Zadatak 221 (Martina, srednja škola)

Amplituda harmoničkog titranja je 2 cm, a frekvencija 0.5 Hz. Izraz koji opisuje ovo titranje je:

$$A.\ y = 2\ cm \cdot \sin\left(3.14\ \frac{1}{s} \cdot t\right) \qquad B.\ y = 2\ cm \cdot \sin\left(6.24\ \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

$$C.\ y = 2\ cm \cdot \sin\left(9.42\ \frac{1}{s} \cdot t\right) \qquad D.\ y = 4\ cm \cdot \sin\left(3.14\ \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

Rješenje 221

A = 2 cm, ν = 0.5 Hz. y = ?

Pomak, elongacija ili udaljenost y od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra, mijenja se s vremenom prema

$$y = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t\right),$$

gdje je y elongacija, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija, ν frekvencija.
Izraz koji opisuje zadano gibanje glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A = 2\ cm\ \ ,\ \ \nu = 0.5\ \dfrac{1}{s} \\ y = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t\right) \end{array}\right\} \Rightarrow\ y = 2\ cm \cdot \sin\left(2 \cdot 3.14 \cdot 0.5\ \frac{1}{s} \cdot t\right) \Rightarrow\ y = 2\ cm \cdot \sin\left(3.14\ \frac{1}{s} \cdot t\right).$$

Odgovor je pod A.

Vježba 221

Amplituda harmoničkog titranja je 4 cm, a frekvencija 0.5 Hz. Izraz koji opisuje ovo titranje je:

$$A.\ y = 2\ cm \cdot \sin\left(3.14\ \frac{1}{s} \cdot t\right) \qquad B.\ y = 2\ cm \cdot \sin\left(6.24\ \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

$$C.\ y = 2\ cm \cdot \sin\left(9.42\ \frac{1}{s} \cdot t\right) \qquad D.\ y = 4\ cm \cdot \sin\left(3.14\ \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

Rezultat: D.

Zadatak 222 (Roko, gimnazija)

Opruga se izduži za 5 cm ako se na nju objesi masa od 200 g. Odredi periodu titranja mase 500 g na toj opruzi. (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2)

Rješenje 222

x = 5 cm = 0.05 m, m = 200 g = 0.2 kg, m_1 = 500 g = 0.5 kg, g = 9.81 m / s^2,
T = ?

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.
Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus.

Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge.
Ako se na oprugu objesi masa m opruga se izduži za x. U ovom slučaju sila teža je uzrok titranja opruge, tj. sila teža je harmonička sila:

$$G = k \cdot x \Rightarrow m \cdot g = k \cdot x.$$

Perioda titranja opruge kada je na nju obješena masa m_1 iznosi:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot g = k \cdot x \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k \cdot x = m \cdot g \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k \cdot x = m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{x} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k = \frac{m \cdot g}{x} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{\frac{m \cdot g}{x}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{m_1}{1}}{\frac{m \cdot g}{x}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 \cdot x}{m \cdot g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.5\ kg \cdot 0.05\ m}{0.2\ kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}}} = 0.71\ s.$$

Vježba 222

Opruga se izduži za 4 cm ako se na nju objesi masa od 2 kg. Odredi periodu titranja mase 6 kg na toj opruzi. (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2)

Rezultat: 0.695 s.

Zadatak 223 (Miroslav, tehnička škola)

Udarac čekića u tračnicu željezničke pruge čuje se poslije 2.4 s. Koliko je slušatelj udaljen od mjesta udara čekića, ako je Youngov modul elastičnosti za željezo 210 GPa, a gustoća željeza 7800 kg / m^3?

Rješenje 223

t = 2.4 s, E_Y = 210 GPa = 2.1 · 10^{11} Pa, ρ = 7800 kg / m^3, s = ?

Brzina širenja longitudinalnih valova u čvrstom tijelu (štapu) dana je formulom

$$v = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}},$$

gdje je E_Y modul elastičnosti (Youngov modul elastičnosti sredstva koji je određen elastičnim svojstvima materijala i ima dimenziju tlaka), ρ je gustoća sredstva.
Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba, t vrijeme gibanja.
Najprije treba odrediti brzinu prostiranja vala, a zatim udaljenost slušatelja od mjesta udara čekića.

