

Zadatak 181 (Danijel, tehnička škola)

Matematičko njihalo duljine 0.50 m obješeno je u kabini zrakoplova koji leti horizontalnim ubrzanjem $a = 3.5 \text{ m/s}^2$. Kolika je frekvencija titranja njihala? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 181

$$l = 0.50 \text{ m}, \quad a = 3.5 \text{ m/s}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja niže koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Frekvencija titranja matematičkog njihala jest

$$v = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Budući da zrakoplov leti horizontalnim ubrzanjem a , a ubrzanje slobodnog pada je g , rezultantno ubrzanje a_1 iznosit će:



$$a_1^2 = g^2 + a^2 \Rightarrow a_1 = \sqrt{g^2 + a^2}$$

Frekvencija titranja njihala je:

$$v = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{a_1}{l}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}}{0.50 \text{ m}}} = 0.726 \frac{1}{\text{s}} = 0.726 \text{ Hz.}$$

Vježba 181

Matematičko njihalo duljine 50 cm obješeno je u kabini zrakoplova koji leti horizontalnim ubrzanjem $a = 3.5 \text{ m/s}^2$. Kolika je frekvencija titranja njihala? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.726 Hz.

Zadatak 182 (Josip, gimnazija)

Harmonički val ima amplitudu 10 cm, periodu 0.7 s i valnu duljinu 20 cm. Odredi elongaciju vala za $t = 5 \text{ s}$, $x = 30 \text{ cm}$.

Rješenje 182

$$A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad T = 0.7 \text{ s}, \quad \lambda = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad t = 5 \text{ s}, \quad x = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m},$$
$$y = ?$$

Elongaciju y koje god točke koja se nalazi na udaljenosti x od izvora vala u bilo koje vrijeme t možemo naći iz jednadžbe vala

$$y = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

gdje je A amplituda vala (maksimalna elongacija), t vrijeme, T perioda, x udaljenost od izvora vala, λ

valna duljina.

Računamo elongaciju y iz zadanih podataka.

$$y = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0.1 \text{ m} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5 \text{ s}}{0.7 \text{ s}} - \frac{0.3 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} \right) = 0.1 \text{ m} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5 \text{ s}}{0.7 \text{ s}} - \frac{0.3 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} \right) =$$



$$= 0.1 \text{ m} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{0.7} - \frac{0.3}{0.2} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{džepno računalo treba} \\ \text{biti u stanju RAD} \end{array} \right] = -0.0782 \text{ m} = -7.82 \text{ cm.}$$

Vježba 182

Harmonički val ima amplitudu 1 dm, periodu 0.7 s i valnu duljinu 2 dm. Odredi elongaciju vala za $t = 5$ s, $x = 3$ dm.

Rezultat: -7.82 cm.

Zadatak 183 (Josip, gimnazija)

Harmonički val ima amplitudu 10 cm, periodu T i valnu duljinu λ . Odredi elongaciju vala za $t = \frac{T}{3}$, $x = 3 \cdot \lambda$.

Rješenje 183

$$A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad T, \quad \lambda, \quad t = \frac{T}{3}, \quad x = 3 \cdot \lambda, \quad y = ?$$

Elongaciju y koje god točke koja se nalazi na udaljenosti x od izvora vala u bilo koje vrijeme t možemo naći iz jednadžbe vala

$$y = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

gdje je A amplituda vala (maksimalna elongacija), t vrijeme, T perioda, x udaljenost od izvora vala, λ valna duljina.

Računamo elongaciju y iz zadanih podataka.

$$y = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0.1 \text{ m} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\frac{T}{3}}{T} - \frac{3 \cdot \lambda}{\lambda} \right) = 0.1 \text{ m} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\frac{T}{3}}{T} - \frac{3 \cdot \lambda}{\lambda} \right) =$$



$$= 0.1 \text{ m} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\frac{T}{3}}{T} - 3 \right) = 0.1 \text{ m} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3} - 3 \right) = \left[\begin{array}{l} \text{džepno računalo treba} \\ \text{biti u stanju RAD} \end{array} \right] = 0.0866 \text{ m} = 8.66 \text{ cm.}$$

Vježba 183

Harmonički val ima amplitudu 1 dm, periodu T i valnu duljinu λ . Odredi elongaciju vala za $t = \frac{T}{3}$, $x = 3 \cdot \lambda$.

Rezultat: 8.66 cm.

