

Zadatak 141 (Pety, gimnazija)

Objesimo li tijelo na oprugu ona se produži za 4 cm. Ako taj sustav opruga + tijelo zatitramo, kolika je perioda i frekvencija? (akceleracija sile teže $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 141

$$s = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T = ?, \quad \nu = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak s (elongaciju) i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravo proporcionalna pomaku s , smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot s$$

kažemo da harmonijski titra, k je konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu). Predznak minus pokazuje da je harmonijska sila suprotnog smjera od elongacije. Predznak minus – možemo izostaviti u numeričkim zadacima.

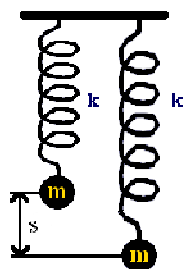
Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{F}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra.



Kada uteg mase m visi na opruzi sila teža jednaka je sili opruge pa je perioda jednaka:

$$\left. \begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{F}} \\ F = G \end{array} \right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{G}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{m \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{m \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{s}{g}} =$$
$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.04 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.4 \text{ s}.$$

Frekvencija iznosi:

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.4 \text{ s}} = 2.5 \frac{1}{\text{s}} = 2.5 \text{ Hz}.$$

Vježba 141

Objesimo li tijelo na oprugu ona se produlji za 16 cm. Ako taj sustav opruga + tijelo zatitramo, kolika je perioda i frekvencija? (akceleracija sile teže $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $T = 0.8 \text{ s}$, $v = 1.25 \text{ Hz}$.

Zadatak 142 (Matea, gimnazija)

Žicu dugu 2 m mase 10 g napinjemo silom od 10 N. Kolika je brzina transverzalnog vala po žici?

Rješenje 142

$$l = 2 \text{ m}, \quad m = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}, \quad F = 10 \text{ N}, \quad v = ?$$

Transverzalni val je val kod kojeg čestice elastičnog sredstva titraju okomito na smjer širenja vala. Brzina širenja vala u napetoj žici je

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

gdje je F napetost žice, a μ omjer mase i duljine žice.

$$\mu = \frac{m}{l}.$$

Brzina transverzalnog vala po žici iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \frac{m}{l} \\ v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F}{\frac{m}{l}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10 \text{ N} \cdot 2 \text{ m}}{0.01 \text{ kg}}} = 44.72 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 142

Žicu dugu 4 m mase 10 g napinjemo silom od 5 N. Kolika je brzina transverzalnog vala po žici?

Rezultat: 44.72 m/s .

Zadatak 143 (Matea, gimnazija)

Ribič sjedi na obali i opaža da plovak iznad udice izvodi 10 titraja za vrijeme od 4 s i da je razmak između dva brijega vala 0.8 m. Kolika je brzina valova?

Rješenje 143

$$n = 10 \text{ titraja}, \quad t = 4 \text{ s}, \quad \lambda = 0.8 \text{ m}, \quad v = ?$$

Transverzalni val je val kod kojeg čestice elastičnog sredstva titraju okomito na smjer širenja vala. Frekvencija v je broj titraja (ophoda) u jedinici vremena.

Frekvencija titranja v računa se po formuli

$$v = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t .

Brzina širenja vala v dana je formulom

$$v = \lambda \cdot v,$$

gdje je λ valna duljina, v frekvencija vala.

Brzina valova je:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{n}{t} \\ v = \lambda \cdot \nu \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow v = \lambda \cdot \frac{n}{t} = 0.8 \text{ m} \cdot \frac{10}{4 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Vježba 143

Ribič sjedi na obali i opaža da plovak iznad udice izvodi 20 titraja za vrijeme od 8 s i da je razmak između dva brijega vala 0.8 m. Kolika je brzina valova?

Rezultat: 2 m/s.

Zadatak 144 (Matea, gimnazija)

Uže je dugo 12 m. Pokus pokazuje da transversalni val prelazi s jednog kraja na drugi za 1.5 s, ako uže napinje sila od 20 N. Kolika je masa užeta?

Rješenje 144

$$l = 12 \text{ m}, \quad t = 1.5 \text{ s}, \quad F = 20 \text{ N}, \quad m = ?$$

Transverzalni val je val kod kojeg čestice elastičnog sredstva titraju okomito na smjer širenja vala. Brzina širenja vala u napetoj žici je

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}}$$

gdje je F napetost žice, l duljina žice, m masa žice.

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow v = \frac{s}{t},$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Širenje valnog gibanja je jednoliko pravocrtno gibanje pa brzinu vala možemo izraziti formulom

$$v = \frac{l}{t}.$$

Iz sustava jednadžbi izračuna se masa m.