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} \\ s = v \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow s = t \cdot \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} = 2.4\ s \cdot \sqrt{\frac{2.1 \cdot 10^{11}\ Pa}{7800 \frac{kg}{m^3}}} = 12452.99\ m \approx 12.45\ km.$$

Vježba 223

Udarac čekića u tračnicu željezničke pruge čuje se poslije 2.4 s. Koliko je slušatelj udaljen od mjesta udara čekića, ako je Youngov modul elastičnosti za željezo 0.21 TPa, a gustoća željeza $7800 \ kg / m^3$?

Rezultat: 12.45 km.

Zadatak 224 (Miroslav, tehnička škola)

Mjerenjem je ustanovljeno da se odjek zvuka čekića s jedne strane mosta do druge čuje za 500 ms. Odredi duljinu mosta, ako je Youngov modul elastičnosti za željezo 220 GPa, a gustoća željeza $7800 \ kg / m^3$?

Rješenje 224

$t = 500 \ ms = 0.5 \ s, \quad E_Y = 220 \ GPa = 2.2 \cdot 10^{11} \ Pa, \quad \rho = 7800 \ kg / m^3, \quad l = ?$

Brzina širenja longitudinalnih valova u čvrstom tijelu (štapu) dana je formulom

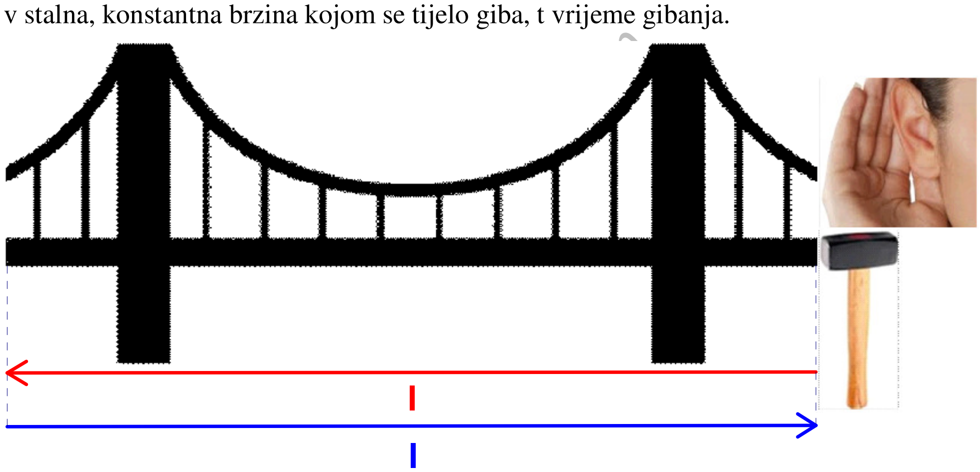
$$v = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}},$$

gdje je E_Y modul elastičnosti (Youngov modul elastičnosti sredstva koji je određen elastičnim svojstvima materijala i ima dimenziju tlaka), ρ je gustoća sredstva.

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba, t vrijeme gibanja.



1.inačica

Budući da se odjek zvuka čekića čuje nakon vremena t, znači da je zvuk za to vrijeme prešao dvostruki put: od početka do kraja mosta i natrag. Pišemo:

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{\dfrac{E_Y}{\rho}} \\ 2 \cdot l = v \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = \sqrt{\dfrac{E_Y}{\rho}} \\ 2 \cdot l = v \cdot t \ \ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = \sqrt{\dfrac{E_Y}{\rho}} \\ l = \dfrac{1}{2} \cdot v \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow l = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.5 \ s \cdot \sqrt{\frac{2.2 \cdot 10^{11} \ Pa}{7800 \ \frac{kg}{m^3}}} = 1327.71 \ m.$$

2.inačica

Za vrijeme t zvuk je prešao put od početka do kraja mosta i natrag. Budući da se zvuk giba jednoliko, trebat će polovica tog vremena da prođe put samo u jednom smjeru: od početka mosta do kraja.