Zadatak 184 (Tihomir, strukovna škola)

Duž užeta širi se val brzinom 2 m/s. Svaka točka užeta izvrši titraj za 0.4 s. Kolika je duljina vala?

Rješenje 184

$$v = 2 \text{ m/s}, \quad T = 0.4 \text{ s}, \quad \lambda = ?$$

Brzina kojom se širi ista faza od čestice do čestice koje sudjeluju pri širenju vala zove se fazna brzina ili jednostavno brzina širenja vala, v . Kako se val za vrijeme T , tj. vrijeme dok pojedina čestica izvrši čitav titraj, proširi za jednu duljinu vala λ , možemo za jednoliko širenje vala pisati:

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Računamo duljinu vala.

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \cdot T \Rightarrow \lambda = v \cdot T = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.4 \text{ s} = 0.8 \text{ m}.$$

Vježba 184

Duž užeta širi se val brzinom 4 m/s. Svaka točka užeta izvrši titraj za 0.2 s. Kolika je duljina vala?

Rezultat: 0.8 m.

Zadatak 185 (Josipa, gimnazija)

Površinom vode širi se val brzinom 3.6 m/s. Frekvencija titranja točaka je 3 Hz. Odredite razliku u fazi točaka koje su na istoj zruci, a međusobno su udaljene 20 cm.

Rješenje 185

$$v = 3.6 \text{ m/s}, \quad \nu = 3 \text{ Hz}, \quad \Delta x = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad \Delta \varphi = ?$$

Val je širenje titranja iz izvora vala kroz neko sredstvo. Udaljenost za koju se val proširio dok čestica u izvoru napravi jedan potpuni titraj zove se duljina vala λ . Brzina v , valna duljina λ te frekvencija ν povezane su formulom:

$$v = \lambda \cdot \nu \Rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu}.$$

Razlika faza dviju točaka udaljenih za $\Delta x = x_2 - x_1$ određena je izrazima:

$$\Delta \varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{\lambda}, \quad \Delta \varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot \nu}{v}.$$

Razlika u fazi iznosi:

$$\Delta \varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot \nu}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 3 \frac{1}{\text{s}}}{3.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{1.2 \cdot \pi \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{1.2 \cdot \pi \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{1.2 \cdot \pi}{3.6} = \frac{1.2 \cdot \pi}{3.6} = \frac{\pi}{3}.$$

Vježba 185

Površinom vode širi se val brzinom 3.6 m/s. Frekvencija titranja točaka je 3 Hz. Odredite razliku u fazi točaka koje su na istoj zruci, a međusobno su udaljene 120 cm.

Rezultat: $2 \cdot \pi$.

Zadatak 186 (Branka, srednja škola)

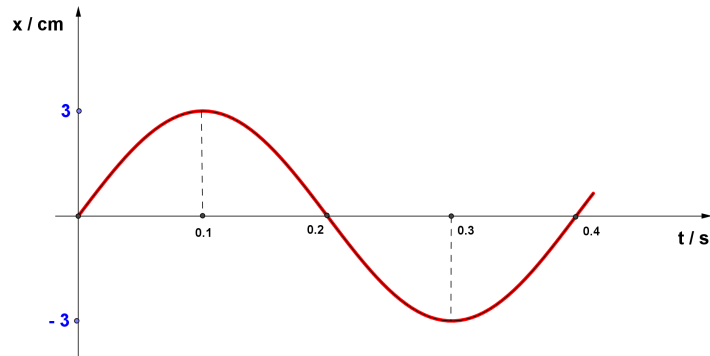
Harmoničko titranje materijalne točke prikazano je na slici.

a) Odredite amplitudu, periodu, frekvenciju i kutnu frekvenciju.

b) Napišite jednadžbu titranja $x = f(t)$.

c) Kolika je elongacija 0.3 s nakon početka titranja?

d) Kolika je elongacija kad je faza $\frac{3 \cdot \pi}{4}$?