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{l}{t} \\ v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{l}{t} = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{l}{t} = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \quad /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{l}{t} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \right)^2 \Rightarrow \frac{l^2}{t^2} = \frac{F \cdot l}{m} \Rightarrow \frac{l^2}{t^2} = \frac{F \cdot l}{m} \cdot \frac{m \cdot t^2}{l^2} \Rightarrow m = \frac{F \cdot l \cdot t^2}{l^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{F \cdot l \cdot t^2}{l^2} \Rightarrow m = \frac{F \cdot t^2}{l} = \frac{20 \text{ N} \cdot (1.5 \text{ s})^2}{12 \text{ m}} = 3.75 \text{ kg}.$$

Vježba 144

Uže je dugo 24 m. Pokus pokazuje da transversalni val prelazi s jednog kraja na drugi za 1.5 s, ako uže napinje sila od 40 N. Kolika je masa užeta?

Rezultat: 3.75 kg.

Zadatak 145 (Jaca, strukovna škola)

Jednostavno njihalo titra harmonijski. Što treba učiniti da se poveća njegova perioda?

- A. smanjiti duljinu njihala B. povećati duljinu njihala
C. smanjiti amplitudu titranja D. povećati amplitudu titranja

Rješenje 145

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja niže koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Iz formule je vidljivo da je perioda matematičkog njihala razmjerna sa kvadratnim korjenom duljine njihala. Da bi se povećala perioda njihala treba povećati duljinu njihala. Odgovor je pod B.

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T \sim \sqrt{l}.$$

Vježba 145

Jednostavno njihalo titra harmonijski. Što treba učiniti da se smanji njegova perioda?

- A. smanjiti duljinu njihala B. povećati duljinu njihala
C. smanjiti amplitudu titranja D. povećati amplitudu titranja

Rezultat: A.

Zadatak 146 (Jaca, strukovna škola)

Tijelo harmonijski titra amplitudom 2 cm. Koliki put prijeđe tijekom dvije periode?

- A. 4 cm B. 8 cm C. 16 cm D. 32 cm

Rješenje 146

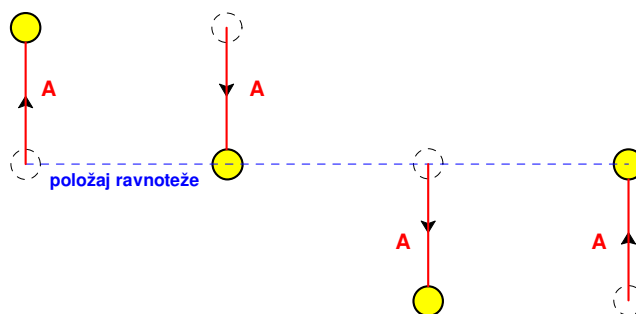
$$A = 2 \text{ cm}, \quad t = 2 \cdot T, \quad s = ?$$

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravo proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.

Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda A .

Put je skalarna veličina koja opisuje ukupnu duljinu putanje.



Tijekom jedne periode titranja tijelo prijeđe put s_1 :

$$s_1 = A + A + A + A \Rightarrow s_1 = 4 \cdot A = 4 \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}.$$

Tijekom dvije periode titranja tijelo prijeđe put s :

$$s = 2 \cdot s_1 = 2 \cdot 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 146

Tijelo harmonijski titra amplitudom 1 cm. Koliki put prijeđe tijekom dviju perioda?

- A. 4 cm B. 8 cm C. 16 cm D. 32 cm

Rezultat: B.

Zadatak 147 (Cathy, gimnazija)

Tijelo harmonijski titra amplitudom y_0 . Koliki put prijeđe tijekom jedne periode titranja?

- A. y_0 B. $2 \cdot y_0$ C. $\frac{y_0}{2}$ D. $4 \cdot y_0$

Rješenje 147

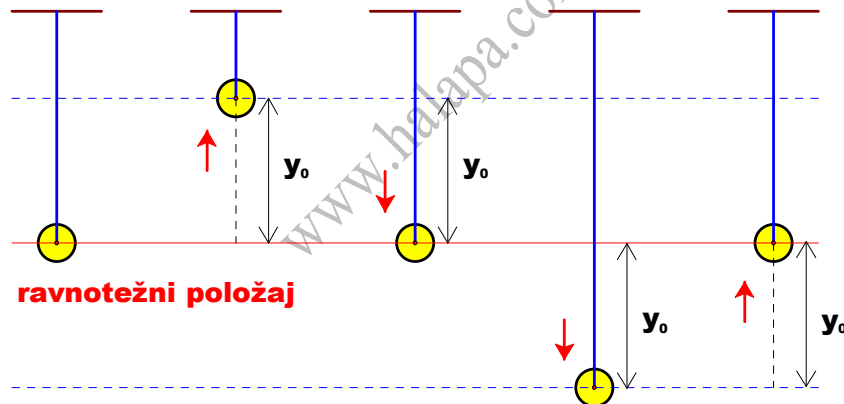
y_0 , T, $s = ?$

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.

Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda.

Put je skalarna veličina koja opisuje ukupnu duljinu putanje.



Tijekom jedne periode titranja tijelo prijeđe put s:

$$s = y_0 + y_0 + y_0 + y_0 \Rightarrow s = 4 \cdot y_0.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 147

Tijelo harmonijski titra amplitudom y_0 . Koliki put prijeđe tijekom pola periode titranja?

- A. y_0 B. $2 \cdot y_0$ C. $\frac{y_0}{2}$ D. $4 \cdot y_0$

Rezultat: B.

Zadatak 148 (Cathy, gimnazija)

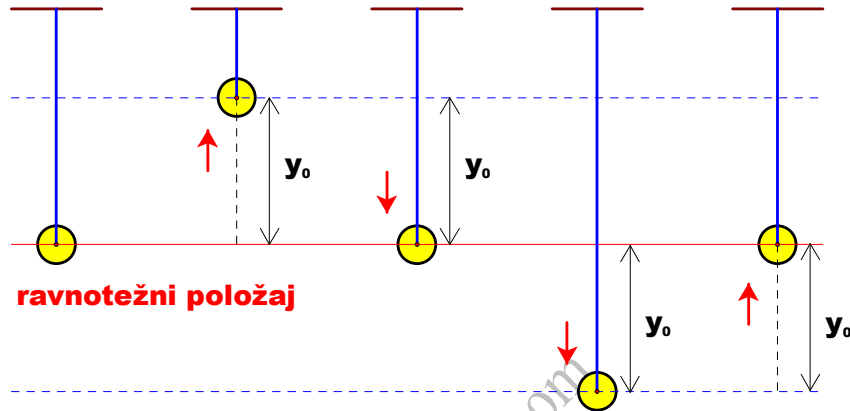
Tijelo harmonijski titra amplitudom y_0 . Koliki je pomak tijela nakon jedne periode titranja?

- A. 0 B. y_0 C. $3 \cdot y_0$ D. $\frac{y_0}{2}$

Rješenje 148

$$y_0, \quad T, \quad p = ?$$

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje. Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda. Put je skalarna veličina koja opisuje ukupnu duljinu putanje. Pomak je vektor koji pokazuje promjenu položaja u odnosu na prethodni položaj. To je najkraća udaljenost između dvije točke putanje tijela.



Budući da se tijelo nakon jedne periode vrati u početni položaj (ravnotežni položaj), pomak je jednak nuli, $p = 0$.

Odgovor je pod A.

Vježba 148

Tijelo harmonijski titra amplitudom y_0 . Koliki je pomak tijela nakon dvije periode titranja?

- A. 0 B. y_0 C. $3 \cdot y_0$ D. $\frac{y_0}{2}$

Rezultat: A.

Zadatak 149 (Cathy, gimnazija)

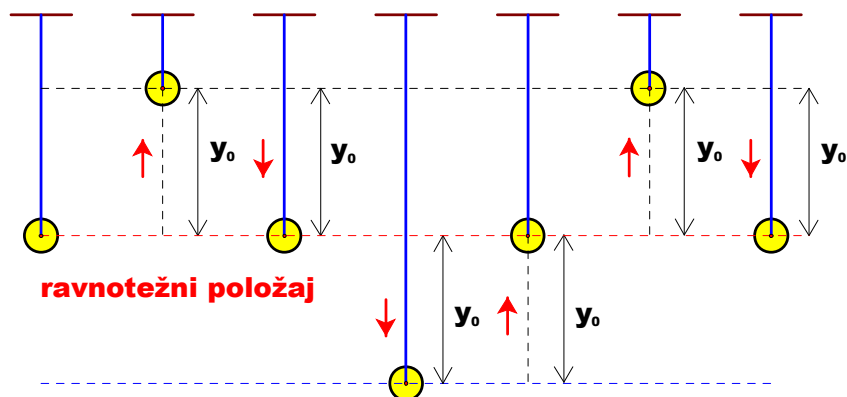
Tijelo harmonijski titra amplitudom y_0 i periodom T . Tijelo prijeđe put od $6 \cdot y_0$. Koliki je pomak tijela u tom slučaju?

