

Zadatak 201 (Dalibor, srednja škola)

Odredi iznos i smjer ubrzanja dizala u kojem njihalo čija je perioda u mirujućem dizalu $T_0 = 1.55$ s ima periodu $T = 1.72$ s. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m/s²)

Rješenje 201

$$T_0 = 1.55 \text{ s}, \quad T = 1.72 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja niže koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

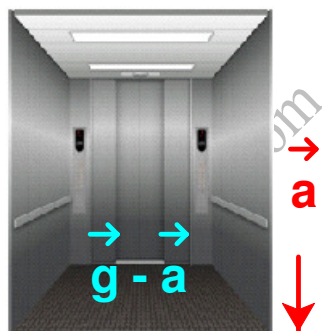
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Kada se sustav spušta ubrzanjem a ukupno ubrzanje je $g - a$ pa perioda titranja iznosi:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g - a}}.$$

Uočimo ako se njihalo **spušta ubrzanjem a** ima periodu koja je veća od periode kada nema ubrzanje a .



Perioda mirujućeg njihala glasi

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

pa dalje slijedi:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \\ T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g - a}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g - a}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g - a}}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{T_0}{T} = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g - a}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l}{g}}{\frac{l}{g - a}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l}{g}}{\frac{l}{g - a}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{1}{\frac{g}{g - a}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g - a}{g}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g - a}{g}} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 = \frac{g - a}{g} \Rightarrow \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 = \frac{g - a}{g} \quad / \cdot g \Rightarrow g \cdot \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 = g - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = g - g \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \Rightarrow a = g \cdot \left(1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right) = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1.55 s}{1.72 s}\right)^2\right) = 1.84 \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 201

Odredi iznos i smjer ubrzanja dizala u kojem njihalo čija je perioda u mirujućem dizalu $T_0 = 3.10$ s ima periodu $T = 3.44$ s. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m/s²)

Rezultat: $1.84 \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 202 (Dalibor, srednja škola)

Odredi iznos i smjer ubrzanja dizala u kojem njihalo čija je perioda u mirujućem dizalu $T_0 = 1.55$ s ima periodu $T = 1.35$ s. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m / s²)

Rješenje 202

$$T_0 = 1.55 \text{ s}, \quad T = 1.35 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja nije koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

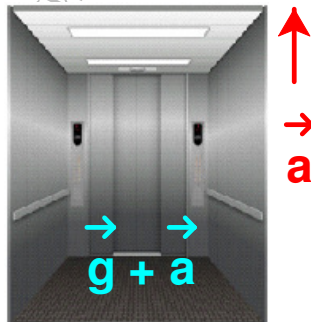
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Kada se sustav uzdiže ubrzanjem a ukupno ubrzanje je $g + a$ pa perioda titranja iznosi:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g+a}}.$$

Uočimo ako se njihalo **uzdiže ubrzanjem a** ima periodu koja je manja od periode kada nema ubrzanje a .



Perioda mirujućeg njihala glasi

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

pa dalje slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g+a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g+a}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g+a}}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{T_0}{T} &= \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g+a}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l}{g}}{\frac{l}{g+a}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{g+a}{l}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g+a}{g}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{T_0}{T} &= \sqrt{\frac{g+a}{g}} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 = \frac{g+a}{g} \Rightarrow \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 = \frac{g+a}{g} \quad / \cdot g \Rightarrow g \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 = g+a \Rightarrow \\ &\Rightarrow g+a = g \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \Rightarrow a = g \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 - g \Rightarrow a = g \cdot \left(\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 - 1\right) = \\ &= 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(\left(\frac{1.55 s}{1.35 s}\right)^2 - 1\right) = 3.12 \frac{m}{s^2}. \end{aligned}$$

Vježba 202

Odredi iznos i smjer ubrzanja dizala u kojem njihalo čija je perioda u mirujućem dizalu $T_0 = 3.10$ s ima periodu $T = 2.70$ s. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m / s²)

Rezultat: $3.12 \frac{m}{s^2}$.

Zadatak 203 (Gabrijela, gimnazija)

Ubrzanje sile teže na površini Mjeseca je 1.61 m / s². Kolika bi ondje bila perioda matematičkog njihala čija je perioda na površini Zemlje 2 s? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m / s²)

Rješenje 203

$$g_1 = 1.61 \text{ m / s}^2, \quad T = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T_1 = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja nije koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Periode matematičkog njihala duljine niti l iznose:

- na površini Mjeseca

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}}$$

- na površini Zemlje

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Iz sustava jednadžbi dobije se perioda T_1 .

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}} \\ T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{l}{g_1}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{l}{g_1} \cdot \frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_1}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{1}{\frac{g_1}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_1}} \cdot T \Rightarrow T_1 = T \cdot \sqrt{\frac{g}{g_1}} = 2 \text{ s} \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1.61 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 4.94 \text{ s}.$$

Vježba 203

Ubrzanje sile teže na površini Mjeseca je 1.61 m/s^2 . Kolika bi ondje bila perioda matematičkog njihala čija je perioda na površini Zemlje 4 s ? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 9.87 s .

Zadatak 204 (Gabi, medicinska škola)

Omjer duljina niti dvaju matematičkih njihala jest $1 : 4$. U kojem su omjeru njihova titrajna vremena?