Rješenje 186

$$A = 3 \text{ cm}, \quad T = 0.4 \text{ s}$$

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}$$

Kutna (kružna) frekvencija je

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu$$

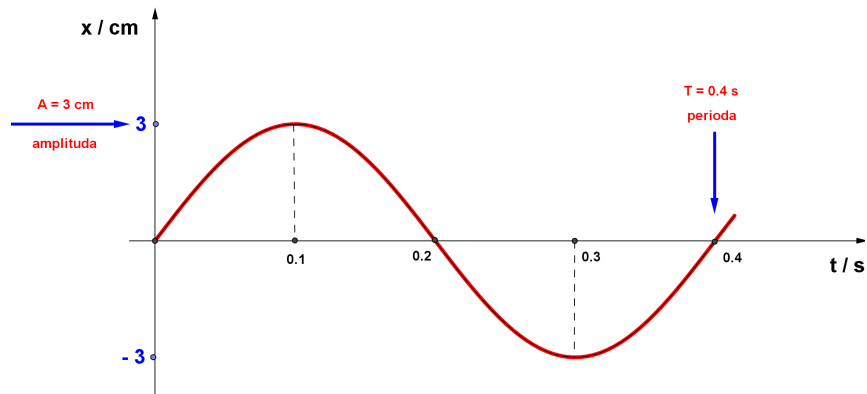
Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right), \quad x = A \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

gdje je x elongacija (udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku), A amplituda (maksimalna elongacija), T vrijeme jednog titraja (perioda), ω kutna frekvencija. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right), \quad x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

gdje je $\omega \cdot t + \varphi$ faza titranja u trenutku t , φ faza u trenutku $t = 0$.



a)

Sa slike vidi se:

$$A = 3 \text{ cm}, \quad T = 0.4 \text{ s}$$

Frekvencija je:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.4 \text{ s}} = 2.5 \text{ Hz}$$

Kutna frekvencija je:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0.4 \text{ s}} = 5 \cdot \pi \text{ s}^{-1}.$$

b)

Jednadžba titranja glasi:

$$\left. \begin{array}{l} A = 3 \text{ cm} , T = 0.4 \text{ s} \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{0.4 \text{ s}} \cdot t\right) \Rightarrow x = 3 \text{ cm} \cdot \sin\left(5 \cdot \pi \text{ s}^{-1} \cdot t\right).$$

c)

Elongacija 0.3 s nakon početka titranja iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} A = 3 \text{ cm} , T = 0.4 \text{ s} , t = 0.3 \text{ s} \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{0.4 \text{ s}} \cdot 0.3 \text{ s}\right) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow x = 3 \text{ cm} \cdot \sin\left(1.5 \cdot \pi \text{ s}^{-1}\right) \Rightarrow x = -3 \text{ cm}.$$

d)

Elongacija kad je faza $\frac{3 \cdot \pi}{4}$ iznosi:

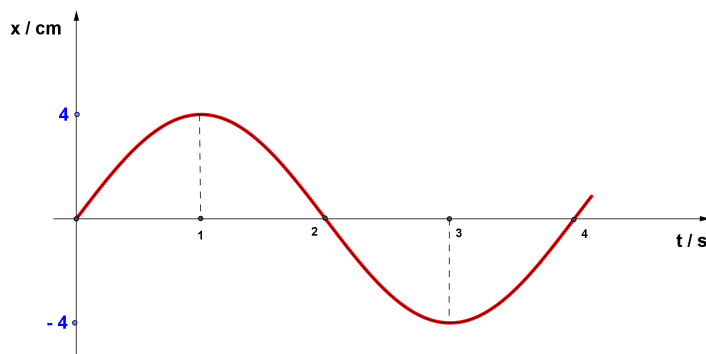
$$\left. \begin{array}{l} A = 3 \text{ cm} , t = 0 , \varphi = \frac{3 \cdot \pi}{4} \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot 0 + \frac{3 \cdot \pi}{4}\right) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow x = 3 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{4}\right) \Rightarrow x = 2.12 \text{ cm}.$$

Vježba 186

Harmoničko titranje materijalne točke prikazano je na slici. Odredite amplitudu, periodu, frekvenciju i kutnu frekvenciju.



Rezultat: $A = 4 \text{ cm} , T = 4 \text{ s} , \nu = 0.25 \text{ Hz} , \omega = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}.$

Zadatak 187 (Marko, tehnička škola)

Amplituda harmoničkog titranja iznosi 50 mm, perioda 4 s, a početna faza titranja $\frac{\pi}{4}$.

- Napišite jednadžbu harmoničkog titranja.
- Odredite elongaciju za $t = 0$.
- Odredite elongaciju za $t = 5$ s.