- A. 0 B. y_0 C. $3 \cdot y_0$ D. $6 \cdot y_0$

Rješenje 149

$$y_0, \quad T, \quad s = 6 \cdot y_0, \quad p = ?$$

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje. Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda. Put je skalarna veličina koja opisuje ukupnu duljinu putanje. Pomak je vektor koji pokazuje promjenu položaja u odnosu na prethodni položaj. To je najkraća udaljenost između dvije točke putanje tijela.



Kada tijelo prijeđe put od $s = 6 \cdot y_0$ vrati se u prvobitni položaj (ravnotežni položaj) pa je njegov pomak jednak nuli, $p = 0$.

Odgovor je pod A.

Vježba 149

Tijelo harmonijski titra amplitudom y_0 i periodom T . Tijelo prijeđe put od $8 \cdot y_0$. Koliki je pomak tijela u tom slučaju?

- A. 0 B. y_0 C. $3 \cdot y_0$ D. $6 \cdot y_0$

Rezultat: A.

Zadatak 150 (Cathy, gimnazija)

Tijelo harmonijski titra amplitudom y_0 i periodom T . Koliki je pomak tijela u vremenskom intervalu $1.75 \cdot T$?

- A. 0 B. y_0 C. $3 \cdot y_0$ D. $6 \cdot y_0$

Rješenje 150

$$y_0, \quad T, \quad t = 1.75 \cdot T, \quad p = ?$$

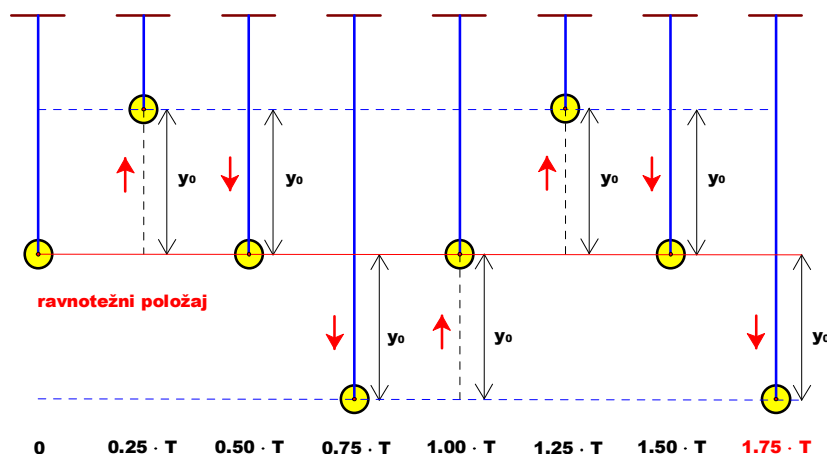
Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.

Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda.

Put je skalarna veličina koja opisuje ukupnu duljinu putanje.

Pomak je vektor koji pokazuje promjenu položaja u odnosu na prethodni položaj. To je najkraća udaljenost između dvije točke putanje tijela.



U vremenskom intervalu $t = 1.75 \cdot T$ tijelo se od ravnotežnog položaja udaljilo za y_0 pa je njegov pomak $p = y_0$. Odgovor je pod B.

Vježba 150

Tijelo harmonijski titra amplitudom y_0 i periodom T . Koliki je pomak tijela u vremenskom intervalu $1.50 \cdot T$?

- A. 0 B. y_0 C. $3 \cdot y_0$ D. $6 \cdot y_0$

Rezultat: A.

Zadatak 151 (Ivana, medicinska škola)

Perioda titranja iznosi 0.05 s. Koliki je broj titraja u pola minute?

- A. 300 B. 400 C. 500 D. 600

Rješenje 151

$$T = 0.05 \text{ s}, \quad t = \frac{1}{2} \text{ min} = \left[\frac{1}{2} \cdot 60 \text{ s} \right] = 30 \text{ s}, \quad n = ?$$

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca.

Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda).

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}$$

1. inačica

Perioda T je vrijeme jednog titraja pa broj titraja n u vremenu t iznosi:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{30 \text{ s}}{0.05 \text{ s}} = 600.$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

Računamo frekvenciju titranja.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.05 \text{ s}} = 20 \text{ Hz}.$$

Broj titraja u vremenu t iznosi:

$$n = \nu \cdot t = 20 \frac{1}{\text{s}} \cdot 30 \text{ s} = 600.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 151

Perioda titranja iznosi 0.1 s. Koliki je broj titraja u jednoj minuti?

- A. 300 B. 400 C. 500 D. 600

Rezultat: D.

