \text{ s},$$

a frekvencija

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5 \text{ s}} = 2 \text{ Hz}.$$

Amplituda iznosi:

$$y = 2 \cdot A \Rightarrow 2 \cdot A = y \Rightarrow 2 \cdot A = y \quad /: 2 \Rightarrow A = \frac{y}{2} = \frac{0.36 \text{ m}}{2} = 0.18 \text{ m} = 18 \text{ cm}.$$

### Vježba 257

Tijelo harmonički titra. Treba 0.5 s da prijede od mjesta gdje mu je brzina jednaka nuli do drugog takvog mjesta na suprotnoj strani od ravnotežnog položaja. Odredite periodu titranja.

**Rezultat:**  $T = 1 \text{ s}.$

### Zadatak 258 (Miro, gimnazija)

Zvuk frekvencije 612 Hz treba 0.744 s da prijeđe vertikalni put od točke 200 m ispod površine vode do točke u zraku 200 m iznad površine vode. Brzina zvuka u zraku je 330 m / s. Izračunajte duljinu vala toga zvuka u zraku i duljinu vala u vodi.

### Rješenje 258

$$v = 612 \text{ Hz}, \quad t = 0.744 \text{ s}, \quad s_v = 200 \text{ m}, \quad s_z = 200 \text{ m}, \quad v_z = 330 \text{ m / s}, \quad \lambda_z = ?, \quad \lambda_v = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v},$$

gdje je  $v$  stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba,  $t$  vrijeme gibanja.

Val je širenje titranja iz izvora vala kroz neko sredstvo. Zrake vala su pravci po kojima se titranje širi od čestice do čestice. Udaljenost za koju se val proširio dok čestica u izvoru napravi jedan potpuni titraj zove se duljina vala  $\lambda$ . Sveza između valne duljine  $\lambda$ , brine vala  $v$  i frekvencije  $\nu$  je

$$\lambda = \frac{v}{\nu}.$$

Valna duljina pri širenju vala kroz različita sredstva mijenja se samo zbog različitih brzina širenja vala u tim sredstvima. **Frekvencija se pritom ne mijenja.**

Valna duljina zvuka u zraku iznosi:

$$\lambda_z = \frac{v_z}{\nu} = \frac{330 \frac{m}{s}}{612 \frac{1}{s}} = 0.539 \text{ m}.$$

Vrijeme putovanja zvuka je:

- u vodi

$$t_v = \frac{s_v}{v_v}$$

- u zraku

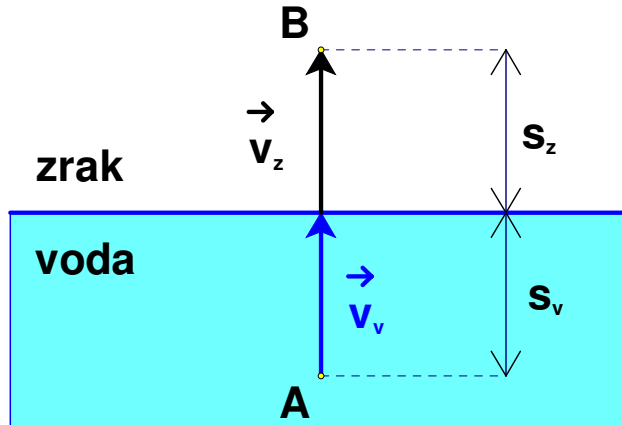
$$t_z = \frac{s_z}{v_z}.$$

Budući da je zadano ukupno vrijeme  $t$  širenja zvuka, slijedi:

$$t = t_v + t_z \Rightarrow t_v = t - t_z.$$

Sada je valna duljina zvuka u vodi jednaka:

$$\begin{aligned} \lambda_v = \frac{v_v}{\nu} &\Rightarrow \lambda_v = \frac{\frac{s_v}{t_v}}{\nu} \Rightarrow \lambda_v = \frac{s_v}{\nu \cdot t_v} \Rightarrow \lambda_v = \frac{s_v}{\nu \cdot (t - t_z)} \Rightarrow \lambda_v = \frac{s_v}{\nu \cdot \left( t - \frac{s_z}{v_z} \right)} = \\ &= \frac{200 \text{ m}}{612 \frac{1}{s} \cdot \left( 0.744 \text{ s} - \frac{200 \text{ m}}{330 \frac{m}{s}} \right)} = 2.369 \text{ m}. \end{aligned}$$



### Vježba 258

Zvuk frekvencije 612 Hz treba 0.744 s da prijeđe vertikalni put od točke 0.2 km ispod površine vode do točke u zraku 0.2 km iznad površine vode. Brzina zvuka u zraku je 330 m / s. Izračunajte duljinu vala toga zvuka u zraku i duljinu vala u vodi.