Rješenje 204

$$l_1 : l_2 = 1 : 4, \quad T_1 : T_2 = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja nije koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Omjer je kvocijent dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

- a – prvi član omjera,
- b – drugi član omjera,
- k – vrijednost (kvocijent) omjera.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad \text{i} \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Budući da je zadan omjer duljina niti dvaju matematičkih njihala, vrijedi:

$$l_1 : l_2 = 1 : 4 \Rightarrow l_2 = 4 \cdot l_1.$$

Periode matematičkih njihala iznose:

- za duljinu l_1

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

- za duljinu l_2

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

Iz sustava jednačbi dobije se omjer perioda T_1 i T_2 .

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ T_2 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{g} \cdot \frac{g}{l_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[l_2 = 4 \cdot l_1 \right] \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{4 \cdot l_1}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{4 \cdot l_1}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_1 : T_2 = 1 : 2.$$

Vježba 204

Omjer duljina niti dvaju matematičkih njihala jest 1 : 9. U kojem su omjeru njihova titrajna vremena?

Rezultat: 1 : 3.

Zadatak 205 (Tony, tehnička škola)

Na vodoravnoj dasci nalazi se tijelo. Zajedno sa tijelom daska titra u vodoravnom smjeru amplitudom 3 cm. Koliki je koeficijent trenja između daske i tijela, ako tijelo počinje klizati po dasci kada je frekvencija titranja 2 Hz? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 205

$$A = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}, \quad v = 2 \text{ Hz}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Ako se tijelo nalazi na vodoravnoj podlozi, tada trenje iznosi

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, m masa tijela, g akceleracija slobodnog pada (ubrzanje sile teže). Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonički titra.

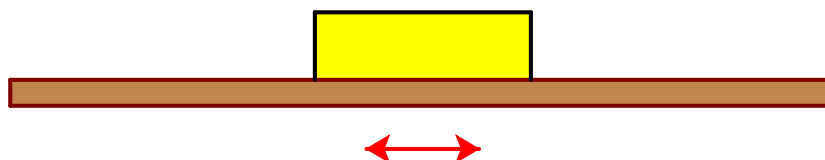
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna akceleracija tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$a = (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot A,$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), ν frekvencija (broj titraja u jedinici vremena).

Sila koja se pojavljuje u ubrzanome sustavu kao posljedica tromosti tijela, a ima smjer suprotan smjeru ubrzanja kojim se ubrzava sustav zove se inercijska sila.

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.



Tijelo počinje klizati po dasci kada je iznos sile trenja F_{tr} manji ili jednak inercijskoj sili F koja djeluje na tijelo.

$$\begin{aligned} F_{tr} \leq F &\Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \leq m \cdot a \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \leq m \cdot a \quad /: m \Rightarrow \mu \cdot g \leq a \Rightarrow \left[a = (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot A \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \cdot g \leq (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot A \Rightarrow \mu \cdot g \leq (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot A \quad /: g \Rightarrow \mu \leq \frac{(2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot A}{g} = \\ &= \frac{\left(2 \cdot \pi \cdot 2 \frac{1}{s} \right)^2 \cdot 0.03 \text{ m}}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 0.48. \end{aligned}$$

Vježba 205

Na vodoravnoj dasci nalazi se tijelo. Zajedno sa tijelom daska titra u vodoravnom smjeru amplitudom 30 mm. Koliki je koeficijent trenja između daske i tijela, ako tijelo počinje klizati po dasci kada je frekvencija titranja 2 Hz? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.48.

Zadatak 206 (Tony, tehnička škola)

Na vodoravnoj ploči nalazi se tijelo. Zajedno sa tijelom ploča titra frekvencijom 2 Hz u okomitom smjeru. Pri kojoj će amplitudi titranja iznos sile kojom tijelo djeluje na podlogu biti tri puta veći od njegove težine u mirovanju? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 206

$$\nu = 2 \text{ Hz}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad A = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno

proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.
 Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna akceleracija tijela koje harmonijski titra dana je izrazom

$$a = (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot A,$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), ν frekvencija (broj titraja u jedinici vremena).
 Sila koja se pojavljuje u ubrzanome sustavu kao posljedica tromosti tijela, a ima smjer suprotan smjeru ubrzanja kojim se ubrzava sustav zove se inercijska sila.

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.



Sila F kojom tijelo djeluje na podlogu jednaka je zbroju težine tijela G i inercijske sile $m \cdot a$.

$$F = G + m \cdot a.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$F = 3 \cdot G.$$

Sada je:

$$\left. \begin{array}{l} F = G + m \cdot a \\ F = 3 \cdot G \end{array} \right\} \Rightarrow G + m \cdot a = 3 \cdot G \Rightarrow m \cdot a = 3 \cdot G - G \Rightarrow m \cdot a = 2 \cdot G \Rightarrow m \cdot a = 2 \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a = (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot A \right] \Rightarrow m \cdot (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot A = 2 \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot A = 2 \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot g}{(2 \cdot \pi \cdot \nu)^2} =$$

$$\Rightarrow A = \frac{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}}{\left(2 \cdot \pi \cdot 2 \frac{1}{s}\right)^2} = 0.1242 \text{ m} = 12.42 \text{ cm}.$$

Vježba 206

Na vodoravnoj ploči nalazi se tijelo. Zajedno sa tijelom ploča titra frekvencijom 2 Hz u okomitom smjeru. Pri kojoj će amplitudi titranja iznos sile kojom tijelo djeluje na podlogu biti dva puta veći od njegove težine u mirovanju? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 6.21 cm.