$$t' = \frac{1}{2} \cdot t.$$

Tada je:

$$\left. \begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} \\ l = v \cdot t' \end{array} \right\} \Rightarrow \left[t' = \frac{1}{2} \cdot t \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} \\ l = v \cdot \frac{1}{2} \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow l = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.5 \ s \cdot \sqrt{\frac{2.2 \cdot 10^{11} \ Pa}{7800 \ \frac{kg}{m^3}}} = 1327.71 \ m.$$

Vježba 224

Mjerenjem je ustanovljeno da se odjek zvuka čekića s jedne strane mosta do druge čuje za 0.5 s. Odredi duljinu mosta, ako je Youngov modul elastičnosti za željezo 220 GPa, a gustoća željeza 7800 kg / m^3?

Rezultat: 1327.71 m.

Zadatak 225 (Maturantica, medicinska škola)

Elongacija tijela koje harmonijski titra dana je relacijom $y = 2 \ cm \cdot \sin\left(\pi \cdot t \ s^{-1} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Koliko iznosi elongacija tijela u početnome trenutku?

$A. \ -\sqrt{2} \ cm \qquad B. \ 0 \ cm \qquad C. \ \sqrt{2} \ cm \qquad D. \ 2 \ cm$

Rješenje 225

$y = 2 \ cm \cdot \sin\left(\pi \cdot t \ s^{-1} + \frac{\pi}{4}\right)$, t = 0 s početni trenutak, y = ?

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom prema

$$y = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t) \quad , \quad y = A \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

gdje je y elongacija (udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku), A amplituda (maksimalna elongacija), ω kutna frekvencija, t vrijeme. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$y = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t + \varphi_0) \quad , \quad y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad , \quad y = A \cdot \sin\varphi,$$

gdje je $\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$ faza titranja u trenutku t, φ_0 faza u trenutku t = 0.

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \ s \\ y = 2 \ cm \cdot \sin\left(\pi \cdot t \ s^{-1} + \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2 \ cm \cdot \sin\left(\pi \cdot 0 + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 \ cm \cdot \sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 2 \ cm \cdot \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow y = 2 \ cm \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 \ cm \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2} \ cm.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 225

Elongacija tijela koje harmonijski titra dana je relacijom $y = \sqrt{2}\ cm \cdot \sin\left(\pi \cdot t\ s^{-1} + \frac{\pi}{4}\right).$

Koliko iznosi elongacija tijela u početnome trenutku?

$$A.\ 1\ cm \qquad B.\ 0\ cm \qquad C.\ \sqrt{2}\ cm \qquad D.\ -1\ cm$$

Rezultat: A.

Zadatak 226 (Roby, gimnazija)

Na elastičnu oprugu obješen je uteg koji titra s amplitudom 5 cm. Kolika je konstanta k opiranja opruge ako znamo da najveća kinetička energija koju može postići uteg iznosi 1 J?

Rješenje 226

A = 5 cm = 0.05 m, E_k = 1 J, k = ?

Najveća kinetička energija tijela koje harmonički titra dana je jednadžbom

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, A amplituda, tj. maksimalna elongacija (udaljenost od položaja ravnoteže).

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = E_k \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = E_k \ / \cdot \frac{2}{A^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 \cdot E_k}{A^2} = \frac{2 \cdot 1\ J}{(0.05\ m)^2} = 800\ \frac{N}{m}.$$

Vježba 226

Na elastičnu oprugu obješen je uteg koji titra s amplitudom 0.5 dm. Kolika je konstanta k opiranja opruge ako znamo da najveća kinetička energija koju može postići uteg iznosi 1 J?

Rezultat: 800 N / m.

