Zadatak 161 (Nataša, medicinska škola)

Kada se na neku oprugu objesi uteg od 15 N duljina opruge iznosi 8 cm, a kada se objesi uteg od 20 N duljina opruge je 10 cm. Kolika je duljina neopterećene opruge?

Rješenje 161

$F_1 = 15$ N, $l_1 = 8$ cm $= 0.08$ m, $F_2 = 20$ N, $l_2 = 10$ cm $= 0.1$ m, $l = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Za računanje dovoljno je uzeti

$$F = k \cdot x.$$

gdje je k konstanta elastičnosti.

1.inačica

Neopterećena opruga ima duljinu l.

- Kada se optereti silom F_1 produlji se za x_1 i tada je njezina duljina l_1. Vrijedi:

$$l_1 = l + x_1 \Rightarrow x_1 = l_1 - l \Rightarrow x_1 = 0.08 - l.$$

Računamo konstantu elastičnosti k.

$$F_1 = k \cdot x_1 \Rightarrow F_1 = k \cdot x_1 \; / \cdot \frac{1}{x_1} \Rightarrow k = \frac{F_1}{x_1} \Rightarrow k = \frac{F_1}{0.08 - l}.$$

- Kada se optereti silom F_2 produlji se za x_2 i tada je njezina duljina l_2. Vrijedi:

$$l_2 = l + x_2 \Rightarrow x_2 = l_2 - l \Rightarrow x_2 = 0.10 - l.$$

Računamo konstantu elastičnosti k.

$$F_2 = k \cdot x_2 \Rightarrow F_2 = k \cdot x_2 \; / \cdot \frac{1}{x_2} \Rightarrow k = \frac{F_2}{x_2} \Rightarrow k = \frac{F_2}{0.10 - l}.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo l.

$$\left. \begin{array}{l} k = \dfrac{F_1}{0.08 - l} \\ k = \dfrac{F_2}{0.10 - l} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{F_1}{0.08 - l} = \frac{F_2}{0.10 - l} \Rightarrow \frac{15}{0.08 - l} = \frac{20}{0.10 - l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15}{0.08 - l} = \frac{20}{0.10 - l} \; / : 5 \Rightarrow \frac{3}{0.08 - l} = \frac{4}{0.10 - l} \Rightarrow 3 \cdot (0.10 - l) = 4 \cdot (0.08 - l) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.30 - 3 \cdot l = 0.32 - 4 \cdot l \Rightarrow -3 \cdot l + 4 \cdot l = 0.32 - 0.30 \Rightarrow l = 0.02 \; m = 2 \; cm.$$

2.inačica

Promjena iznosa sile

$$\Delta F = F_2 - F_1 = 20 \; N - 15 \; N = 5 \; N$$

uzrokuje promjenu duljine opruge

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 0.10 \; m - 0.08 \; m = 0.02 \; m.$$

Budući da je elastična sila razmjerna produljenju opruge, dobije se:

$$\Delta F = k \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta F = k \cdot \Delta l \; / \cdot \frac{1}{\Delta l} \Rightarrow k = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{5 \; N}{0.02 \; m} = 250 \; \frac{N}{m}.$$

Sada izračunamo duljinu l opruge (pomoću formule za F_1 ili F_2).

$$F_1 = k \cdot (0.08 - l) \Rightarrow F_1 = k \cdot (0.08 - l) \; / \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{F_1}{k} = 0.08 - l \Rightarrow l = 0.08 - \frac{F_1}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = 0.08 - \frac{15}{250} \Rightarrow l = 0.02 \; m = 2 \; cm.$$

⚠ Budući da su sve mjerne jedinice zadane u SI sustavu, zbog jednostavnosti računanja, nisam ih pisao tijekom postupka, ali na kraju u rezultatu obvezatno se mora napisati odgovarajuća mjerna jedinica.

Vježba 161

Kada se na neku oprugu objesi uteg od 15 N duljina opruge iznosi 8 cm, a kada se objesi uteg od 20 N duljina opruge je 10 cm. Kolika je duljina neopterećene opruge?

Rezultat: 0.596 s.

Zadatak 162 (Marko, gimnazija)

Odredi omjer vremena potrebnog da kuglica padne s visine l i vremena potrebnog da njihalo iste duljine dođe u položaj ravnoteže.

Rješenje 162

l, $t_1 : t_2 = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.
Slobodan pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje za koje vrijedi identičan izrazi (samo se umjesto puta s piše visina h, umjesto akceleracije a piše akceleracija slobodnog pada g):

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada.
Budući da je kuglica pala s visine l, bez početne brzine, vrijeme padanja t_1 dobijemo iz formule za slobodni pad:

$$l = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow l = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \; / \cdot \frac{2}{g} \Rightarrow t_1^2 = \frac{2 \cdot l}{g} \Rightarrow t_1^2 = \frac{2 \cdot l}{g} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{g}}.$$

Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

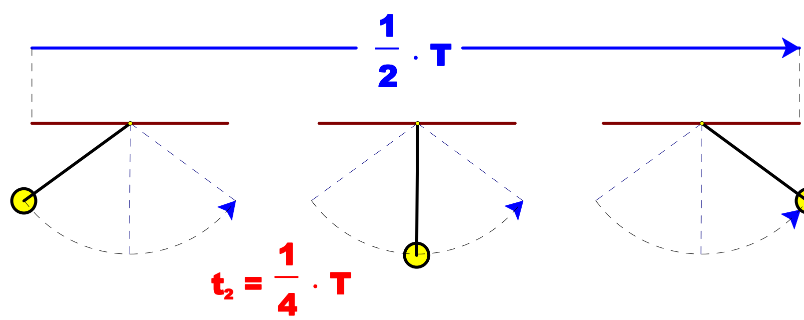
Kada kuglicu matematičkog njihala izvedemo iz položaja ravnoteže, tj. kada napravimo maksimalni odmak od ravnotežnog položaja i pustimo, trebat će četvrtina periode da se vrati u ravnotežni položaj. Vrijeme t_2 potrebno da se njihalo vrati iz maksimalnog položaja (amplitude) do ravnotežnog položaja iznosi:

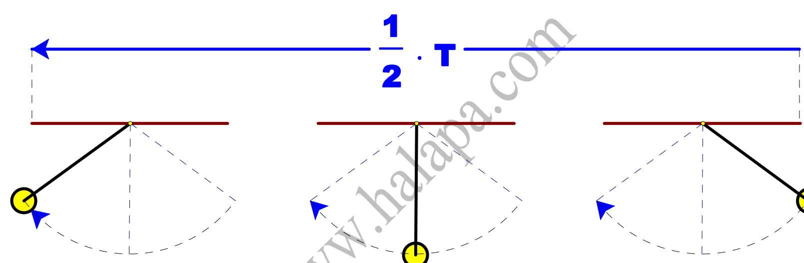
$$t_2 = \frac{1}{4} \cdot T \Rightarrow t_2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Računamo omjer vremena t_1 potrebnog da kuglica padne s visine l i vremena t_2 potrebnog da njihalo iste duljine dođe u položaj ravnoteže.

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{\sqrt{\frac{2\cdot l}{g}}}{\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=\frac{2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot l}{g}}}{\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\frac{2\cdot l}{g}}{\frac{l}{g}}}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\frac{2\cdot l}{g}}{\frac{l}{g}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{2}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\pi}=0.9.$$





Vježba 162

Odredi omjer vremena potrebnog da kuglica padne s visine l i vremena potrebnog da njihalo duljine $2\cdot l$ dođe u položaj ravnoteže.

Rezultat: $\frac{2}{\pi}.$

Zadatak 163 (Lily, gimnazija)

Njihalo duljine $l_1 = 50$ cm ima periodu T_1, a njihalo duljine $l_2 = 70$ cm periodu T_2. Ne računajući T_1 i T_2 odredi duljinu njihala koje ima periodu $T_1 + T_2$.

Rješenje 163

$l_1 = 50$, T_1, $l_2 = 70$ cm, T_2, $l = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Neka je l duljina matematičkog njihala koje ima periodu $T_1 + T_2$. Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_2}{g}} \\ T_1 + T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}} + 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}} + 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \; /\cdot\frac{1}{2\cdot\pi} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{g}} + \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{l_1}{g}} + \sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{l_2}}{\sqrt{g}} \Rightarrow \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{l_2}}{\sqrt{g}} \; /\cdot\sqrt{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{l} = \sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} \Rightarrow \sqrt{l} = \sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} \; /^2 \Rightarrow l = \left(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{50\ cm} + \sqrt{70\ cm}\right)^2 = 238.32\ cm.$$

Vježba 163

Njihalo duljine $l_1 = 70$ cm ima periodu T_1, a njihalo duljine $l_2 = 50$ cm periodu T_2. Ne računajući T_1 i T_2 odredi duljinu njihala koje ima periodu $T_1 + T_2$.

Rezultat: 238.32 cm.

Zadatak 164 (Lily, gimnazija)

Njihalo duljine l_1 ima periodu $T_1 = 0.8$ s , a njihalo duljine l_2 periodu $T_2 = 0.6$ s . Odredi kolika je perioda njihala duljine $l_1 + l_2$ ne računajući l_1 i l_2.

Rješenje 164

l_1, $T_1 = 0.8$ s, l_2, $T_2 = 0.6$ s, $T = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Neka je T perioda matematičkog njihala duljine $l_1 + l_2$. Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_2}{g}} \\ T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_1+l_2}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_1}{g}} \; /^2 \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_2}{g}} \; /^2 \\ T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_1+l_2}{g}} \; /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\dfrac{l_1}{g} \\ T_2^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\dfrac{l_2}{g} \\ T^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\dfrac{l_1+l_2}{g} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{l_1}{g} \;/\cdot\frac{1}{4\cdot\pi^2} \\ \Rightarrow T_2^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{l_2}{g} \;/\cdot\frac{1}{4\cdot\pi^2} \\ T^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{l_1+l_2}{g} \;/\cdot\frac{1}{4\cdot\pi^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{T_1^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{l_1}{g} \\ \frac{T_2^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{l_2}{g} \\ \frac{T^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{l_1+l_2}{g} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{T_1^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{l_1}{g} \\ \frac{T_2^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{l_2}{g} \\ \frac{T^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{l_1}{g} + \frac{l_2}{g} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{T^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{T_1^2}{4\cdot\pi^2} + \frac{T_2^2}{4\cdot\pi^2} \Rightarrow \frac{T^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{T_1^2}{4\cdot\pi^2} + \frac{T_2^2}{4\cdot\pi^2} \;/\cdot 4\cdot\pi^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 = T_1^2 + T_2^2 \Rightarrow T^2 = T_1^2 + T_2^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = \sqrt{(0.8\ s)^2 + (0.6\ s)^2} = 1\ s.$$

Vježba 164

Njihalo duljine l_1 ima periodu $T_1 = 0.6$ s , a njihalo duljine l_2 periodu $T_2 = 0.8$ s . Odredi kolika je perioda njihala duljine $l_1 + l_2$ ne računajući l_1 i l_2.

Rezultat: 1 s.