Zadatak 207 (Anya, gimnazija)

Kolika je amplituda, perioda i frekvencija titranja tijela koje titra prema jednadžbi
 $x(t) = 42 \text{ cm} \cdot \sin\left(5 \cdot \pi \text{ s}^{-1} \cdot t\right)$?

Rješenje 207

$$A = ?, \quad T = ?, \quad \nu = ?$$

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je x elongacija (udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku), A amplituda (maksimalna elongacija), T vrijeme jednog titraja (perioda).

Preoblikujemo zadanu jednadžbu i usporedimo je sa

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right).$$

$$\left. \begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ x = 42 \text{ cm} \cdot \sin\left(5 \cdot \pi \text{ s}^{-1} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ x = 42 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{5} \text{ s}} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ x = 42 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\frac{2}{5} \text{ s}} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ x = 42 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\frac{2}{5} \text{ s}} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 42 \text{ cm} \\ T = \frac{2}{5} \text{ s} \end{array} \right\}.$$

Računamo frekvenciju.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2}{5} \text{ s}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1} \text{ s}^{-1} = \frac{5}{2} \text{ s}^{-1} = 2.5 \text{ Hz}.$$

Vježba 207

Kolika je amplituda, perioda i frekvencija titranja tijela koje titra prema jednadžbi $x(t) = 24 \text{ cm} \cdot \sin\left(4 \cdot \pi \text{ s}^{-1} \cdot t\right)$?

Rezultat: $A = 24 \text{ cm}$, $T = 0.5 \text{ s}$, $\nu = 2 \text{ Hz}$.

Zadatak 208 (Samir, gimnazija)

Ako tijelo mase 100 g objesimo na oprugu ona se produlji za 10 cm . Koliko je vrijeme jednog titraja (periode)? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m} / \text{s}^2$)

Rješenje 208

$$m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}, \quad x = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m} / \text{s}^2, \quad T = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

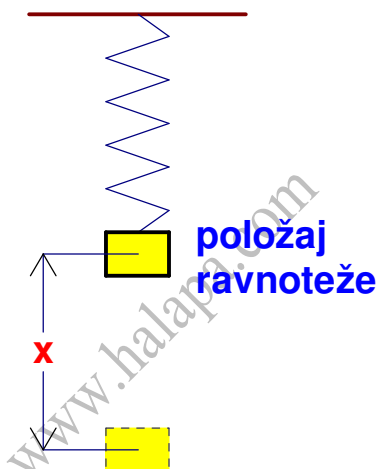
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra.

Kada na tijelo mase m djeluje harmonička (elastična) sila kakva je, na primjer, sila opruge vrijedi jednačba

$$F = -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} \cdot x,$$

gdje je x pomak iz položaja ravnoteže (elongacija), T perioda (vrijeme jednog titraja). Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim zadacima može se predznak minus izostaviti.



1. inačica

Kada uteg mase m visi na opruzi sila teža G jednaka je sili opruge (harmoničkoj, elastičnoj sili) F .

$$G = F \Rightarrow m \cdot g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} \cdot x \Rightarrow m \cdot g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} \cdot x \cdot \frac{T^2}{m \cdot g} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot x}{g} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot x}{g} \cdot \sqrt{} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot x}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.1 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.63 \text{ s}$$

2. inačica

Elastična sila koja djeluje na oprugu je sila teža pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} F = G \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \cdot x = m \cdot g \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \cdot x = m \cdot g \cdot \frac{1}{x} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k = \frac{m \cdot g}{x} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{x}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{x}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}}$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.1 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.63 \text{ s.}$$

Vježba 208

Ako tijelo mase 100 g objesimo na oprugu ona se produlji za 40 cm. Koliko je vrijeme jednog titraja (periode)? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.27 s.

Zadatak 209 (Ante, srednja škola)

Na oprugu koja se djelovanjem sile od 6 N produži za 5 cm objesimo uteg mase 1 kg. Kolika će biti maksimalna brzina tog utega ako zatitra amplitudom 10 cm?

Rješenje 209

$$F = 6 \text{ N}, \quad x = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad v_0 = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravo proporcionalna pomaku x , smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonički titra. Za računanje dovoljno je uzeti

$$F = k \cdot x$$

gdje je k konstanta elastičnosti.

Elastična opruga produžena za x ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je k konstanta opruge.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Budući da je zadana elastična sila F i elongacija x , možemo izračunati k konstantu opruge.

$$F = k \cdot x \Rightarrow k \cdot x = F \Rightarrow k \cdot x = F \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow k = \frac{F}{x}.$$

Zbog zakona očuvanja energije maksimalna kinetička energija E_k bit će jednaka maksimalnoj elastičnoj potencijalnoj energiji E_{ep} pri amplitudi A .

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{F}{x} \\ E_k = E_{ep} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k = \frac{F}{x} \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{x} \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{x} \cdot A^2 \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v_0^2 = \frac{F \cdot A^2}{x \cdot m} \Rightarrow v_0 = \frac{F \cdot A^2}{x \cdot m} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{F \cdot A^2}{x \cdot m}} \Rightarrow v_0 = A \cdot \sqrt{\frac{F}{x \cdot m}} = 0.1 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{6 \text{ N}}{0.05 \text{ m} \cdot 1 \text{ kg}}} = 1.095 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vježba 209

Na oprugu koja se djelovanjem sile od 6 N produži za 50 mm objesimo uteg mase 1 kg. Kolika će biti maksimalna brzina tog utega ako zatitra amplitudom 1 dm?

Rezultat: 1.095 m / s.