Zadatak 227 (Roby, gimnazija)

Kolika je perioda matematičkog njihala, duljine l = 1 m, na Zemlji, a kolika na Mjesecu? Za koliko postotaka treba skratiti duljinu njihala da bi njegova perioda na Mjesecu bila jednaka kao i na Zemlji? (ubrzanje slobodnog pada na Zemlji g_1 = 9.81 m / s^2, ubrzanje slobodnog pada na Mjesecu g_2 = 1.62 m / s^2)

Rješenje 227

l = 1 m, g_1 = 9.81 m / s^2, g_2 = 1.62 m / s^2, T_1 = ?, T_2 = ?, p = ?

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Perioda matematičkog njihala iznosi:

- na Zemlji

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1\ m}{9.81\ \frac{m}{s^2}}} = 2.01\ s$$

- na Mjesecu

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_2}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1\ m}{1.62\ \frac{m}{s^2}}} = 4.94\ s.$$

Budući da uvjet zadatka glasi

$$T_1 = T_2,$$

označimo sa l_1 duljinu njihala na Zemlji, a l_2 njegovu duljina na Mjesecu. Dalje slijedi:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g_2}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g_2}}\ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{g_2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{g_2}}\ /^2 \Rightarrow \frac{l_1}{g_1} = \frac{l_2}{g_2} \Rightarrow \frac{l_2}{g_2} = \frac{l_1}{g_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_2}{g_2} = \frac{l_1}{g_1}\ / \cdot \frac{g_2}{l_1} \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{g_2}{g_1}.$$

Relativno skraćivanje duljine matematičkog njihala je:

$$p = \frac{l_1 - l_2}{l_1} \Rightarrow p = \frac{l_1}{l_1} - \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow p = \frac{l_1}{l_1} - \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow p = 1 - \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow \left[\frac{l_2}{l_1} = \frac{g_2}{g_1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 1 - \frac{g_2}{g_1} = 1 - \frac{1.62\ \frac{m}{s^2}}{9.81\ \frac{m}{s^2}} = 0.835 = \frac{83.5}{100} = 83.5\,\%.$$

Vježba 227

Kolika je perioda matematičkog njihala, duljine l = 1 m, na Marsu? (ubrzanje slobodnog pada na Marsu $g_2 = 3.71\ m / s^2$)

Rezultat: 3.26 s.

Zadatak 228 (Ivan, gimnazija)

Usporedite periode matematičkog njihala na Mjesecu i na Zemlji, ako je ubrzanje slobodnog pada na Mjesecu šest puta manje nego na Zemlji.

Rješenje 228

g_1 ubrzanje na Zemlji, $g_2 = \frac{1}{6} \cdot g_1$ ubrzanje na Mjesecu, $\frac{T_2}{T_1} = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_1}} \\ T_2 &= 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_2}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_2}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\frac{\sqrt{\frac{l}{g_2}}}{\sqrt{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\frac{l}{g_2}}{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\frac{l}{g_2}}{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\frac{1}{g_2}}{\frac{1}{g_1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{g_1}{\frac{1}{6}\cdot g_1}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{g_1}{\frac{1}{6}\cdot g_1}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{6}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{6} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=2.45.$$

Vježba 228

Usporedite periode matematičkog njihala na Zemlji i na Mjesecu, ako je ubrzanje slobodnog pada na Mjesecu šest puta manje nego na Zemlji.

Rezultat: 0.41.

Zadatak 229 (Ana, gimnazija)

Na oprugu koja se djelovanjem sile od 6 N produži za 5 cm objesimo uteg mase 1 kg. Kolika će biti maksimalna brzina utega ako zatitra amplitudom A = 10 cm?

Rješenje 229

F = 6 N, x = 5 cm = 0.05 m, m = 1 kg, A = 10 cm = 0.1 m, v_0 = ?

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F=-k\cdot x$$

kažemo da harmonički titra. Za računanje dovoljno je uzeti

$$F=k\cdot x.$$

gdje je k konstanta elastičnosti.