Zadatak 152 (Ana, medicinska škola)

Tijelo harmonijski titra obješeno na oprugu konstante elastičnosti 0.2 N/m. Kinetička energija pri prolasku kroz ravnotežni položaj iznosi $2.5 \cdot 10^{-4}$ J. Kolikom amplitudom titra tijelo? Zanimajte gubitke energije.

- A. 1.3 cm B. 2.5 cm C. 5.0 cm D. 7.5 cm

Rješenje 152

$$k = 0.2 \text{ N/m}, \quad E_k = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ J}, \quad A = ?$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno

proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda A.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Kada tijelo prolazi ravnotežnim položajem, pomak (elongacija) mu je nula, a brzina maksimalna. Tada je i kinetička energija maksimalna, a elastična potencijalna nula. Kada je tijelo u amplitudnom položaju kinetička energija je nula, a elastična potencijalna je maksimalna. Budući da je ukupna mehanička energija (mehanička energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije u mehaničkom sustavu, tj. energija koja ovisi o položaju i gibanju tijela zbog djelovanja sile) očuvana, kinetička energija tijela u ravnotežnom položaju jednaka je elastičnoj potencijalnoj energiji koju tijelo ima u amplitudnom položaju.

Kinetička energija je najveća kada tijelo prolijeće kroz ravnotežni položaj. Tada ima maksimalnu kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

i elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot 0 = 0.$$

Elastična opruga produžena za x ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je k konstanta opruge. Energija će biti maksimalna kada tijelo ima maksimalnu elongaciju (kada ima amplitudu A).

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2.$$

Kada tijelo prolazi ravnotežnim položajem, vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} E = E_k + E_{ep} \\ E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ E_{ep} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_k + E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ E_{ep} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E_k + 0 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \quad | \cdot \frac{2}{k} \Rightarrow A^2 = \frac{2 \cdot E_k}{k} \Rightarrow A^2 = \frac{2 \cdot E_k}{k} \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{k}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ J}}{0.2 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 152

Tijelo harmonijski titra ovješeno na oprugu konstante elastičnosti 0.2 N/m. Kinetička energija pri prolasku kroz ravnotežni položaj iznosi 0.25 mJ. Kolikom amplitudom titra tijelo? Zanimarite gubitke energije.

- A. 1.3 cm B. 2.5 cm C. 5.0 cm D. 7.5 cm

Rezultat: C.

Zadatak 153 (Antun, tehnička škola)

Koliko je produljenje čelične žice, duljine 1 m i promjera 0.5 mm, ako je rastežemo silom od 80 N? (Youngov modul elastičnosti za čelik $E = 210 \text{ GPa}$)

Rješenje 153

$$l = 1 \text{ m}, \quad d = 0.5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad F = 80 \text{ N}, \quad E = 210 \text{ GPa} = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \quad \Delta l = ?$$

Produljenje tijela pri rastezanju je izravno razmjerno vanjskoj sili i duljini tijela, a obrnuto razmjerno ploštini poprečnog presjeka tijela.

$$\Delta l \sim \frac{F \cdot l}{S}$$

Koeficijent razmjernosti matematički prikazujemo u obliku recipročne vrijednosti Youngova modula elastičnosti, E , modula koji ovisi o vrsti materijala, odnosno o elastičnim svojstvima tvari od koje je tijelo napravljeno.

Hookov zakon za linearnu elastičnu deformaciju tijela glasi:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S},$$

gdje je Δl produljenje tijela, l duljina tijela, E Youngov modul elastičnosti, F vanjska sila, S ploština poprečnog presjeka tijela.

Ploština kruga promjera d dana je izrazom

$$S = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$



$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \Rightarrow \Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot l}{S} \Rightarrow \left[S = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \right] \Rightarrow \Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot l}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{4 \cdot F \cdot l}{d^2 \cdot \pi} = \frac{1}{2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}} \cdot \frac{4 \cdot 80 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}}{\left(5 \cdot 10^{-4} \text{ m}\right)^2 \cdot \pi} = 0.00194 \text{ m} = 1.94 \text{ mm}.$$

Vježba 153

Koliko je produljenje čelične žice, duljine 2 m i promjera 0.5 mm, ako je rastežemo silom od 40 N? (Youngov modul elastičnosti za čelik $E = 210 \text{ GPa}$)

Rezultat: 1.94 mm.

Zadatak 154 (Mario, gimnazija)

Omjer duljina niti dvaju matematičkih njihala je 1 : 4. U kojem su omjeru njihova titrajna vremena?

Rješenje 154

$$l_1 : l_2 = 1 : 4, \quad T_1 : T_2 = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i čija je masa kuglice koja njije koncentrirana u jednoj točki. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala je

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

1. inačica

Računamo omjer titrajnih vremena.