Zadatak 210 (Matija, gimnazija)

Tijelo koje harmonički titra frekvencijom 2 Hz i početnom fazom nula ima elongaciju 5 cm kad mu je faza $\frac{\pi}{6}$. Kolika je amplituda titranja? Koje je vrijeme potrebno tijelu da iz položaja ravnoteže dođe u taj položaj?

Rješenje 210

$$v = 2 \text{ Hz}, \quad \varphi_0 = 0, \quad A = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}, \quad A = ?, \quad t = ?$$

Frekvencija v je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi).
Kutna (kružna) frekvencija je

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v.$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot v \cdot t) \quad , \quad x = A \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

gdje je x elongacija (udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku), A amplituda (maksimalna elongacija), ω kutna frekvencija, t vrijeme. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$x = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot v \cdot t + \varphi_0) \quad , \quad x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad , \quad x = A \cdot \sin \varphi,$$

gdje je $\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$ faza titranja u trenutku t , φ_0 faza u trenutku $t = 0$.
Računamo amplitudu A .

$$\begin{aligned} x = A \cdot \sin \varphi \Rightarrow A \cdot \sin \varphi = x \Rightarrow A \cdot \sin \varphi = x \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \Rightarrow A = \frac{x}{\sin \varphi} &= \frac{0.05 \text{ m}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \\ &= \frac{0.05 \text{ m}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 0.05 \text{ m} = 0.1 \text{ m}. \end{aligned}$$

Računamo vrijeme t potrebno tijelu da iz položaja ravnoteže dođe u zadani položaj.

$$\begin{aligned} \varphi = \omega \cdot t + \varphi_0 \Rightarrow \omega \cdot t + \varphi_0 = \varphi \Rightarrow \omega \cdot t = \varphi - \varphi_0 \Rightarrow \omega \cdot t = \varphi - \varphi_0 \cdot \frac{1}{\omega} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{\varphi - \varphi_0}{\omega} \Rightarrow [\omega = 2 \cdot \pi \cdot v] \Rightarrow t = \frac{\varphi - \varphi_0}{2 \cdot \pi \cdot v} = \frac{\frac{\pi}{6} - 0}{2 \cdot \pi \cdot 2 \frac{1}{\text{s}}} = \frac{\frac{\pi}{6}}{4 \cdot \pi} \text{ s} = \frac{\pi}{4 \cdot \pi} \text{ s} = \frac{1}{24} \text{ s}. \end{aligned}$$

Vježba 210

Tijelo koje harmonički titra frekvencijom 2 Hz i početnom fazom nula ima elongaciju 0.5 dm kad mu je faza $\frac{\pi}{6}$. Kolika je amplituda titranja? Koje je vrijeme potrebno tijelu da iz položaja ravnoteže dođe u taj položaj?

Rezultat: $A = 0.1 \text{ m}, t = \frac{1}{24} \text{ s}.$

Zadatak 211 (Maturant, gimnazija)

Val je opisan jednadžbom $y = 0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}} - \frac{20 \cdot \pi \cdot t}{\text{s}}\right)$. Odredite amplitudu, periodu, valnu duljinu, frekvenciju, brzinu vala i elongaciju točke koja je udaljena 12.5 m od izvora vala u trenutku $t = 0.1 \text{ s}$.

Rješenje 211

$$y = 0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}} - \frac{20 \cdot \pi \cdot t}{\text{s}}\right), \quad x = 12.5 \text{ m}, \quad t = 0.1 \text{ s}, \quad A = ?, \quad T = ?,$$

$$\lambda = ?, \quad v = ?, \quad v = ?, \quad y = ?$$

Funkcija sinus je neparna funkcija.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Val je širenje titranja iz izvora vala kroz neko sredstvo. Zrake vala su pravci po kojima se titranje širi od čestice do čestice. Udaljenost za koju se val proširio dok čestica u izvoru napravi jedan potpuni titraj zove se duljina vala λ . Veza između valne duljine λ , periode T i brzine vala v je

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Frekvencija v je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije v i periode T postoji veza:

$$T \cdot v = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{v} \Rightarrow v = \frac{1}{T}.$$

Kada se neprigušeni harmonički titraji iz izvora prostiru brzinom v u smjeru pozitivne osi x , elongacija $y(x, t)$ točke koja je udaljena za x od izvora vala jednaka je

$$y(x, t) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\lambda}\right),$$

gdje su A amplituda, T perioda titranja i λ valna duljina.

Preoblikujemo zadanu jednadžbu vala.

$$\begin{aligned} y &= 0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}} - \frac{20 \cdot \pi \cdot t}{\text{s}}\right) \Rightarrow y = 0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(-\left(\frac{20 \cdot \pi \cdot t}{\text{s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}}\right)\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= -0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{20 \cdot \pi \cdot t}{\text{s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}}\right) \Rightarrow y = -0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{10 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t}{\text{s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= -0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{\frac{1}{10} \text{ s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}}\right) \Rightarrow y = -0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{0.1 \text{ s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}}\right). \end{aligned}$$

Sada očitamo vrijednosti za amplitudu, periodu i valnu duljinu. je:

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\lambda}\right) \\ y &= -0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{0.1 \text{ s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y(x, t) &= A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\lambda}\right) \\ y &= -0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{0.1 \text{ s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 0.15 \text{ m} \\ \Rightarrow T &= 0.1 \text{ s} \\ \lambda &= 10 \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

Računamo frekvenciju ν .