Zadatak 165 (Andrija, tehnička škola)

Mjedena žica presjeka 0.5 mm^2 opterećena je sa 10 kg i ima duljinu 1382 mm, modul elastičnosti za mjed je $E = 8 \cdot 10^9$ N/m^2. Kolika je duljina žice kada nije opterećena? (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 165

$S = 0.5$ mm^2 $= 5 \cdot 10^{-7}$ m^2, m = 10 kg, l = 1382 mm = 1.382 m, $E = 8 \cdot 10^9$ N/m^2, g = 9.81 m/s^2, $l_0 = ?$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m\cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.
Elastična sila nastaje pri deformacijama tijela. Za žice, šipke, cijevi i slično vrijedi:

$$\Delta l = \frac{l_0}{E}\cdot\frac{F}{S},$$

gdje je l_0 duljina, E modul elastičnosti ovisan o vrsti materijala, a S površina poprečnog presjeka. Kada je tijelo mase m ovješeno o žicu iznos sile napetosti žice jednak je težini tijela.

$$F = G \Rightarrow F = m\cdot g.$$

Ako je l_0 duljina žice kada nije opterećena vrijedi:

$$l = l_0 + \Delta l,$$

gdje je Δl mala promjena duljine l_0.

$$\left.\begin{array}{l} l = l_0 + \Delta l \\ \Delta l = \dfrac{l_0}{E} \cdot \dfrac{F}{S} \\ F = m \cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l = l_0 + \Delta l \\ \Delta l = \dfrac{l_0}{E} \cdot \dfrac{m \cdot g}{S} \end{array}\right\} \Rightarrow l = l_0 + \frac{l_0}{E} \cdot \frac{m \cdot g}{S} \Rightarrow l = l_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{E} \cdot \frac{m \cdot g}{S}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = l_0 \cdot \left(1 + \frac{m \cdot g}{E \cdot S}\right) \Rightarrow l = l_0 \cdot \left(1 + \frac{m \cdot g}{E \cdot S}\right) \Big/ \cdot \frac{1}{1 + \frac{m \cdot g}{E \cdot S}} \Rightarrow l_0 = \frac{l}{1 + \frac{m \cdot g}{E \cdot S}} =$$

$$= \frac{1.382\ m}{1 + \dfrac{10\ kg \cdot 9.81\ \frac{m}{s^2}}{8 \cdot 10^9\ \frac{N}{m^2} \cdot 5 \cdot 10^{-7}\ m^2}} = 1.349\ m.$$

Vježba 165

Mjedena žica presjeka 0.5 mm^2 opterećena je sa 1000 dag i ima duljinu 138.2 cm, modul elastičnosti za mjed je E = 8 · 10^9 N/m^2. Kolika je duljina žice kada nije opterećena? (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m/s^2)

Rezultat: 1.349 m.

Zadatak 166 (Vox, tehnička škola)

Bakrena žica promjera 1.8 mm smije se istegnuti najviše za 0.1%. Odredi najveću silu kojom se može opteretiti žica. Modul elastičnosti za bakar je E = 125 · 10^9 Pa.

Rješenje 166

2 · r = 1.8 mm => r = 0.9 mm = 9 · 10^{-4} m, Δl = 0.1% · l_0 = 0.001 · l_0,
E = 125 · 10^9 Pa, F = ?

Površina kruga polumjera r dana je formulom

$$S = r^2 \cdot \pi.$$

Elastična sila nastaje pri deformacijama tijela. Za žice, šipke, cijevi i slično vrijedi:

$$\Delta l = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{F}{S},$$

gdje je l_0 duljina, E modul elastičnosti ovisan o vrsti materijala, a S površina poprečnog presjeka. Računamo silu F kojom smijemo opteretiti žicu.

$$\Delta l = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{F}{S} \Rightarrow \Delta l = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{F}{S} \Big/ \cdot \frac{E \cdot S}{l_0} \Rightarrow F = \frac{\Delta l \cdot E \cdot S}{l_0} \Rightarrow F = \frac{0.001 \cdot l_0 \cdot E \cdot S}{l_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{0.001 \cdot l_0 \cdot E \cdot S}{l_0} \Rightarrow F = 0.001 \cdot E \cdot S \Rightarrow \left[\, S = r^2 \cdot \pi \,\right] \Rightarrow F = 0.001 \cdot E \cdot r^2 \cdot \pi =$$

$$= 0.001 \cdot 125 \cdot 10^9\ Pa \cdot \left(9 \cdot 10^{-4}\ m\right)^2 \cdot \pi = 318.09\ N.$$

Vježba 166

Bakrena žica promjera 0.18 cm smije se istegnuti najviše za 0.1%. Odredi najveću silu kojom se može opteretiti žica. Modul elastičnosti za bakar je E = 125 · 10^9 Pa.

Rezultat: 318.09 N.

Zadatak 167 (Max, tehnička škola)

Elastična opruga stisne se za 20 cm pod djelovanjem sile 20 N. Koliki je rad utrošen pri njezinom sabijanju?

Rješenje 167

x = 20 cm = 0.2 m, F = 20 N, W = ?

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak s (elongaciju) i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku s, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot s$$

kažemo da harmonijski titra, k je konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu). Predznak minus pokazuje da je harmonijska sila suprotnog smjera od elongacije.Predznak minus – možemo izostaviti u numeričkim zadatcima.

Elastična opruga produžena za x ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je k konstanta opruge.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

Budući da je zadana elastična sila F, izračuna se konstanta opruge k, a zatim utrošeni rad W.

$$\left.\begin{array}{l} F = k \cdot x \\ E = W \\ E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F = k \cdot x \;/\cdot \frac{1}{x} \\ W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k = \frac{F}{x} \\ W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{x} \cdot x^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{\cancel{x}} \cdot x^{\cancel{2}} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 20\ N \cdot 0.2\ m = 2\ J.$$

Vježba 167

Elastična opruga stisne se za 20 cm pod djelovanjem sile 40 N. Koliki je rad utrošen pri njezinom sabijanju?