Elastična opruga produžena za x ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot x^2,$$

gdje je k konstanta opruge.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Budući da je zadana elastična sila F i elongacija x, možemo izračunati k konstantu opruge.

$$F=k\cdot x \Rightarrow k\cdot x=F \Rightarrow k\cdot x=F \;/\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow k=\frac{F}{x}.$$

Zbog zakona očuvanja energije maksimalna kinetička energija E_k bit će jednaka maksimalnoj elastičnoj potencijalnoj energiji E_{ep} pri amplitudi A.

$$\left.\begin{array}{l} k=\frac{F}{x} \\ E_k=E_{ep} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k=\frac{F}{x} \\ \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2=\frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{F}{x}\cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{F}{x}\cdot A^2 \;/\cdot\frac{2}{m} \Rightarrow v_0^2=\frac{F\cdot A^2}{x\cdot m} \Rightarrow v_0^2=\frac{F\cdot A^2}{x\cdot m} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0=\sqrt{\frac{F\cdot A^2}{x\cdot m}} \Rightarrow v_0=A\cdot\sqrt{\frac{F}{x\cdot m}}=0.1\ m\cdot\sqrt{\frac{6\ N}{0.05\ m\cdot 1\ kg}}=1.095\ \frac{m}{s}.$$

Vježba 229

Na oprugu koja se djelovanjem sile od 6 N produži za 0.5 dm objesimo uteg mase 1 kg. Kolika će biti maksimalna brzina utega ako zatitra amplitudom A = 1 dm?

Rezultat: 1.095 m / s.

Zadatak 230 (Antun, srednja škola)

Jedno njihalo učini 15, a drugo 18 njihaja u sekundi. Kako se odnose njihove duljine?

Rješenje 230

$\nu_1 = 15$ Hz, $\nu_2 = 18$ Hz, $\frac{l_1}{l_2}=?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Između frekvencije ν i periode T postoji ova veza:

$$\nu=\frac{1}{T}.$$

Zato vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \\ \nu=\frac{1}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow \nu=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \nu=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}} \;/\cdot 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=1 \Rightarrow 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=1 \;/\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\nu} \Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\nu} \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2=\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\nu}\right)^2 \Rightarrow \frac{l}{g}=\frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot\nu^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l}{g}=\frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot\nu^2} \;/\cdot g \Rightarrow l=\frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot\nu^2}.$$

Računamo omjer duljina njihala.

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = \frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot\nu_1^2} \\ l_2 = \frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot\nu_2^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{\frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot\nu_1^2}}{\frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot\nu_2^2}} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{\frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot\nu_1^2}}{\frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot\nu_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{\frac{1}{\nu_1^2}}{\frac{1}{\nu_2^2}} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{18\ Hz}{15\ Hz}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{18\ Hz}{15\ Hz}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{36}{25}.$$

Vježba 230

Jedno njihalo učini 30, a drugo 36 njihaja u sekundi. Kako se odnose njihove duljine?

Rezultat: $\frac{36}{25}.$

Zadatak 231 (Zvonko, tehnička škola)

Opterećena utegom od 1 kg neka opruga ima periodu titranja 0.567 s. Kolika treba biti masa m_2 da bi perioda bila 1 s?

Rješenje 231

$m_1 = 1$ kg, $T_1 = 0.567$ s, $T_2 = 1$ s, $m_2 = ?$

Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k\cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus.

Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge. Ako se na oprugu objesi masa m opruga se izduži za x.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{načinimo}\\ \text{omjer}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{m_2}{k}}{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{m_2}{k}}{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{T_2}{T_1} \ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)^2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \ /\cdot m_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot m_1 = \left(\frac{1\ s}{0.567\ s}\right)^2 \cdot 1\ kg = 3.11\ kg.$$

Vježba 231

Opterećena utegom od 1 kg neka opruga ima periodu titranja 1.134 s. Kolika treba biti masa m_2 da bi perioda bila 2 s?

Rezultat: 3.11 kg.

Zadatak 232 (Ante, tehnička škola)

Odredi maksimalnu brzinu i akceleraciju točke koja harmonički titra, ako je amplituda 5 cm, a perioda 4 s.

Rješenje 232

A = 5 cm = 0.05 m, T = 4 s, v_0 = ?, a_0 = ?