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.1 \text{ s}} = 10 \text{ Hz.}$$

Računamo brzinu vala v .

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{10 \text{ m}}{0.1 \text{ s}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Računamo elongaciju y .

$$\left. \begin{aligned} x &= 12.5 \text{ m}, \quad t = 0.1 \text{ s} \\ y(x, t) &= 0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{10 \text{ m}} - \frac{20 \cdot \pi \cdot t}{\text{s}}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(12.5 \text{ m}, 0.1 \text{ s}) = 0.15 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 12.5 \text{ m}}{10 \text{ m}} - \frac{20 \cdot \pi \cdot 0.1 \text{ s}}{\text{s}}\right) \Rightarrow y(12.5 \text{ m}, 0.1 \text{ s}) = 0.15 \text{ m}.$$

Vježba 211

Val je opisan jednačbom $y = 0.12 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{20 \text{ m}} - \frac{10 \cdot \pi \cdot t}{\text{s}}\right)$. Odredite amplitudu, periodu i

valnu duljinu vala.

Rezultat: $A = 0.12 \text{ m}, T = 0.2 \text{ s}, \lambda = 20 \text{ m}.$

Zadatak 212 (Niky, gimnazija)

Kada dvije glazbene vilice istodobno odašilju zvuk čujemo jedan udar svake 0.3 s. Za koliko se razlikuju frekvencije tih glazbenih vilica?

Rješenje 212

$$n = 1, \quad t = 0.3 \text{ s}, \quad \nu_u = ?$$

Udari nastaju superpozicijom dvaju valova koji se vrlo malo razlikuju u frekvencijama. Broj udara u sekundi jednak je razlici frekvencija valova koji interferiraju:

$$\nu_u = \nu_1 - \nu_2.$$

Frekvencija ν je broj titraja (ophoda) u jedinici vremena.

Frekvencija titranja ν računa se po formuli

$$\nu = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t .

Budući da je razlika frekvencija jednaka broju udara, vrijedi:

$$\nu_u = \frac{n}{t} = \frac{1}{0.3 \text{ s}} = 3.33 \frac{1}{\text{s}} = 3.33 \text{ Hz.}$$

Vježba 212

Kada dvije glazbene vilice istodobno odašilju zvuk čujemo dva udara svakih 0.6 s. Za koliko se razlikuju frekvencije tih glazbenih vilica?

Rezultat: $3.33 \text{ Hz}.$

Zadatak 213 (Niky, gimnazija)

Neka svirala emitira zvuk frekvencije 196 Hz. Kad ona i G žica violine zajedno emitiraju zvuk može se čuti 10 udara u 8 s. Udari su sve rjeđi kad se violinska žica polako napinje. Kolika je prvotna frekvencija violinske žice?

Rješenje 213

$$v_1 = 196 \text{ Hz}, \quad n = 10, \quad t = 8 \text{ s}, \quad v_2 = ?$$

Udari nastaju superpozicijom dvaju valova koji se vrlo malo razlikuju u frekvencijama. Broj udara u sekundi jednak je razlici frekvencija valova koji interferiraju:

$$v_u = v_1 - v_2.$$

Frekvencija v je broj titraja (ophoda) u jedinici vremena.

Frekvencija titranja v računa se po formuli

$$v = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t .



$$\left. \begin{array}{l} v_u = \frac{n}{t} \\ v_u = v_1 - v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{n}{t} = v_1 - v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 - \frac{n}{t} =$$
$$\Rightarrow v_2 = 196 \text{ Hz} - \frac{10}{8 \text{ s}} = 196 \frac{1}{\text{s}} - 1,25 \frac{1}{\text{s}} = 194,75 \frac{1}{\text{s}} = 194,75 \text{ Hz}.$$

Vježba 213

Neka svirala emitira zvuk frekvencije 196 Hz. Kad ona i G žica violine zajedno emitiraju zvuk može se čuti 20 udara u 16 s. Udari su sve rjeđi kad se violinska žica polako napinje. Kolika je prvotna frekvencija violinske žice?

Rezultat: 194.75 Hz.

Zadatak 214 (Josip, gimnazija)

Tijelo mase 2 kg, ovješeno o oprugu konstante elastičnosti 200 N / m, titra vertikalno. Amplituda titranja je 2 cm. Kako glasi izraz za elongaciju toga tijela u ovisnosti o vremenu?

$$\begin{array}{ll} A. y = 2 \text{ m} \cdot \sin\left(100 \text{ s}^{-1} \cdot t\right) & B. y = 2 \text{ m} \cdot \sin\left(10 \text{ s}^{-1} \cdot t\right) \\ C. y = 2 \text{ cm} \cdot \sin\left(100 \text{ s}^{-1} \cdot t\right) & D. y = 2 \text{ cm} \cdot \sin\left(10 \text{ s}^{-1} \cdot t\right) \end{array}$$

Rješenje 214

$$m = 2 \text{ kg}, \quad k = 200 \text{ N / m}, \quad A = 2 \text{ cm}, \quad y = ?$$

Pomak, elongacija ili udaljenost y od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra, mijenja se s vremenom prema

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je y elongacija, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titraja ili perioda.

Perioda titranja dana je jednačbom

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ova formula obično se upotrebljava kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; tada je k konstanta opruge (znači silu potrebnu za jedinično produženje opruge).

$$\left. \begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ y &= A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \cdot t\right) \Rightarrow y = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = A \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{m}{k}}} \cdot t\right) \Rightarrow y = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \Rightarrow y = 2 \text{ cm} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2 \text{ kg}}} \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 \text{ cm} \cdot \sin\left(10 \text{ s}^{-1} \cdot t\right).$$

Odgovor je pod D.