Rješenje 187

$$A = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}, \quad T = 4 \text{ s}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad x = f(t) = ?$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je x elongacija (udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku), A amplituda (maksimalna elongacija), T vrijeme jednog titraja (perioda). Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right),$$

gdje je φ faza u trenutku $t = 0$.

a)

Jednadžba harmoničkog titranja glasi:

$$\left. \begin{aligned} A = 5 \text{ cm}, \quad T = 4 \text{ s}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{4 \text{ s}} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{4 \text{ s}} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right).$$

b)

Elongacija za $t = 0$ iznosi:

$$\left. \begin{aligned} t = 0 \\ x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1} \cdot 0 + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow [\text{RAD}] \Rightarrow x = 3.54 \text{ cm}.$$

c)

Elongacija za $t = 5$ s iznosi:

$$\left. \begin{aligned} t = 5 \text{ s} \\ x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1} \cdot 5 \text{ s} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1} \cdot 5 \text{ s} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{10 \cdot \pi + \pi}{4}\right) \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\frac{11 \cdot \pi}{4} \Rightarrow [\text{RAD}] \Rightarrow x = 3.54 \text{ cm}.$$

Vježba 187

Amplituda harmoničkog titranja iznosi 50 mm, perioda 4 s, a početna faza titranja $\frac{\pi}{2}$.

Napišite jednadžbu harmoničkog titranja.

Rezultat: $x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Zadatak 188 (Marko, tehnička škola)

Odredi vrijeme za koje se od početka gibanja točka koja harmonički titra pomakne od položaja ravnoteže za polovicu amplitude. Perioda titranja je 24 s, a početna faza jednaka je nuli.

Rješenje 188

$$x = \frac{A}{2}, \quad T = 24 \text{ s}, \quad \varphi = 0, \quad t = ?$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin x = \sin y \Rightarrow x = y, \quad x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je x elongacija (udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku), A amplituda (maksimalna elongacija), T vrijeme jednog titraja (perioda). Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right),$$

gdje je φ faza u trenutku $t = 0$.

Iz uvjeta zadatka dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{A}{2}, \quad T = 24 \text{ s}, \quad \varphi = 0 \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{24 \text{ s}} \cdot t + 0\right) \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{24 \text{ s}} \cdot t\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{A}{2} = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12 \text{ s}} \cdot t\right) \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12 \text{ s}} \cdot t\right) / \cdot \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{12 \text{ s}} \cdot t\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12 \text{ s}} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12 \text{ s}} \cdot t\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{12 \text{ s}} \cdot t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{12 \text{ s}} \cdot t = \frac{\pi}{6} / \cdot \frac{12 \text{ s}}{\pi} \Rightarrow t = 2 \text{ s}.$$

Vježba 188

Odredi vrijeme za koje se od početka gibanja točka koja harmonički titra pomakne od položaja ravnoteže za polovicu amplitude. Perioda titranja je 12 s, a početna faza jednaka je nuli.

Rezultat: $t = 1 \text{ s}$.

Zadatak 189 (Marko, tehnička škola)

Napišite jednadžbu harmoničkog titranja amplitude 5 cm, ako se u 1 min obavi 150 titraja, a početna faza titranja iznosi 45° .

Rješenje 189

$$A = 5 \text{ cm}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad n = 150, \quad \varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad x = f(t) = ?$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t),$$

gdje je x elongacija (udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku), A amplituda (maksimalna elongacija), ν frekvencija (broj titraja u jedinici vremena). Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$x = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t + \varphi),$$

gdje je φ faza u trenutku $t = 0$.

Frekvencija ν je broj titraja (ophoda) u jedinici vremena.

Frekvencija titranja računa se po formuli

$$\nu = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t .

Najprije izračunamo frekvenciju.

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{150}{60 \text{ s}} = \frac{150}{60 \text{ s}} = \frac{5}{2} \text{ Hz.}$$

Jednadžba harmoničkog titranja glasi:

$$\left. \begin{aligned} A = 5 \text{ cm}, \quad \nu = \frac{5}{2} \text{ s}^{-1}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \\ x = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t + \varphi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{2} \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{2} \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(5 \cdot \pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Vježba 189

Napišite jednadžbu harmoničkog titranja amplitude 7 cm, ako se u 1 min obavi 150 titraja, a početna faza titranja iznosi 60° .