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonički titra.
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna brzina v_0 i maksimalna akceleracija a_0 tijela koje harmonički titra dane su izrazima

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A \quad , \quad a_0 = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot A,$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T perioda (vrijeme jednog titraja).
Računamo maksimalnu brzinu:

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A = \frac{2 \cdot \pi}{4\ s} \cdot 0.05\ m = 7.85 \cdot 10^{-2}\ \frac{m}{s}.$$

Računamo maksimalnu akceleraciju:

$$a_0 = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot A \Rightarrow a_0 = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot A = \left(\frac{2 \cdot \pi}{4\ s}\right)^2 \cdot 0.05\ m = 1.23 \cdot 10^{-1}\ \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 232

Odredi maksimalnu brzinu i akceleraciju točke koja harmonički titra, ako je amplituda 0.5 dm, a perioda 4 s.

Rezultat: $7.85 \cdot 10^{-2}$ m / s, $1.23 \cdot 10^{-1}$ m / s^2.

Zadatak 233 (Miroslav, tehnička škola)

Koliko dnevno zaostaje ura njihalica kad joj se njihalo produlji za 0.1%?

$A.\ 4\ s \qquad B.\ 43.2\ s \qquad C.\ 3\ \text{min}\ 18\ s \qquad D.\ 12\ \text{min}\ 5\ s$ A

Rješenje 233

T = 1 s perioda ure njihalice, p = 0.1% = 0.001, Δt = ?

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Kako zapisati da se x poveća za p% ?

$$x + \frac{p}{100} \cdot x.$$

Ako duljinu njihala l produljimo za 0.1% dobije se duljina l_1:

$$l_1 = l + p \cdot l \Rightarrow l_1 = l + 0.001 \cdot l \Rightarrow l_1 = 1.001 \cdot l.$$

Perioda T_1 produljenog njihala iznosi:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{l_1}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{1.001 \cdot l}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{1.001 \cdot l}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{1.001} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{1.001} \; / \cdot T \Rightarrow T_1 = \sqrt{1.001} \cdot T = \sqrt{1.001} \cdot 1 \; s = 1.0005 \; s.$$

Svake sekunde ura njihalica zaostaje

$$T_1 - T = 1.0005 \; s - 1 \; s = 0.0005 \; s$$

pa će njezino dnevno zaostajanje iznositi:

$$\Delta t = 24 \cdot 3600 \cdot \left(T_1 - T\right) = 24 \cdot 3600 \cdot 0.0005 \; s = 43.2 \; s.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 233

Koliko dnevno zaostaje ura njihalica kad joj se njihalo produlji za 0.2%?

$A.\ 65.5 \; s \qquad B.\ 75.4 \; s \qquad C.\ 86.4 \; s \qquad D.\ 90.2 \; s$ A

Rezultat: C.

Zadatak 234 (Nataša, medicinska škola)

Odredi periodu njihala ako mu duljinu smanjimo na četvrtinu početne duljine.

Rješenje 234

l – početna duljina njihala, T, $l_1 = \frac{1}{4} \cdot l$, $T_1 = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \\ T_1=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_1}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T}=\frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T}=\sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T}=\sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T}=\sqrt{\frac{l_1}{l}} \Rightarrow \left[l_1=\frac{1}{4}\cdot l\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T}=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\cdot l}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T}=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\cdot l}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T}=\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{T_1}{T}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{T_1}{T}=\frac{1}{2} \; / \cdot T \Rightarrow T_1=\frac{1}{2}\cdot T.$$

Perioda je dva put manja.

2.inačica

$$T_1=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}} \Rightarrow \left[l_1=\frac{1}{4}\cdot l\right] \Rightarrow T_1=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\cdot l}{g}} \Rightarrow T_1=2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \left[T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\right] \Rightarrow T_1=\frac{1}{2}\cdot T.$$

Perioda je dva put manja.

Vježba 234

Odredi periodu njihala ako mu duljinu smanjimo na devetinu početne duljine.

Rezultat: Perioda je tri put manja.

Zadatak 235 (Koma, medicinska škola)

Perioda nekog titranja iznosi 0.05 s. Koliki je broj titraja u pola minute?