Rezultat: 4 J.

Zadatak 168 (Josip, tehnička škola)

U staklenoj cijevi unutarnjeg polumjera 4 mm nalazi se živa mase 1 kg. Cijev je savijena u obliku slova U, a kraci su u okomitom položaju. Kolika je perioda titranja žive, ako živu izvedemo iz ravnotežnog položaja? (gustoća žive ρ = 13600 kg/m^3, ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 168

r = 4 mm = 0.004 m, m = 1 kg, ρ = 13600 kg/m^3, g = 9.81 m/s^2, T = ?

Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$S = r^2 \cdot \pi.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = S \cdot v \Rightarrow V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.
Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \;\Rightarrow\; m = \rho \cdot V.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

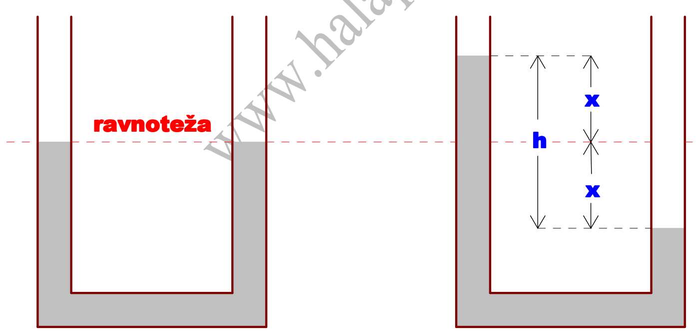
kažemo da harmonijski titra. Za računanje dovoljno je uzeti

$$F = k \cdot x.$$

gdje je k konstanta elastičnosti.
Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra.
Kada živu izvedemo iz ravnotežnog položaja njezina gornja razina bit će za udaljenost x iznad ravnotežnog položaja, a istodobno donja razina za x ispod ravnotežnog položaja.



Elastična sila koja se javlja jednaka je težini žive koja se nalazi iznad donje razine cijevi (visina tog stupca žive je h = 2 · x).

$$F = G \;\Rightarrow\; k \cdot x = m \cdot g \;\Rightarrow\; k \cdot x = \rho \cdot V \cdot g \;\Rightarrow\; k \cdot x = \rho \cdot S \cdot h \cdot g \;\Rightarrow\; k \cdot x = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot x \cdot g \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; k \cdot x = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot x \cdot g \;/ \cdot \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; k = 2 \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot g.$$

Tada perioda titranja žive u cijevi iznosi:

$$\left.\begin{aligned} k &= 2 \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot g \\ T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{2 \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot g}} \;\Rightarrow\; T = \frac{2 \cdot \pi}{r} \cdot \sqrt{\frac{m}{2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot g}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; T = \frac{2}{r} \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot m}{2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot g}} \;\Rightarrow\; T = \frac{2}{r} \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot m}{2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot g}} \;\Rightarrow\; T = \frac{2}{r} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot m}{2 \cdot \rho \cdot g}} =$$

$$= \frac{2}{0.004\ m} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot 1\ kg}{2 \cdot 13600\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9.81\ \frac{m}{s^2}}} = 1.72\ s.$$

Vježba 168

U staklenoj cijevi unutarnjeg polumjera 4 mm nalazi se živa mase 4 kg. Cijev je savijena u obliku slova U, a kraci su u okomitom položaju. Kolika je perioda titranja žive, ako živu izvedemo iz ravnotežnog položaja? (gustoća žive ρ = 13600 kg/m^3, ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m/s^2)

Rezultat: 3.43 s.

Zadatak 169 (Ivan, gimnazija)

Skakač (bungee jumper) mase 75 kg priveže za noge elastično uže i skoči s mosta. Nakon skoka skakač se giba gore – dolje (titra) s periodom 4 s. Kada se skakač umiri duljina elastičnog užeta iznosi 20 m. Izračunajte duljinu nerastegnutog užeta. (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 169

m = 75 kg, T = 4 s, l = 20 m, g = 9.81 m/s^2, l_0 = ?

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Za računanje dovoljno je uzeti

$$F = k \cdot x.$$

gdje je k konstanta elastičnosti.

Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra.

Najprije odredimo konstantu elastičnosti k užeta.

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{m}{k}} \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 = \frac{m}{k} \Rightarrow \frac{m}{k} = \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 \Rightarrow \frac{k}{m} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{k}{m} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \ / \cdot m \Rightarrow k = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot m.$$

Budući da je težina G skakača elastična sila F koja rasteže uže za koje je skakač privezan, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} F = G \\ F = k \cdot \Delta l \end{array}\right\} \Rightarrow G = k \cdot \Delta l \Rightarrow m \cdot g = k \cdot (l - l_0) \Rightarrow m \cdot g = k \cdot (l - l_0) \ / \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{m \cdot g}{k} = l - l_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_0 = l - \frac{m \cdot g}{k} \Rightarrow \left[k = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot m \right] \Rightarrow l_0 = l - \frac{m \cdot g}{\left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot m} \Rightarrow l_0 = l - \frac{m \cdot g}{\left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_0 = l - \frac{g}{\left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2} \Rightarrow l_0 = l - \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot g = 20\ m - \left(\frac{4\ s}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot 9.81\ \frac{m}{s^2} = 16.02\ m.$$

Vježba 169

Skakač (bungee jumper) mase 75 kg priveže za noge elastično uže i skoči s mosta. Nakon skoka skakač se giba gore – dolje (titra) s periodom 4 s. Kada se skakač umiri duljina elastičnog užeta iznosi 25 m. Izračunajte duljinu nerastegnutog užeta. (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m/s^2)

Rezultat: 21.02 m.