Rezultat: $x = 7 \text{ cm} \cdot \sin\left(5 \cdot \pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right).$

Zadatak 190 (Filip, srednja škola)

Kuglica mase 10 dag obješena je na oprugu konstante elastičnosti 10 N / m i harmonički titra s amplitudom 4 cm. Početna faza titranja jednaka je nuli. Odredite elongaciju kuglice poslije $52.36 \cdot 10^{-3}$ s od početka titranja. Masu opruge i dimenzije kuglice zanemarite.

Rješenje 190

$$m = 10 \text{ dag} = 0.1 \text{ kg}, \quad k = 10 \text{ N / m}, \quad A = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}, \quad \varphi = 0, \quad t = 52.36 \cdot 10^{-3} \text{ s},$$

$x = ?$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je x elongacija (udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku), A amplituda (maksimalna elongacija), T vrijeme jednog titraja (perioda). Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right),$$

gdje je φ faza u trenutku $t = 0$.

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra.

Računamo elongaciju kuglice.

$$\left. \begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{m}{k}} \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow x = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) =$$

$$= 0.04 \text{ m} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{10 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0.1 \text{ kg}} \cdot 52.36 \cdot 10^{-3} \text{ s}}\right) = [\text{RAD}] = 0.02 \text{ m} = 2 \text{ cm}.$$

Vježba 190

Kuglica mase 20 dag obješena je na oprugu konstante elastičnosti 20 N / m i harmonički titra s amplitudom 4 cm. Početna faza titranja jednaka je nuli. Odredite elongaciju kuglice poslije $52.36 \cdot 10^{-3}$ s od početka titranja. Masu opruge i dimenzije kuglice zanemarite.

Rezultat: 2 cm.

Zadatak 191 (Daniela, gimnazija)

Koliko puta moramo promijeniti masu tijela obješenog na oprugu konstante elastičnosti k da bi se perioda titranja smanjila 2 puta?

- A. povećati 4 puta B. smanjiti 4 puta
C. smanjiti $\sqrt{2}$ puta D. povećati 2 puta

Rješenje 191

$$T_1 = T, \quad T_2 = \frac{1}{2} \cdot T, \quad \frac{m_2}{m_1} = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je

faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.

Kada se na oprugu objesi uteg mase m_1 njezina perioda titranja glasi:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

Kada se na oprugu objesi uteg mase m_2 njezina perioda titranja iznosi:

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo omjer masa.

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot T}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot T}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\frac{m_2}{k}}{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{k}{k}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4} \quad / \cdot m_1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{4} \cdot m_1$$

Masa mora biti 4 puta manja.

Odgovor je pod B.

Vježba 191

Koliko puta moramo promijeniti masu tijela obješenog na oprugu konstante elastičnosti k da bi se perioda titranja povećala 2 puta?

- A. povećati 4 puta B. smanjiti 4 puta
C. smanjiti $\sqrt{2}$ puta D. povećati 2 puta

Rezultat: A.

Zadatak 192 (Daniela, gimnazija)

Matematičko njihalo ima duljinu niti 1 m. Ako se duljina niti poveća 9 puta frekvencija će se:

- A. povećati 9 puta B. smanjiti 9 puta
C. povećati 3 puta D. smanjiti 3 puta

Rješenje 192

$$l = 1 \text{ m}, \quad l_1 = 9 \cdot 1 = 9 \cdot 1 \text{ m} = 9 \text{ m}, \quad \frac{v_1}{v} = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Frekvencija titranja matematičkog njihala jest

$$v = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Za frekvencije prvog i drugog njihala vrijedi:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} v &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \\ v_1 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_1}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{\sqrt{\frac{g}{l_1}}}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{\frac{g}{l_1}}{\frac{g}{l}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{l}{l_1}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{l}{l_1}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{1 \text{ m}}{9 \text{ m}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{1}{3} / \cdot v \Rightarrow v_1 = \frac{1}{3} \cdot v.
 \end{aligned}$$

Ako se duljina niti poveća 9 puta frekvencija će se smanjiti 3 puta.

Odgovor je pod D.

Vježba 192

Matematičko njihalo ima duljinu niti 1 m. Ako se duljina niti smanji 9 puta frekvencija će se:

- A. povećati 9 puta B. smanjiti 9 puta
C. povećati 3 puta D. smanjiti 3 puta

Rezultat: C.

Zadatak 193 (Daniela, gimnazija)

Kada se na oprugu objesi uteg mase 0.5 kg sustav titra periodom $T = 2$ s. Koliku masu treba dodati da bi se perioda titranja povećala 3 puta? Kolika je konstanta elastičnosti opruge?