Rješenje 235

T = 0.05 s, $t=\frac{1}{2}\text{ min}=30\ s$, n = ?

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T\cdot\nu=1 \Rightarrow T=\frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu=\frac{1}{T}.$$

1.inačica

Budući da je zadana perioda T titranja, broj n titraja za vrijeme t iznosit će:

$$n=\frac{t}{T}=\frac{30\ s}{0.05\ s}=600.$$

2.inačica

Izračunamo broj titraja u jedinici vremena, u jednoj sekundi.

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.05\ s}=20\ \frac{1}{s}.$$

Tada će za t sekundi broj n titraja iznositi:

$$n = t \cdot \nu = 30\ s \cdot 20\ \frac{1}{s} = 600.$$

Vježba 235

Perioda nekog titranja iznosi 0.03 s. Koliki je broj titraja u pola minute?

Rezultat: 1000.

Zadatak 236 (FK, gimnazija)

Jedno njihalo učini 15, a drugo 18 njihaja u sekundi. Kako se odnose njihove duljine?

Rješenje 236

$\nu_1 = 15$ Hz, $\nu_2 = 18$ Hz, $\frac{l_1}{l_2} = ?$

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}} \\ \nu_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\sqrt{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\frac{g}{l_2}}{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\frac{g}{l_2}}{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{l_2}}{\frac{1}{l_1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \,/^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{18\ \frac{1}{s}}{15\ \frac{1}{s}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{18\ \frac{1}{s}}{15\ \frac{1}{s}}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{36}{25}.$$

Vježba 236

Jedno njihalo učini 10, a drugo 12 njihaja u sekundi. Kako se odnose njihove duljine?

Rezultat: $\frac{36}{25}$.

Zadatak 237 (Neda, gimnazija)

Jedno njihalo učini 10, a drugo 9 njihaja za isto vrijeme. Kako se odnose njihove duljine?

Rješenje 237

$n_1 = 10, \quad n_2 = 9, \quad t, \quad \frac{l_1}{l_2} = ?$

Frekvencija titranja ν računa se po formuli

$$\nu = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t.
Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Za vrijeme t prvo njihalo napravi n_1 titraja, a drugo n_2 titraja pa su im frekvencije:

$$\nu_1 = \frac{n_1}{t} \quad , \quad \nu_2 = \frac{n_2}{t}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se traženi omjer duljina.

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}} \\ \nu_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \nu_1 = \frac{n_1}{t} \\ \nu_2 = \frac{n_2}{t} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{n_1}{t} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}} \\ \frac{n_2}{t} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{n_2}{t}}{\frac{n_1}{t}} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\frac{n_2}{\cancel{t}}}{\frac{n_1}{\cancel{t}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\cancel{\frac{1}{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\sqrt{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\frac{g}{l_2}}{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\frac{\cancel{g}}{l_2}}{\frac{\cancel{g}}{l_1}}} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{l_2}}{\frac{1}{l_1}}} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{n_2}{n_1} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{81}{100}.$$

Vježba 237

Jedno njihalo učini 9, a drugo 8 njihaja za isto vrijeme. Kako se odnose njihove duljine?

Rezultat: $\frac{64}{81}.$

Zadatak 238 (Dalibor, srednja škola)

Opruga s utegom titra tako da napravi 45 titraja u minuti. Koliko puta treba povećati masu tijela da bi sustav titrao s 30 titraja u minuti?

Rješenje 238

$n_1 = 45,\qquad t = 1\ \text{min} = 60\ s,\qquad n_2 = 30,\qquad \frac{m_2}{m_1} = ?$

Frekvencija titranja ν računa se po formuli

$$\nu = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t.
Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Tijelo mase m koje harmonički titra ima periodu titranja, odnosno frekvenciju

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}},$$

gdje je k konstanta elastičnosti. Kada je riječ o opruzi konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge.
Najprije odredimo frekvencije titranja sustava prije i poslije promjene mase:

- $\nu_1 = \frac{n_1}{t} = \frac{45}{60\ s} = 0.75\ \frac{1}{s}$
- $\nu_2 = \frac{n_2}{t} = \frac{30}{60\ s} = 0.5\ \frac{1}{s}.$

Iz sustava jednadžbi dobije se omjer masa.