Zadatak 170 (Danijel, tehnička škola)

Opterećena utegom mase 1 kg opruga ima periodu titranja 0.567 s. Kolika treba biti masa utega da bi perioda titranja iznosila 1 s?

Rješenje 170

$m_1 = 1$ kg, $T_1 = 0.567$ s, $T_2 = 1$ s, $m_2 = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra.
Načinimo omjer perioda T_2 i T_1.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{m_2}{k}}{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{m_2}{k}}{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{m_2}{1}}{\frac{m_1}{1}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{T_2}{T_1} \ /^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \ / \cdot m_1 \Rightarrow m_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot m_1 =$$

$$=\left(\frac{1\ s}{0.567\ s}\right)^2\cdot 1\ kg=3.11\ kg.$$

Vježba 170

Opterećena utegom mase 1 kg opruga ima periodu titranja 1.134 s. Kolika treba biti masa utega da bi perioda titranja iznosila 2 s?

Rezultat: 3.11 kg.

Zadatak 171 (Matija, tehnička škola)

Harmonički val opisan je jednadžbom $s=A\cdot\sin(a\cdot t-b\cdot x)$. Odredi:

a) periodu
b) valnu duljinu
c) frekvenciju
d) brzinu širenja vala
e) maksimalnu brzinu titranja čestice.

Rješenje 171

$s=A\cdot\sin(a\cdot t-b\cdot x).$

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T\cdot\nu=1\ \Rightarrow\ T=\frac{1}{\nu}\ \Rightarrow\ \nu=\frac{1}{T}.$$

Brzina širenja vala v dana je formulom

$$v=\frac{\lambda}{T},$$

gdje je λ valna duljina, T perioda.
Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravo proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonički titra.
Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda A.
Kada tijelo prolijeće kroz ravnotežni položaj ima najveću brzinu

$$v_0=2\cdot\pi\cdot A\cdot\nu.$$

Ako je izvor vala harmonički oscilator elongacija s točke udaljene za x od ishodišta za vrijeme t iznosi:

$$s=A\cdot\sin 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right).$$

Računamo periodu T i valnu duljinu λ tako da preoblikujemo zadanu jednadžbu i usporedimo s jednadžbom vala.

$$\left.\begin{array}{l} s=A\cdot sin\,2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\\ s=A\cdot sin\left(a\cdot t-b\cdot x\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} s=A\cdot sin\,2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\\ s=A\cdot sin\,2\cdot\pi\cdot\left(\frac{a\cdot t}{2\cdot\pi}-\frac{b\cdot x}{2\cdot\pi}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} s = A\cdot sin\,2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \\ s = A\cdot sin\,2\cdot\pi\cdot\left(\frac{a\cdot t}{2\cdot\pi}-\frac{b\cdot x}{2\cdot\pi}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s = A\cdot sin\,2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \\ s = A\cdot sin\,2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{\frac{2\cdot\pi}{a}}-\frac{x}{\frac{2\cdot\pi}{b}}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} s = A\cdot sin\,2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \\ s = A\cdot sin\,2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{\frac{2\cdot\pi}{a}}-\frac{x}{\frac{2\cdot\pi}{b}}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T = \frac{2\cdot\pi}{a} \\ \lambda = \frac{2\cdot\pi}{b}\end{array}\right\}.$$

Sada računamo:

- frekvenciju ν

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{2\cdot\pi}{a} \\ \nu = \frac{1}{T}\end{array}\right\} \Rightarrow \nu = \frac{1}{\frac{2\cdot\pi}{a}} \Rightarrow \nu = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{2\cdot\pi}{a}} \Rightarrow \nu = \frac{a}{2\cdot\pi}$$

- brzinu širenja vala v

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{2\cdot\pi}{b} \\ T = \frac{2\cdot\pi}{a} \\ v = \frac{\lambda}{T}\end{array}\right\} \Rightarrow v = \frac{\frac{2\cdot\pi}{b}}{\frac{2\cdot\pi}{a}} \Rightarrow v = \frac{\frac{2\cdot\pi}{b}}{\frac{2\cdot\pi}{a}} \Rightarrow v = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}} \Rightarrow v = \frac{a}{b}$$

- maksimalnu brzinu titranja čestice v_0

$$\left.\begin{array}{l} \nu = \frac{a}{2\cdot\pi} \\ v_0 = 2\cdot\pi\cdot A\cdot\nu\end{array}\right\} \Rightarrow v_0 = 2\cdot\pi\cdot A\cdot\frac{a}{2\cdot\pi} \Rightarrow v_0 = 2\cdot\pi\cdot A\cdot\frac{a}{2\cdot\pi} \Rightarrow v_0 = A\cdot a.$$

Vježba 171

Harmonički val opisan je jednadžbom $s = 5\ cm\cdot\sin\left(10\ \frac{1}{s}\cdot t - 8\ \frac{1}{m}\cdot x\right)$. Odredi:

a) periodu
b) valnu duljinu
c) frekvenciju
d) brzinu širenja vala
e) maksimalnu brzinu titranja čestice.

Rezultat: $T = 0.628\ s\ ,\ \lambda = 0.785\ m\ ,\ \nu = 1.592\ Hz\ ,\ v = 1.25\ \frac{m}{s}\ ,\ v_0 = 0.5\ \frac{m}{s}.$

Zadatak 172 (Felix, gimnazija)

Izvor titra frekvencijom 352 Hz, a val se širi brzinom 340 m/s. Kolika je najmanja udaljenost točaka za koje je razlika u fazi $\frac{\pi}{8}$?