Rješenje 193

$$m = 0.5 \text{ kg}, \quad T = 2 \text{ s}, \quad T_1 = 3 \cdot T = 3 \cdot 2 \text{ s} = 6 \text{ s}, \quad m_1 = m + \Delta m, \quad \Delta m = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.

Kada se na oprugu objesi uteg mase m njezina perioda titranja glasi:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Kada se na oprugu objesi uteg mase m_1 njezina perioda titranja iznosi:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}}$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo Δm .

$$\left. \begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{T_1}{T} &= \frac{\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}}}{\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{m+\Delta m}{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{m+\Delta m}{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{m+\Delta m}{m}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{T_1}{T} &= \sqrt{\frac{m+\Delta m}{m}} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = \frac{m+\Delta m}{m} \Rightarrow \frac{m+\Delta m}{m} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{m+\Delta m}{m} = \left(\frac{6\text{ s}}{2\text{ s}}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{m+\Delta m}{m} &= \left(\frac{6\text{ s}}{2\text{ s}}\right)^2 \Rightarrow \frac{m+\Delta m}{m} = 3^2 \Rightarrow \frac{m+\Delta m}{m} = 9 \Rightarrow \frac{m+\Delta m}{m} = 9 \quad / \cdot m \Rightarrow m+\Delta m = 9 \cdot m \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta m = 9 \cdot m - m \Rightarrow \Delta m = 8 \cdot m = 8 \cdot 0.5\text{ kg} = 4\text{ kg}. \end{aligned}$$

Računamo konstantu elastičnosti opruge.

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 &= \frac{m}{k} \Rightarrow \frac{m}{k} = \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 \Rightarrow \frac{k}{m} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{k}{m} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \quad / \cdot m \Rightarrow \\ \Rightarrow k &= \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot m = \left(\frac{2 \cdot \pi}{2\text{ s}}\right)^2 \cdot 0.5\text{ kg} = 4.93 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} = 4.93 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

Vježba 193

Kada se na oprugu objesi uteg mase 50 dag sustav titra periodom $T = 2\text{ s}$. Koliku masu treba dodati da bi se perioda titranja povećala 3 puta?

Rezultat: 4 kg.

Zadatak 194 (Daniela, gimnazija)

Opruga s utegom titra tako da načini 60 titraja u 1 minuti. Koliko je puta potrebno povećati masu utega kako bi taj sustav titrao sa 10 titraja u minuti?

Rješenje 194

$$n_1 = 60, \quad t_1 = 1\text{ min} = 60\text{ s}, \quad n_2 = 10, \quad t_2 = 1\text{ min} = 60\text{ s}, \quad \frac{m_2}{m_1} = ?$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.

Perioda titranja T računa se po formuli

$$T = \frac{t}{n},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t .

Najprije odredimo periode titranja opruge:

- prva opruga

$$T_1 = \frac{t_1}{n_1} = \frac{60 \text{ s}}{60} = 1 \text{ s}$$

- druga opruga

$$T_2 = \frac{t_2}{n_2} = \frac{60 \text{ s}}{10} = 6 \text{ s.}$$

Kada se na oprugu objesi uteg mase m_1 njezina perioda titranja glasi:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

Kada se na oprugu objesi uteg mase m_2 njezina perioda titranja iznosi:

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo omjer masa.

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{k} \cdot \frac{k}{m_1}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cdot 1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \cdot m_1 \Rightarrow m_2 = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \cdot m_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = \left(\frac{6 \text{ s}}{1 \text{ s}} \right)^2 \cdot m_1 \Rightarrow m_2 = \left(\frac{6 \text{ s}}{1 \text{ s}} \right)^2 \cdot m_1 \Rightarrow m_2 = 6^2 \cdot m_1 \Rightarrow m_2 = 36 \cdot m_1.$$

Masu je potrebno povećati 36 puta.

Vježba 194

Opruga s utegom titra tako da načini 60 titraja u 1 minuti. Koliko je puta potrebno povećati masu utega kako bi taj sustav titrao sa 5 titraja u minuti?

Rezultat: 144 puta.

Zadatak 195 (Daniela, gimnazija)

Kolika mora biti duljina matematičkog njihala da bi pri titranju načinilo 40 njihaja u 1 minuti? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 195

$$n = 40, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad l = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja nije koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Perioda titranja T računa se po formuli

$$T = \frac{t}{n},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t .
Najprije odredimo periodu titranja matematičkog njihala.