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_1}} \\ \nu_2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe}\end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_1}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_1}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_1}}}{\sqrt{\frac{k}{m_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{\frac{k}{m_1}}{\frac{k}{m_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{\frac{k}{m_1}}{\frac{k}{m_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{m_1}}{\frac{1}{m_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \ /^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{0.75\ \frac{1}{s}}{0.5\ \frac{1}{s}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 2.25 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 2.25 \;/\cdot m_1 \Rightarrow m_2 = 2.25 \cdot m_1.$$

Vježba 238

Opruga s utegom titra tako da napravi 45 titraja u sekundi. Koliko puta treba povećati masu tijela da bi sustav titrao s 30 titraja u sekundi?

Rezultat: $m_2 = 2.25 \cdot m_1.$

Zadatak 239 (Dalibor, srednja škola)

Jedno matematičko njihalo učini 120 titraja, a drugo 160 titraja u minuti. Kako im se odnose duljine?

Rješenje 239

$n_1 = 120, \quad n_2 = 160, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad \frac{l_1}{l_2} = ?$

Frekvencija titranja ν računa se po formuli

$$\nu = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t.
Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Najprije odredimo frekvencije titranja matematičkih njihala:

- $\nu_1 = \frac{n_1}{t} = \frac{120}{60\ s} = 2\ \frac{1}{s}$
- $\nu_2 = \frac{n_2}{t} = \frac{160}{60\ s} = \frac{160}{60\ s} = \frac{8}{3}\ \frac{1}{s}.$

Iz sustava jednadžbi dobije se omjer duljina njihala.

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}} \\ \nu_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\sqrt{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\frac{g}{l_2}}{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\frac{g}{l_2}}{\frac{g}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{l_2}}{\frac{1}{l_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \;/^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\frac{8}{3}\frac{1}{s}}{2\frac{1}{s}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\frac{8}{3}\frac{1}{s}}{\frac{2}{1}\frac{1}{s}}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\frac{8}{3}\frac{1}{s}}{\frac{2}{1}\frac{1}{s}}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{1}}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{16}{9} \Rightarrow l_1 : l_2 = 16 : 9.$$

Vježba 239

Jedno matematičko njihalo učini 12 titraja, a drugo 16 titraja u minuti. Kako im se odnose duljine?

Rezultat: $l_1 : l_2 = 16 : 9.$

Zadatak 240 (Del, gimnazija)

Energija tijela mase 80 g koje titra frekvencijom 5 Hz iznosi 10 J. Kolika je amplituda titranja?

Rješenje 240

m = 80 g = 0.08 kg, ν = 5 Hz, E_k = 10 J, A = ?

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Maksimalna brzina tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$v = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu,$$

gdje je A amplituda, tj. maksimalna elongacija (udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku), ν frekvencija (broj titraja u jedinici vremena).

$$\left.\begin{array}{l} v = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot A^2 \cdot \nu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot A^2 \cdot \nu^2 \Rightarrow E_k = 2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot A^2 \cdot \nu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot A^2 \cdot \nu^2 = E_k \Rightarrow 2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot A^2 \cdot \nu^2 = E_k \;/ \cdot \frac{1}{2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot \nu^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{E_k}{2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot \nu^2} \Rightarrow A^2 = \frac{E_k}{2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot \nu^2} \;/\sqrt{\ } \Rightarrow A = \sqrt{\frac{E_k}{2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot \nu^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\pi \cdot \nu} \cdot \sqrt{\frac{E_k}{2 \cdot m}} = \frac{1}{\pi \cdot 5 \frac{1}{s}} \cdot \sqrt{\frac{10\ J}{2 \cdot 0.08\ kg}} = 0.50\ m = 50\ cm.$$

Vježba 240

Energija tijela mase 160 g koje titra frekvencijom 5 Hz iznosi 20 J. Kolika je amplituda titranja?

Rezultat: 50 cm.