Rješenje 172

$\nu = 352$ Hz, v = 340 m/s. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{8}$, $\Delta x = ?$

Val je širenje titranja iz izvora vala kroz neko sredstvo. Udaljenost za koju se val proširio dok čestica u izvoru napravi jedan potpuni titraj zove se duljina vala λ. Brzina v, valna duljina λ te frekvencija ν povezane su formulom:

$$\mathrm{v} = \lambda \cdot \nu \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{\mathrm{v}}{\nu}.$$

Razlika faza dviju točaka udaljenih za $\Delta x = x_2 - x_1$ određena je izrazima:

$$\Delta\varphi = \frac{2\cdot\pi\cdot\Delta x}{\lambda} \quad , \quad \Delta\varphi = \frac{2\cdot\pi\cdot\Delta x\cdot\nu}{\mathrm{v}}.$$

Najmanja udaljenost Δx točaka iznosi:

$$\Delta\varphi = \frac{2\cdot\pi\cdot\Delta x\cdot\nu}{\mathrm{v}} \;\Rightarrow\; \Delta\varphi = \frac{2\cdot\pi\cdot\Delta x\cdot\nu}{\mathrm{v}} \;/\cdot\frac{\mathrm{v}}{2\cdot\pi\cdot\nu} \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{\Delta\varphi\cdot\mathrm{v}}{2\cdot\pi\cdot\nu} = \frac{\frac{\pi}{8}\cdot 340\ \frac{m}{s}}{2\cdot\pi\cdot 352\ \frac{1}{s}} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{8}\cdot 340\ \frac{m}{s}}{2\cdot\pi\cdot 352\ \frac{1}{s}} = \frac{340\ m}{16\cdot 352} = 0.06\ m = 6\ cm.$$

Vježba 172

Izvor titra frekvencijom 704 Hz, a val se širi brzinom 340 m/s. Kolika je najmanja udaljenost točaka za koje je razlika u fazi $\frac{\pi}{8}$?

Rezultat: 3 cm.

Zadatak 173 (Felix, gimnazija)

Dva ravna vala amplituda A, frekvencija ν, valne duljine λ šire se u smjeru osi x. Kolika je amplituda rezultantnog vala ako je razlika u hodu Δx?

Rješenje 173

A, ν, λ, Δx, $A_r = ?$

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T\cdot\nu = 1 \;\Rightarrow\; \nu = \frac{1}{T}.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravo proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonički titra.
Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda A.
Ako je izvor vala harmonički oscilator elongacija s točke udaljene za x od ishodišta za vrijeme t iznosi:

$$s = A\cdot\sin 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \;\Rightarrow\; s = A\cdot\sin 2\cdot\pi\cdot\left(\nu\cdot t - \frac{x}{\lambda}\right).$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Kosinus je parna funkcija:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Napišimo jednadžbe oba vala:

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = A \cdot sin\, 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) \\ s_2 = A \cdot sin\, 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x + \Delta x}{\lambda} \right) \end{array} \right\}.$$

Zbrajanjem jednadžbi dobije se jednadžba rezultantnog vala.

$$s_1 + s_2 = A \cdot sin\, 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) + A \cdot sin\, 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x + \Delta x}{\lambda} \right) =$$

$$= A \cdot \left[sin\, 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) + sin\, 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x + \Delta x}{\lambda} \right) \right] = \left[\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \right] =$$

$$= A \cdot 2 \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) - 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x + \Delta x}{\lambda} \right)}{2} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) + 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x + \Delta x}{\lambda} \right)}{2} =$$

$$= 2 \cdot A \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} - \nu \cdot t + \frac{x + \Delta x}{\lambda} \right)}{2} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} + \nu \cdot t - \frac{x + \Delta x}{\lambda} \right)}{2} =$$

$$= 2 \cdot A \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} - \nu \cdot t + \frac{x}{\lambda} + \frac{\Delta x}{\lambda} \right)}{2} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot \nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} - \frac{x + \Delta x}{\lambda} \right)}{2} =$$

$$= 2 \cdot A \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} - \nu \cdot t + \frac{x}{\lambda} + \frac{\Delta x}{\lambda} \right)}{2} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot \nu \cdot t - \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{x + \Delta x}{\lambda} \right) \right)}{2} =$$

$$= 2 \cdot A \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}}{2} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot \nu \cdot t - \frac{2 \cdot x + \Delta x}{\lambda} \right)}{2} =$$

$$= 2 \cdot A \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{2 \cdot \lambda} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot \nu \cdot t - \frac{2 \cdot x + \Delta x}{\lambda} \right)}{2} = 2 \cdot A \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{2 \cdot \lambda} \cdot \sin\pi \cdot \left(2 \cdot \nu \cdot t - \frac{2 \cdot x + \Delta x}{\lambda} \right) =$$

$$= 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \right) \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2 \cdot \lambda} \right).$$

Amplitudu A_r rezultantnog vala dobijemo uspoređivanjem jednadžbe rezultantnog vala s jednadžbom vala.

$$\left.\begin{array}{l} s = A \cdot sin\, 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) \\ s = 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \right) \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2 \cdot \lambda} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} s = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \dfrac{x}{\lambda} \right) \\ \Rightarrow \\ s = \underbrace{2 \cdot A \cdot \cos \left(\dfrac{\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \right)}_{A_r} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \dfrac{2 \cdot x + \Delta x}{2 \cdot \lambda} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow A_r = 2 \cdot A \cdot \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \right).$$

Vježba 173

Dva ravna vala amplituda 10 cm, frekvencija 15 Hz, valne duljine 18 cm šire se u smjeru osi x. Kolika je amplituda rezultantnog vala ako je razlika u hodu 5 cm?