Vježba 214

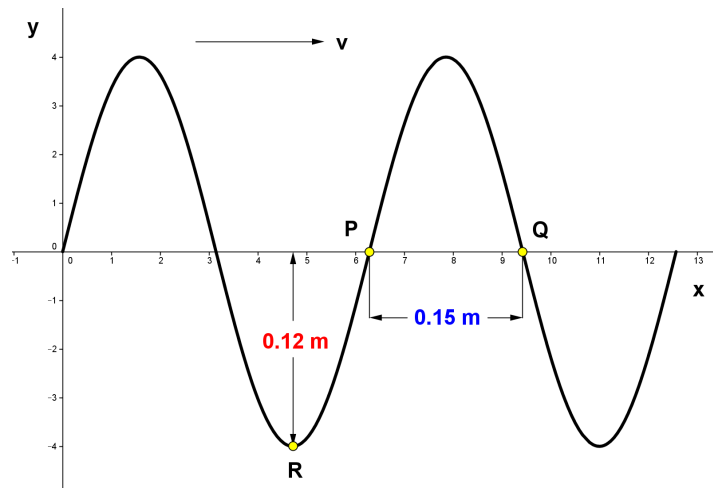
Tijelo mase 4 kg, ovješeno o oprugu konstante elastičnosti 400 N / m, titra vertikalno. Amplituda titranja je 2 cm. Kako glasi izraz za elongaciju toga tijela u ovisnosti o vremenu?

A. $y = 2 \text{ m} \cdot \sin\left(100 \text{ s}^{-1} \cdot t\right)$ B. $y = 2 \text{ m} \cdot \sin\left(10 \text{ s}^{-1} \cdot t\right)$
 C. $y = 2 \text{ cm} \cdot \sin\left(100 \text{ s}^{-1} \cdot t\right)$ D. $y = 2 \text{ cm} \cdot \sin\left(10 \text{ s}^{-1} \cdot t\right)$

Rezultat: D.

Zadatak 215 (Matija, srednja škola)

Crtež prikazuje transverzalni val u nekome trenutku koji se širi duž osi x brzinom 1.5 m / s kroz neko sredstvo. Udaljenost od točke P do točke Q jest 0.15 m. Udaljenost točke R od osi x jest 0.12 m. Kolika je maksimalna brzina čestice toga vala?



Rješenje 215

$$v = 1.5 \text{ m / s}, \quad A = |xR| = 0.12 \text{ m}, \quad \frac{\lambda}{2} = |PQ| = 0.15 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 2 \cdot 0.15 \text{ m} = 0.3 \text{ m},$$

$v_0 = ?$

Val je širenje titranja iz izvora vala kroz neko sredstvo. Zrake vala su pravci po kojima se titranje širi od čestice do čestice. Udaljenost za koju se val proširio dok čestica u izvoru napravi jedan potpuni titraj zove se duljina vala λ . Veza između valne duljine λ , periode (vremena jednog ophoda, titraja) T i brzine vala v je

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v}$$

Maksimalna brzina tijela koje harmonički titra dana je izrazom

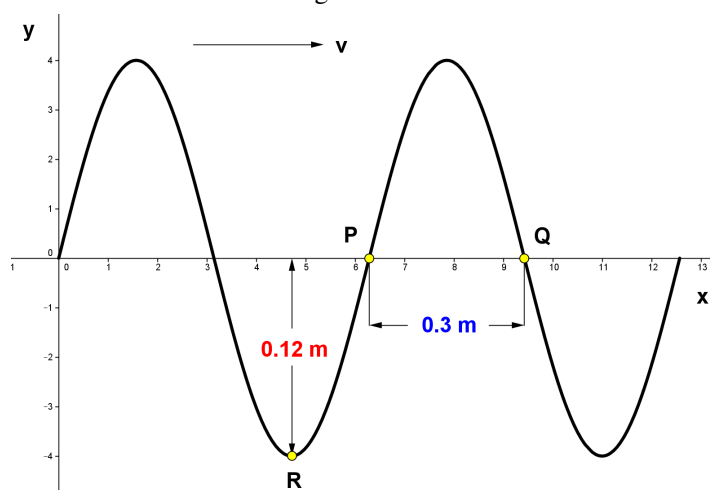
$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A amplituda (najveća udaljenost od ravnotežnog položaja), T perioda.

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{\lambda}{v} \\ v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \end{array} \right\} \Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{\frac{\lambda}{v}} \Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A \cdot v}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.12 \text{ m} \cdot 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.3 \text{ m}} = 3.77 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vježba 215

Crtež prikazuje transverzalni val u nekome trenutku koji se širi duž osi x brzinom 3 m/s kroz neko sredstvo. Udaljenost od točke P do točke Q jest 0.3 m. Udaljenost točke R od osi x jest 0.12 m. Kolika je maksimalna brzina čestice toga vala?



Rezultat: 3.77 m/s.

Zadatak 216 (Vanja, srednja škola)

Uže je dugo 12 m. Pokus pokazuje da transverzalni val prelazi s jednog kraja na drugi za 1.5 s, ako uže nateže sila od 20 N. Kolika je ukupna masa užeta?

Rješenje 216

$$l = 12 \text{ m}, \quad t = 1.5 \text{ s}, \quad F = 20 \text{ N}, \quad m = ?$$

Val je širenje titranja iz izvora vala kroz neko sredstvo. Na napetom užetu ili žici val se širi brzinom

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}},$$

gdje je F napetost užeta, l duljina užeta, m njegova masa.