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60 \text{ s}}{40} = 1.5 \text{ s}.$$

Računamo duljinu njihala.

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 1^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 = \frac{l}{g} \Rightarrow \frac{l}{g} = \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 \Rightarrow \frac{l}{g} = \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot g \Rightarrow l = \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot g = \\ &= \left(\frac{1.5 \text{ s}}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.56 \text{ m}. \end{aligned}$$

Vježba 195

Kolika mora biti duljina matematičkog njihala da bi pri titranju načinilo 80 njihaja u 2 minute?
(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.56 m.

Zadatak 196 (Ivana, medicinska škola)

Amplituda harmoničkog titranja neke materijalne točke iznosi 5 cm, vrijeme jednog titraja 4 s, a početna faza je $\frac{\pi}{4}$. Napiši jednadžbu tog titranja.

Rješenje 196

$$A = 5 \text{ cm}, \quad T = 4 \text{ s}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad x = ?$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom t prema

$$x = A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

gdje je x elongacija, tj. udaljenost tijela koje titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titraja ili perioda. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom t po zakonu

$$x = A \cdot \sin \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \varphi \right),$$

gdje je φ početni fazni kut.
Jednadžba titranja glasi:

$$\left. \begin{aligned} A = 5 \text{ cm} , T = 4 \text{ s} , \varphi = \frac{\pi}{4} \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \varphi\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{4 \text{ s}} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{4 \text{ s}} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \text{ s}} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Vježba 196

Amplituda harmoničkog titranja neke materijalne točke iznosi 5 cm, vrijeme jednog titraja 4 s, a početna faza je $\frac{\pi}{2}$. Napiši jednadžbu tog titranja.

Rezultat: $x = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \text{ s}} + \frac{\pi}{2}\right).$

Zadatak 197 (Ivana, medicinska škola)

Jednadžba koja opisuje harmoničko titranje neke točke glasi: $x = 6 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3 \text{ s}} \cdot t + \pi\right)$. Nadi vrijeme jednog titraja i najveću brzinu te točke.

Rješenje 197

$$x = 6 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3 \text{ s}} \cdot t + \pi\right), \quad T = ?, \quad v_0 = ?$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom t prema

$$x = A \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

gdje je x elongacija, tj. udaljenost tijela koje titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titraja ili perioda. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom t po zakonu

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right),$$

gdje je φ početni fazni kut.

Maksimalna brzina tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A amplituda, T perioda.

Računamo vrijeme jednog titraja, periodu T.

$$\left. \begin{aligned} x = 6 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3 \text{ s}} \cdot t + \pi\right) \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x = 6 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot 2}{3 \text{ s} \cdot 2} \cdot t + \pi\right) \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x = 6 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{6 \text{ s}} \cdot t + \pi\right) \\ x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} A = 6 \text{ cm} \\ T = 6 \text{ s} \end{aligned} \right\}.$$

Perioda točke je T = 6 s.

Najveća brzina točke iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} A = 6 \text{ cm} , T = 6 \text{ s} \\ v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \end{array} \right\} \Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6 \text{ cm}}{6 \text{ s}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6 \text{ cm}}{6 \text{ s}} = 2 \cdot \pi \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 6.28 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Vježba 197

Jednadžba koja opisuje harmoničko titranje neke točke glasi: $x = 6 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5 \text{ s}} \cdot t + \pi\right)$. Nadi vrijeme jednog titraja.

Rezultat: $T = 10 \text{ s}$.

Zadatak 198 (Marin, tehnička škola)

Materijalna točka harmonički titra s amplitudom 4 cm. Perioda titranja jest 6 sekundi. Početni fazni kut je nula. Koliku brzinu ima ta točka u trenutku kad postigne elongaciju 2 cm?

Rješenje 198

$$A = 4 \text{ cm}, \quad T = 6 \text{ s}, \quad \varphi = 0^\circ, \quad x = 2 \text{ cm}, \quad v = ?$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom t prema

$$x = A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

gdje je x elongacija, tj. udaljenost tijela koje titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titraja ili perioda. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom t po zakonu

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right),$$

gdje je φ početni fazni kut.

Brzina v čestice koja harmonički titra iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \sqrt{A^2 - x^2},$$

gdje je T perioda, A amplituda, x elongacija.