Rezultat: 12.86 cm.

Zadatak 174 (Toby, tehnička škola)

Perioda nekog titranja iznosi 0.05 s. Koliki je broj titraja u pola minute?

Rješenje 174

T = 0.05 s, $t = \frac{1}{2} \min = 30\ s$, n = ?

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

1.inačica

Najprije odredimo frekvenciju titranja.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.05\ s} = 20 \frac{1}{s} = 20\ Hz.$$

Budući da je to broj titraja u 1 sekundi, broj titraja u 30 sekundi iznosit će:

$$n = t \cdot \nu = 30\ s \cdot 20 \frac{1}{s} = 600.$$

2.inačica

Ako je perioda nekog titranja jednaka T, tada će broj titraja u vremenu t iznositi:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{30\ s}{0.05\ s} = 600.$$

Vježba 174

Perioda nekog titranja iznosi 0.1 s. Koliki je broj titraja u jednoj minuti?

Rezultat: 600.

Zadatak 175 (Ivica, tehnička škola)

Kada se na elastičnu oprugu objesi uteg, opruga se produlji za 5.4 cm. Koliko će titraja načiniti uteg u jednoj minuti ako se opterećena opruga pusti titrati? (akceleracija sile teže g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 175

s = 5.4 cm = 0.054 m, t = 1 min = 60 s, g = 9.81 m/s^2, n = ?

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak s (elongaciju) i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku s, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = - k \cdot s$$

kažemo da harmonijski titra, k je konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu). Predznak minus pokazuje da je harmonijska sila suprotnog smjera od elongacije. Predznak minus – možemo izostaviti u numeričkim zadatcima.

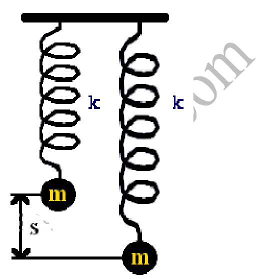
Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \;\Rightarrow\; T = \frac{1}{\nu} \;\Rightarrow\; \nu = \frac{1}{T}.$$

Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \;\Rightarrow\; T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{F}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra.



Kada uteg mase m visi na opruzi sila teža jednaka je sili opruge pa je perioda jednaka:

$$\left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{F}} \\ F = G \end{array}\right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{G}} \;\Rightarrow\; T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{m \cdot g}} \;\Rightarrow\; T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{m \cdot g}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{s}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.054\ m}{9.81\ \frac{m}{s^2}}} = 0.47\ s.$$

Frekvencija je:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.47\ s} = 2.13\ \frac{1}{s} = 2.13\ Hz.$$

Budući da je to broj titraja u 1 sekundi, broj titraja u 1 minuti iznosit će:

$$n = \nu \cdot t = 2.13\ \frac{1}{s} \cdot 60\ s = 127.8.$$

Vježba 175

Kada se na elastičnu oprugu objesi uteg, opruga se produlji za 54 mm. Koliko će titraja načiniti uteg u jednoj minuti ako se opterećena opruga pusti titrati? (akceleracija sile teže g = 9.81 m/s^2)

Rezultat: 127.8.

Zadatak 176 (Marta, srednja škola)

Uteg mase m titra na elastičnoj opruzi frekvencijom 0.8 Hz. Dodamo li tom utegu drugi uteg mase 0.5 kg frekvencija titranja smanji se na 0.4 Hz. Kolika je masa m prvog utega?

Rješenje 176

$m_1 = m, \quad \nu_1 = 0.8 \text{ Hz}, \quad m_2 = 0.5 \text{ kg}, \quad \nu_2 = 0.4 \text{ Hz}, \quad m = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak s (elongaciju) i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku s, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot s$$

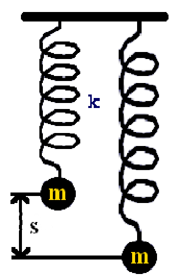
kažemo da harmonijski titra, k je konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu). Predznak minus pokazuje da je harmonijska sila suprotnog smjera od elongacije. Predznak minus – možemo izostaviti u numeričkim zadatcima.

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi).

Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je frekvencija titranja:

$$\nu = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra.



Kada uteg mase m visi na opruzi sila teža jednaka je sili opruge pa je perioda jednaka:

$$\nu_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \nu_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m + m_2}}.$$

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m + m_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m + m_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{\frac{k}{m + m_2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{m + m_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{m + m_2}}} \Big/ ^2 \Rightarrow \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{m + m_2}} \Rightarrow \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{m + m_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m+m_2}} \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m+m_2}{m} \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m+m_2}{m} \; / \cdot m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = m + m_2 \Rightarrow m \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - m = m_2 \Rightarrow m \cdot \left(\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1\right) = m_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \left(\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1\right) = m_2 \; / \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1 \Rightarrow m = \frac{m_2}{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1} = \frac{0.5 \; kg}{\left(\frac{0.8 \; Hz}{0.4 \; Hz}\right)^2 - 1} \Rightarrow 0.17 \; kg.$$

Vježba 176

Uteg mase m titra na elastičnoj opruzi frekvencijom 0.4 Hz. Dodamo li tom utegu drugi uteg mase 0.5 kg frekvencija titranja smanji se na 0.2 Hz. Kolika je masa m prvog utega?

Rezultat: 0.17 kg.

Zadatak 177 (Martin, srednja škola)

Žicu dugu 2 m, mase 10 g, nateže sila od 10 N. Kolika je brzina transverzalnog vala po žici?

Rješenje 177

l = 2 m, m = 10 g = 0.01 kg, F = 10 N, v = ?