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow v = \frac{s}{t},$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Budući da transversalni val prelazi s jednog kraja užeta na drugi stalnom brzinom, vrijedi sustav jednačbi:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{l}{t} \\ v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{l}{t} = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \Rightarrow \frac{l}{t} = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \cdot \sqrt{l^2} \Rightarrow \left(\frac{l}{t}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{F \cdot l}{m}}\right)^2 \Rightarrow \frac{l^2}{t^2} = \frac{F \cdot l}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{t^2} = \frac{F \cdot l}{m} \cdot \frac{m \cdot t^2}{l^2} \Rightarrow m = \frac{F \cdot t^2}{l} = \frac{20 \text{ N} \cdot (1.5 \text{ s})^2}{12 \text{ m}} = 3.75 \text{ kg}.$$

Vježba 216

Uže je dugo 24 m. Pokus pokazuje da transversalni val prelazi s jednog kraja na drugi za 1.5 s, ako uže nateže sila od 40 N. Kolika je ukupna masa užeta?

Rezultat: 3.75 kg.

Zadatak 217 (Vlatka, maturantica)

Glazbenu vilicu frekvencije 550 Hz držimo iznad otvorenog kraja cijevi u kojoj je zrak i koja je s donje strane zatvorena. Pretpostavimo li da je brzina zvuka u zraku 330 m/s do rezonancije između glazbene vilice i stupca zraka doći će ako je duljina stupca zraka:

- A. 7.5 cm B. 30 cm C. 60 cm D. 15 cm

Rješenje 217

$$v = 550 \text{ Hz}, \quad v = 330 \text{ m/s}, \quad l = ?$$

Valovi prenose energiju. Oni se kroz sredstvo rasprostiru određenom brzinom. Osnovna relacija valnog gibanja je

$$v = \lambda \cdot \nu,$$

gdje je v brzina, λ valna duljina, ν frekvencija.

Brzina rasprostiranja vala jednaka je umnošku valne duljine i frekvencije.

Rezonancija je pojava najvećeg prenošenja energije titranja s izvanjskog oscilatora na titrajni sustav koji prisilno titra kada su njihove frekvencije jednake.

Rezonantna frekvencija stupca zraka u svirali zatvorenoj na jednom kraju je

$$\nu = \frac{2 \cdot k + 1}{4 \cdot l} \cdot v,$$

gdje je $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, l duljina svirale, v brzina širenja vala.

$$\left. \begin{array}{l} k = 0 \text{ osnovni ton} \\ \nu = \frac{2 \cdot k + 1}{4 \cdot l} \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow \nu = \frac{2 \cdot 0 + 1}{4 \cdot l} \cdot v \Rightarrow \nu = \frac{1}{4 \cdot l} \cdot v \Rightarrow \nu = \frac{1}{4 \cdot l} \cdot v \cdot \frac{l}{\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \frac{v}{4 \cdot \nu} = \frac{330 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \cdot 550 \frac{1}{\text{s}}} = 0.15 \text{ m} = 15 \text{ cm}.$$

Odgovor je pod D.

Ili ovako!

Izračunamo duljinu vala zvuka.

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{330 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{550 \frac{1}{\text{s}}} = 0.6 \text{ m} = 60 \text{ cm}.$$

Do rezonancije doći će ako je stupac zraka u cijevi četvrtina valne duljine zvuka.

$$l = \frac{1}{4} \cdot \lambda = \frac{1}{4} \cdot 60 \text{ cm} = 15 \text{ cm}.$$

Odgovor je pod D.



Vježba 217

Glazbenu vilicu frekvencije 0.55 kHz držimo iznad otvorenog kraja cijevi u kojoj je zrak i koja je s donje strane zatvorena. Pretpostavimo li da je brzina zvuka u zraku 330 m / s do rezonancije između glazbene vilice i stupca zraka doći će ako je duljina stupca zraka:

- A. 7.5 cm B. 30 cm C. 60 cm D. 15 cm

Rezultat: D.

Zadatak 218 (Doris, gimnazija)

Uteg se objesi na oprugu i ona se produži za 5 cm. Za koliko će se skratiti opruga ako je opruga s utegom obješena na strop dizala koje se spušta ubrzanjem od 3 m / s²? (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s²)

- A. 1.53 cm B. 3.07 cm C. 5.00 cm D. 2.71 cm

Rješenje 218

$$s = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, \quad a = 3 \text{ m / s}^2, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad \Delta s = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a, neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju – a . U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila – m · a . Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Nalazi li se tijelo u akceleriranom sustavu koji se giba akceleracijom a, s obzirom na laboratorijski sustav vertikalno prema dolje, težina se smanjuje

$$G = m \cdot g - m \cdot a \Rightarrow G = m \cdot (g - a).$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za neko tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = - k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Slovom x označili smo elongaciju, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku. Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = - k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji.

Kada uteg mase m visi na opruzi sila teža jednaka je sili opruge.