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{g} \cdot \frac{g}{l_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{g}{g}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{1}{1}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_1 : T_2 = 1 : 2. \end{aligned}$$

2. inačica

Iz formule za periodu matematičkog njihala izračunamo duljinu niti 1.

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = T \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = T \quad | \cdot 2 \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g} = T^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g} = T^2 \quad | \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow l = \frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}. \end{aligned}$$

Promatramo omjer duljina niti:

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{4} &\Rightarrow \frac{\frac{g \cdot T_1^2}{4 \cdot \pi^2}}{\frac{g \cdot T_2^2}{4 \cdot \pi^2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{g \cdot T_1^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{g \cdot T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_1 : T_2 = 1 : 2. \end{aligned}$$

Vježba 154

Omjer duljina niti dvaju matematičkih njihala je 1 : 9. U kojem su omjeru njihova titrajna vremena?

Rezultat: 1 : 3.

Zadatak 155 (Tin, tehnička škola)

Čestica mase 1 g titra frekvencijom 30 Hz. Kolika je najveća kinetička energija te čestice ako je amplituda titranja 3 mm?

Rješenje 155

$$m = 1 \text{ g} = 0.001 \text{ kg}, \quad v = 30 \text{ Hz}, \quad A = 3 \text{ mm} = 0.003 \text{ m}, \quad E_k = ?$$

Maksimalna kinetička energija čestice koja titra dana je izrazom

$$E_k = m \cdot 2 \cdot A^2 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \Rightarrow E_k = 2 \cdot m \cdot (A \cdot \pi \cdot v)^2,$$

gdje je m masa čestice, A amplituda titranja i v frekvencija (učestalost) titranja.

$$E_k = 2 \cdot m \cdot (A \cdot \pi \cdot v)^2 = 2 \cdot 0.001 \text{ kg} \cdot \left(0.003 \text{ m} \cdot \pi \cdot 30 \frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 1.60 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

Vježba 155

Čestica mase 2 g titra frekvencijom 30 Hz. Kolika je najveća kinetička energija te čestice ako je amplituda titranja 3 mm?

Rezultat: $3.20 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

Zadatak 156 (Tin, tehnička škola)

Tijelo mase 2.5 kg izvodi jednostavno harmoničko titranje sa 3 titraja u sekundi. Izračunajte elastičnu silu kad pomak iz položaja ravnoteže iznosi 5 cm.

Rješenje 156

$$m = 2.5 \text{ kg}, \quad \nu = 3 \text{ Hz}, \quad x = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, \quad F = ?$$

Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \nu^2 \cdot x,$$

gdje je ν frekvencija titranja, x elongacija (udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra). Predznak minus (-) znači da je elastična sila smjera suprotnoga pomaku.

Iznos elastične sile je:

$$F = 4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \nu^2 \cdot x = 4 \cdot \pi^2 \cdot 2.5 \text{ kg} \cdot \left(3 \frac{1}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0.05 \text{ m} = 44.41 \text{ N}.$$

Vježba 156

Tijelo mase 5 kg izvodi jednostavno harmoničko titranje sa 3 titraja u sekundi. Izračunajte elastičnu silu kad pomak iz položaja ravnoteže iznosi 2.5 cm.

Rezultat: 44.41 N.

Zadatak 157 (Tina, gimnazija)

Materijalna točka titra po zakonu $y(t) = 0.4 \text{ m} \cdot \sin\left(\pi \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$, gdje je y izraženo u metrima, a t u sekundama. Odredite amplitudu, periodu titranja i početnu fazu. Kada je faza titranja jednaka $\frac{\pi}{2}$? Kolika je elongacija u tom trenutku?

Rješenje 157

$$y(t) = 0.4 \text{ m} \cdot \sin\left(\pi \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right), \quad A = ?, \quad T = ?, \quad \varphi_0 = ?, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = ?,$$

$y_1 = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.

Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji.

Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow y(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi_0\right), \quad T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega},$$

gdje je y elongacija, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda (maksimalna elongacija), ω kružna frekvencija, T vrijeme jednog titraja (perioda), t vrijeme, φ_0 početni fazni kut.