Na napetom užetu ili žici val se širi brzinom

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}},$$

gdje je F napetost užeta, l duljina užeta, m njegova masa.
Brzina transverzalnog vala iznosi:

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} = \sqrt{\frac{10 \; N \cdot 2 \; m}{0.01 \; kg}} = 44.72 \; \frac{m}{s}.$$

Vježba 177

Žicu dugu 2 m, mase 20 g, nateže sila od 20 N. Kolika je brzina transverzalnog vala po žici?

Rezultat: 44.72 m/s.

Zadatak 178 (Martin, srednja škola)

Uže je dugo 12 m. Pokus pokazuje da transverzalni val prelazi s jednog kraja na drugi za 1.5 s, ako uže nateže sila od 20 N. Kolika je masa užeta?

Rješenje 178

l = 12 m, t = 1.5 s, F = 20 N, m = ?

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow v = \frac{s}{t},$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba, t vrijeme gibanja.
Na napetom užetu ili žici val se širi brzinom

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}},$$

gdje je F napetost užeta, l duljina užeta, m njegova masa.

Računamo masu m užeta.

$$\left.\begin{array}{l} v = \frac{l}{t} \\ v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{l}{t} = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \Rightarrow \frac{l}{t} = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \; /^2 \Rightarrow \left(\frac{l}{t}\right)^2 = \frac{F \cdot l}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{t^2} = \frac{F \cdot l}{m} \Rightarrow \frac{l^2}{t^2} = \frac{F \cdot l}{m} \; / \cdot \frac{m \cdot t^2}{l^2} \Rightarrow m = \frac{F \cdot t^2}{l} = \frac{20 \; N \cdot (1.5 \; s)^2}{12 \; m} = 3.75 \; kg.$$

Vježba 178

Uže je dugo 24 m. Pokus pokazuje da transverzalni val prelazi s jednog kraja na drugi za 1.5 s, ako uže nateže sila od 40 N. Kolika je masa užeta?

Rezultat: 3.75 kg.

Zadatak 179 (Nikica, tehnička škola)

Kad je na oprugu stavljeno tijelo mase M perioda titranja iznosi T. Kolika je perioda titranja ako na oprugu dodamo tijelo mase m? (Rezultat izraziti preko T, M i m)

Rješenje 179

M, T, m, $T_1 = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.
Ako je na opruzi tijelo mase M perioda titranja T iznosi:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Ako na oprugu dodamo tijelo mase m, ukupna masa bit će M + m, perioda titranja T_1 iznosi:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

Iz sustava jednadžbi izračuna se perioda T_1.

$$\left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M+m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M+m}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M+m}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{M+m}{k}}}{\sqrt{\frac{M}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{M+m}{k}}{\frac{M}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{M+m}{k}}{\frac{M}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{M+m}{M}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{M+m}{M}} \; / \cdot T \Rightarrow T_1 = T \cdot \sqrt{\frac{M+m}{M}}.$$

Vježba 179

Kad je na oprugu stavljeno tijelo mase m perioda titranja iznosi T. Kolika je perioda titranja ako na oprugu dodamo tijelo mase m?

Rezultat: $T_1 = T \cdot \sqrt{2}.$

Zadatak 180 (Nikica, tehnička škola)

Što treba napraviti sa duljinom matematičkog njihala da bi imalo istu periodu titranja u dizalu koje se spušta ubrzanjem $a = \frac{1}{4} \cdot g$ kao u slučaju da dizalo miruje?

Rješenje 180

$a = \frac{1}{4} \cdot g, \quad l, \quad l_1 = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Perioda titranja matematičkog njihala duljine l ako se nalazi u dizalu:

- koje stoji (miruje)

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- koje se giba jednoliko prema gore (dolje)

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- koje se giba gore ubrzanjem a

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + a}}$$

- koje se giba dolje ubrzanjem a

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g - a}}$$

- koje se giba dolje ubrzanjem a = g

$$\left.\begin{array}{l} a = g \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g - a}} \end{array}\right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g - g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{0}} = \infty, \text{ bestežinsko stanje.}$$

(Izraz za ∞ nije matematički korektno napisan, ali je dopušteno.)
Neka je T_1 perioda matematičkog njihala, duljine l, u dizalu koje miruje.

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Neka je T_2 perioda matematičkog njihala, duljine l_1, u dizalu koje se spušta ubrzanjem a.

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g - a}}.$$

Prema uvjetu zadatka periode moraju biti jednake pa vrijedi:

$$T_2 = T_1 \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g-a}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g-a}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{g-a}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{g-a}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{l_1}{g-a}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{g-a} = \frac{l}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{g-a} = \frac{l}{g} \ / \cdot (g-a) \Rightarrow l_1 = \frac{l}{g} \cdot (g-a) \Rightarrow \left[a = \frac{1}{4} \cdot g\right] \Rightarrow l_1 = \frac{l}{g} \cdot \left(g - \frac{1}{4} \cdot g\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{l}{g} \cdot \frac{3}{4} \cdot g \Rightarrow l_1 = \frac{l}{g} \cdot \frac{3}{4} \cdot g \Rightarrow l_1 = \frac{3}{4} \cdot l.$$

Duljinu matematičkog njihala treba skratiti za $\frac{1}{4}$, tj. za 25%.

Vježba 180

Što treba napraviti sa duljinom matematičkog njihala da bi imalo istu periodu titranja u dizalu koje se spušta ubrzanjem $a = \frac{1}{2} \cdot g$ kao u slučaju da dizalo miruje?

Rezultat: Duljinu matematičkog njihala treba skratiti za $\frac{1}{2}$, tj. za 50%.