Maksimalna brzina tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A amplituda, T perioda.

Brzina v tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom

$$v = v_0 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

gdje je v_0 maksimalna brzina.

Računamo brzinu v .

1. inačica

$$v = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = \frac{2 \cdot \pi}{6 \text{ s}} \cdot \sqrt{(4 \text{ cm})^2 - (2 \text{ cm})^2} = 3.63 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

2. inačica

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) \Rightarrow \left[\varphi = 0^\circ\right] \Rightarrow x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \Rightarrow A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = x \Rightarrow$$


$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvrstimo vrijednosti} \\ \text{bez mjernih jedinica} \end{array} \right] \Rightarrow 4 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{6} \cdot t\right) = 2 \Rightarrow 4 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{6} \cdot t\right) = 2 \quad / : 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{6} \cdot t\right) = \frac{2}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{6} \cdot t\right) = \frac{2}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \cdot t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \cdot t = \frac{\pi}{6} \quad / \cdot \frac{3}{\pi} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ s.}$$

Sada brzina v iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \\ v = v_0 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucije)} \end{array} \right] \Rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \text{ cm}}{6 \text{ s}} \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \text{ s}}{6 \text{ s}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \text{ cm}}{6 \text{ s}} \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \text{ s}}{6 \text{ s}} = \frac{4 \cdot \pi \text{ cm}}{3 \text{ s}} \cdot \cos \frac{\pi}{6} =$$


$$= \left[\begin{array}{l} \text{mode} \\ \text{RAD} \end{array} \right] = 3.63 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Vježba 198

Materijalna točka harmonički titra s amplitudom 0.4 dm. Perioda titranja jest 6 sekundi. Početni fazni kut je nula. Koliku brzinu ima ta točka u trenutku kad postigne elongaciju 0.2 dm?

Rezultat: 3.63 cm / s.

Zadatak 199 (Marin, tehnička škola)

Uteg mase 200 g titra amplitudom 5 cm i periodom 0.46 s. Odredi maksimalnu kinetičku energiju.

Rješenje 199

$$m = 200 \text{ g} = 0.2 \text{ kg}, \quad A = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, \quad T = 0.46 \text{ s}, \quad E_{k\max} = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom t prema

$$x = A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

gdje je x elongacija, tj. udaljenost tijela koje titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titranja ili perioda. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom t po zakonu

$$x = A \cdot \sin \left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi \right),$$

gdje je φ početni fazni kut.

Maksimalna brzina tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A amplituda, T perioda.

Maksimalna kinetička energija iznosi:

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \\ E_{k\max} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucije)} \end{array} \right] \Rightarrow E_{k\max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.2 \text{ kg} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 0.05 \text{ m}}{0.46 \text{ s}} \right)^2 = 4.66 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

Vježba 199

Uteg mase 20 dag titra amplitudom 5 cm i periodom 0.46 s. Odredi maksimalnu kinetičku energiju.

Rezultat: $4.66 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

Zadatak 200 (Davor, gimnazija)

Maksimalna kinetička energija tijela mase 80 g koje titra frekvencijom 5 Hz iznosi 10 J. Kolika je amplituda titranja?

Rješenje 200

$$m = 80 \text{ g} = 0.08 \text{ kg}, \quad v = 5 \text{ Hz}, \quad E_k = 10 \text{ J}, \quad A = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom t prema

$$x = A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

gdje je x elongacija, tj. udaljenost tijela koje titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titraja ili perioda. Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom t po zakonu

$$x = A \cdot \sin \left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi \right),$$

gdje je φ početni fazni kut.

Maksimalna brzina tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$v_0 = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu,$$

gdje je A amplituda, ν frekvencija, tj. broj titraja u jedinici vremena.

Amplituda iznosi:

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu \\ E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucije)} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu)^2 =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu)^2 = E_k \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu)^2 = E_k \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu)^2 &= \frac{2 \cdot E_k}{m} \Rightarrow (2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu) = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu &= \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \nu} \Rightarrow A = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \nu} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 5 \frac{1}{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ J}}{0.08 \text{ kg}}} = 0.5033 \text{ m} = 50.33 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Vježba 200

Maksimalna kinetička energija tijela mase 8 dag koje titra frekvencijom 5 Hz iznosi 10 J. Kolika je amplituda titranja?

Rezultat: 50.33 cm.