Uspoređujući zadanu jednadžbu harmonijskog titranja s općom dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ y(t) = 0.4 \text{ m} \cdot \sin\left(\pi \frac{1}{s} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ y(t) = 0.4 \text{ m} \cdot \sin\left(\pi \frac{1}{s} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.4 \text{ m} \\ \omega = \pi \frac{1}{s} \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \left[T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \right] \\ A = 0.4 \text{ m} \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.4 \text{ m} \\ T = 2 \text{ s} \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}.$$

Računamo vrijeme t_1 kada je faza titranja jednaka φ_1 .

$$\begin{aligned} \omega \cdot t_1 + \varphi_0 &= \varphi_1 \Rightarrow \omega \cdot t_1 = \varphi_1 - \varphi_0 \Rightarrow \omega \cdot t_1 = \varphi_1 - \varphi_0 \cdot \frac{1}{\omega} \Rightarrow t_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\omega} = \\ &= \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{\pi \frac{1}{s}} = \frac{\frac{2 \cdot \pi - \pi}{4}}{\pi \frac{1}{s}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi \frac{1}{s}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{s}{\pi} = \frac{1}{4} \text{ s}. \end{aligned}$$

Tada je elongacija y_1 jednaka

$$y_1 = y(t_1) = A \cdot \sin \varphi_1 = 0.4 \text{ m} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0.4 \text{ m} \cdot 1 = 0.4 \text{ m}.$$

Vježba 157

Elongacija tijela koje harmonijski titra je 5 cm u trenutku kada je faza $\frac{\pi}{6}$. Kolika je amplituda titranja?

Rezultat: $y = A \cdot \sin \varphi \Rightarrow A = \frac{y}{\sin \varphi} = \frac{0.05 \text{ m}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 0.1 \text{ m}.$

Zadatak 158 (Ivana, gimnazija)

Njihalo duljine l_1 ima periodu $T_1 = 1.753 \text{ s}$. Produženo za $\Delta l = 84 \text{ cm}$ ima periodu $T_2 = 2.54 \text{ s}$. Odredite ubrzanje slobodnog pada.

Rješenje 158

$$T_1 = 1.753 \text{ s}, \quad \Delta l = 84 \text{ cm} = 0.84 \text{ m}, \quad T_2 = 2.54 \text{ s}, \quad a = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada. Matematičko njihalo duljine l_1 ima periodu T_1 pa vrijedi

$$l_1 = \frac{g \cdot T_1^2}{4 \cdot \pi^2}$$

Produženo za Δl imat će duljinu l_2 i periodu T_2 pa je

$$l_2 = \frac{g \cdot T_2^2}{4 \cdot \pi^2}$$

Iz produženja dobije se:

$$\begin{aligned} \Delta l = l_2 - l_1 &\Rightarrow \Delta l = \frac{g \cdot T_2^2}{4 \cdot \pi^2} - \frac{g \cdot T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow \Delta l = \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) &= \Delta l \Rightarrow \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) = \Delta l \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \Rightarrow g = \frac{\Delta l \cdot 4 \cdot \pi^2}{T_2^2 - T_1^2} = \\ &= \frac{0.84 \text{ m} \cdot 4 \cdot \pi^2}{(2.54 \text{ s})^2 - (1.753 \text{ s})^2} = 9.815 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Vježba 158

Njihalo duljine l_1 ima periodu $T_1 = 1.753$ s. Produženo za $\Delta l = 8.4$ dm ima periodu $T_2 = 2.54$ s. Odredite ubrzanje slobodnog pada.

Rezultat: $9.815 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Zadatak 159 (Ana, gimnazija)

U cijev oblika slova U nalivena je živa. Promjenom tlaka u jednom kraku pobuđeno je titranje žive u cijevi. Odredite periodu titranja ovog sustava, ako je masa žive 120 g, ubrzanje slobodnog pada 9.81 m/s^2 , a poprečni presjek cijevi 0.5 cm^2 . (gustoća žive $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 159

$$m = 120 \text{ g} = 0.12 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad S = 0.5 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, \quad \rho = 13600 \text{ kg/m}^3, \\ T = ?$$

Obujam valjka površine osnovke (baze) S i visine h iznosi:

$$V = S \cdot h.$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži:

$$G = m \cdot g.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x , smjera suprotnoga pomaku, dakle

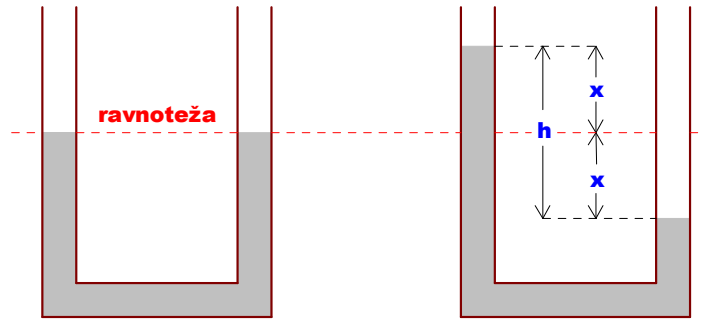
$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Za računanje dovoljno je uzeti

$$F = k \cdot x.$$

gdje je k konstanta elastičnosti. Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti periodu titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$