**Rezultat:** 0.539 m, 2.369 m.

### Zadatak 259 (Tomislav, gimnazija)

Kolika je razlika faza harmoničkih titraja  $s_1 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)$  i  $s_2 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - 60^\circ\right)$ ?

### Rješenje 259

$$s_1 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \frac{\pi}{4}\right), \quad s_2 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - 60^\circ\right), \quad \varphi_1 - \varphi_2 = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost  $y$  od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je  $A$  amplituda (maksimalna elongacija),  $T$  perioda (vrijeme jednog titraja),  $t$  vrijeme titranja. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija  $y$  mijenja se s vremenom

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right),$$

gdje je  $\varphi$  početni fazni kut.

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \frac{\pi}{4}\right) \\ s_2 &= A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - 60^\circ\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ s = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \varphi\right) \right] \Rightarrow \left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\pi}{4} \\ \varphi_2 &= -60^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ 60^\circ = \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\pi}{4} \\ \varphi_2 &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_1 - \rho_2 = \frac{3 \cdot \pi + 4 \cdot \pi}{12} \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 = \frac{7 \cdot \pi}{12}.$$

### Vježba 259

Kolika je razlika faza harmoničkih titraja  $s_1 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \frac{\pi}{3}\right)$  i  $s_2 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - 60^\circ\right)$ ?

**Rezultat:**  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ .



### Zadatak 260 ( , gimnazija)

Jednadžba koja opisuje harmoničko titranje neke točke glasi  $x = 7 \text{ cm} \cdot \sin\left(50 \frac{1}{s} \cdot t\right)$ . Odredite amplitudu titranja, periodu i brzinu te točke.

#### Rješenje 260

$$x = 7 \text{ cm} \cdot \sin\left(50 \frac{1}{s} \cdot t\right), \quad A = ?, \quad T = ?, \quad v_0 = ?, \quad v = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot y$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost  $x$  od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je  $A$  amplituda (maksimalna elongacija),  $T$  perioda (vrijeme jednog titraja),  $t$  vrijeme titranja. Brzina tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom

$$v = v_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je  $v_0$  maksimalna brzina dana izrazom

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T}.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ x = 7 \text{ cm} \cdot \sin\left(50 \frac{1}{s} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ x = 7 \text{ cm} \cdot \sin\left(50 \frac{1}{s} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 7 \text{ cm} \\ \frac{2 \cdot \pi}{T} = 50 \frac{1}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 0.07 \text{ m} \\ \frac{2 \cdot \pi}{T} = 50 \frac{1}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.07 \text{ m} \\ \frac{T}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{50} \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.07 \text{ m} \\ \frac{T}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{50} \text{ s} \cdot 2 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 0.07 \text{ m} \\ T = \frac{2 \cdot \pi}{50} \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.07 \text{ m} \\ T = \frac{2 \cdot \pi}{50} \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.07 \text{ m} - \text{amplituda} \\ T = \frac{\pi}{25} \text{ s} - \text{perioda} \end{array} \right\}.$$

Računamo maksimalnu brzinu  $v_0$ .



$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.07 \text{ m}}{\frac{\pi}{25} \text{ s}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.07 \text{ m}}{\frac{\pi}{25} \text{ s}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.07 \text{ m}}{\frac{\pi}{25} \text{ s}} = 3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Brzina točke u vremenu  $t$  iznosi:

$$v = v_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = 3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos\left(50 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right).$$

### Vježba 260

Jednadžba koja opisuje harmoničko titranje neke točke glasi  $x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(50 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right)$ . Odredite amplitudu i periodu titranja.

**Rezultat:**  $A = 0.05 \text{ m}$  ,  $T = \frac{\pi}{25} \text{ s}$ .

www.halapa.com