Ako dizalo miruje ili se giba jednoliko za produžetak s opruge, vrijedi:

$$G = F \Rightarrow m \cdot g = k \cdot s \Rightarrow k \cdot s = m \cdot g.$$

Giba li se dizalo ubrzano vertikalno prema dolje akceleracijom a , inercijska sila usmjerena je prema gore te je težina utega (tj. sila kojom uteg djeluje na oprugu) jednaka

$$G_1 = m \cdot g - m \cdot a \Rightarrow G_1 = m \cdot (g - a)$$

pa za produžetak s_1 opruge vrijedi

$$G_1 = F_1 \Rightarrow m \cdot (g - a) = k \cdot s_1 \Rightarrow k \cdot s_1 = m \cdot (g - a).$$

Iz sustava jednadžbi izračuna se produžetak opruge s_1 .

$$\left. \begin{array}{l} k \cdot s = m \cdot g \\ k \cdot s_1 = m \cdot (g - a) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{k \cdot s_1}{k \cdot s} = \frac{m \cdot (g - a)}{m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k \cdot s_1}{k \cdot s} = \frac{m \cdot (g - a)}{m \cdot g} \Rightarrow \frac{s_1}{s} = \frac{g - a}{g} \Rightarrow \frac{s_1}{s} = \frac{g - a}{g} / \cdot s \Rightarrow s_1 = \frac{g - a}{g} \cdot s.$$

Skraćenje opruge iznosi:

$$\Delta s = s - s_1 \Rightarrow \Delta s = s - \frac{g - a}{g} \cdot s \Rightarrow \Delta s = s \cdot \left(1 - \frac{g - a}{g} \right) \Rightarrow \Delta s = s \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{g - a}{g} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = s \cdot \frac{g - (g - a)}{g} \Rightarrow \Delta s = s \cdot \frac{g - g + a}{g} \Rightarrow \Delta s = s \cdot \frac{g - g + a}{g} \Rightarrow \Delta s = s \cdot \frac{a}{g} =$$

$$= 0.05 \text{ m} \cdot \frac{3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.0153 \text{ m} = 1.53 \text{ cm}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 218

Uteg se objesi na oprugu i ona se produži za 50 mm. Za koliko će se skratiti opruga ako je opruga s utegom obješena na strop dizala koje se spušta ubrzanjem od 3 m/s^2 ? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

- A. 1.53 cm B. 3.07 cm C. 5.00 cm D. 2.71 cm

Rezultat: A.

Zadatak 219 (Sanja, buduća maturantica ☺)

Ako ura njihalica kasni treba:

- A. povećati duljinu njihala B. povećati masu kuglice
C. skratiti duljinu njihala D. povećati amplitudu njihala

Rješenje 219

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja nije koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

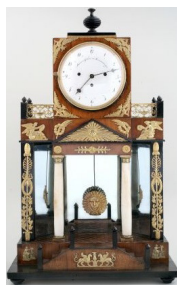
gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Perioda njihala razmjerna (proporcionalna) je kvadratnom korijenu duljine njihala.

$$T \sim \sqrt{l}.$$

Istodobno vidimo da vrijeme jednog titraja ne ovisi ni o masi kuglice, ni o amplitudi .

Budući da ura njihalica kasni, znači da je vrijeme titraja (perioda) predugo. Perioda je razmjerna s kvadratnim korijenom duljine njihala pa njegovu duljinu treba smanjiti.
Odgovor je pod C.



Vježba 219

Ako ura njihalica rani (ide naprijed) treba:

- A. povećati duljinu njihala B. povećati masu kuglice
C. skratiti duljinu njihala D. povećati amplitudu njihala

Rezultat: A.

Zadatak 220 (Sanja, buduća maturantica ☺)

Njihalo učini 30 njihaja (titraja) u minuti. Vrijeme između dva uzastopna položaja s elongacijom jednakom 0 je:

- A. 4 s B. 1 s C. 2 s D. 0.5 s

Rješenje 220

$$n = 30, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad t_1 = ?$$

Pri titranju (njihanju) perioda T je vrijeme jednog titraja (njihaja).

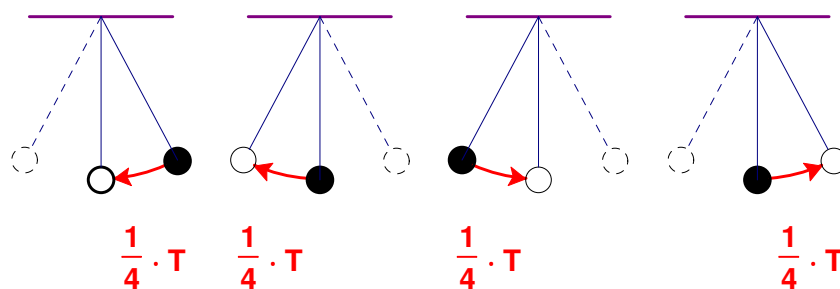
$$T = \frac{t}{n}$$

gdje je t vrijeme titranja, n broj titraja.

Elongacija neke materijalne točke u određenom času pri titranju je udaljenost točke od položaja ravnoteže.

Perioda njihala (jednog titraja) iznosi 2 s.

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60 \text{ s}}{30} = 2 \text{ s.}$$



Između dva prolaza kroz položaj ravnoteže (položaj u kome je elongacija jednaka 0) njihalo načini dvostruku četvrtinu titraja:

$$t_1 = 2 \cdot \frac{T}{4} = 2 \cdot \frac{2 \text{ s}}{4} = 1 \text{ s.}$$

Odgovor je pod B.

Vježba 220

Njihalo učini 60 njihaja (titraja) u 2 minute. Vrijeme između dva uzastopna položaja s elongacijom jednakom 0 je:

- A. 4 s B. 1 s C. 2 s D. 0.5 s

Rezultat: B.

www.halapa.com