Kada je živa, u cijevi oblika slova U, u ravnoteži njezina je razina u oba kraka jednaka. Ako se poveća tlak u jednom kraku cijevi snizit će se razina žive za x , ali će se istodobno u drugom kraku povećati za x . Ukupna visinska razlika između gornje i donje razine žive iznosi

$$h = 2 \cdot x$$

pa je težina G tog stupca žive jednaka

$$\left. \begin{array}{l} G = \Delta m \cdot g \\ \Delta m = \rho \cdot V \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow G = \rho \cdot V \cdot g \Rightarrow \left[\begin{array}{l} V = S \cdot h \\ h = 2 \cdot x \end{array} \right] \Rightarrow G = \rho \cdot S \cdot 2 \cdot x \cdot g \Rightarrow \\ \Rightarrow G = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot x \cdot g.$$

Uočimo da je sila koja vraća sustav u položaj ravnoteže jednaka težini G stupca žive, tj. proporcionalna udaljenosti x od položaja ravnoteže.

$$\left. \begin{array}{l} F = k \cdot x \\ G = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot x \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow [F = G] \Rightarrow k \cdot x = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot x \cdot g \Rightarrow k \cdot x = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot x \cdot g \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow k = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot g.$$

Perioda titranja iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} k = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot g \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{2 \cdot \rho \cdot S \cdot g}} = \\ = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.12 \text{ kg}}{2 \cdot 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.596 \text{ s.}$$

Vježba 159

U cijev oblika slova U nalivena je živa. Promjenom tlaka u jednom kraku pobuđeno je titranje žive u cijevi. Odredite periodu titranja ovog sustava, ako je masa žive 12 dag, ubrzanje slobodnog pada 9.81 m/s^2 , a poprečni presjek cijevi 50 mm^2 . (gustoća žive $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 0.596 s.

Zadatak 160 (Josip, tehnička škola)

Ako se elastična čelična opruga optereti utegom mase $m_1 = 2 \text{ kg}$, onda se ona istegne za duljinu $l_1 = 4 \text{ cm}$. Odredi periodu titranja opruge, ako se na njezin donji kraj objesi uteg mase $m_2 = 6 \text{ kg}$. (akceleracija sile teže $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 160

$$m_1 = 2 \text{ kg}, \quad l_1 = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}, \quad m_2 = 6 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak s (elongaciju) i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravo proporcionalna pomaku s , smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot s$$

kažemo da harmonijski titra, k je konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu). Predznak minus pokazuje da je harmonijska sila suprotnog smjera od elongacije. Predznak minus – možemo izostaviti u numeričkim zadacima.

Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s}{F}}$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonijski titra.

Budući da je težina utega elastična sila koja rasteže oprugu, vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} G_1 = k \cdot l_1 \\ G_2 = k \cdot l_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m_1 \cdot g = k \cdot l_1 \\ m_2 \cdot g = k \cdot l_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{m_1 \cdot g}{m_2 \cdot g} = \frac{k \cdot l_1}{k \cdot l_2} \Rightarrow \frac{m_1 \cdot g}{m_2 \cdot g} = \frac{k \cdot l_1}{k \cdot l_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{l_2 \cdot m_2}{m_1} \Rightarrow l_2 = \frac{l_1 \cdot m_2}{m_1}$$

Kada se elastična opruga optereti utegom mase m_2 ona se istegne za duljinu l_2 pa njezina perioda T iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2 \cdot l_2}{G_2}} \\ l_2 = \frac{l_1 \cdot m_2}{m_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2 \cdot l_2}{m_2 \cdot g}} \\ l_2 = \frac{l_1 \cdot m_2}{m_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2 \cdot l_2}{m_2 \cdot g}} \\ l_2 = \frac{l_1 \cdot m_2}{m_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \\ l_2 = \frac{l_1 \cdot m_2}{m_1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{l_1 \cdot m_2}{m_1}}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1 \cdot m_2}{\frac{g}{1}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1 \cdot m_2}{m_1 \cdot g}} =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.04 \text{ m} \cdot 6 \text{ kg}}{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.695 \text{ s.}$$

Vježba 160

Ako se elastična čelična opruga optereti utegom mase $m_1 = 4$ kg, onda se ona istegne za duljinu $l_1 = 4$ cm. Odredi periodu titranja opruge, ako se na njezin donji kraj objesi uteg mase $m_2 = 12$ kg. (akceleracija sile teže $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.695 s.