Zadatak 121 (Ana, gimnazija)

Oprugu konstante 500 N/m stisnemo za 10 cm i pustimo titrati. Odredite najveću brzinu tijela mase 20 dag pri titranju.

$$A.\ 3\ \frac{m}{s} \qquad B.\ 5\ \frac{m}{s} \qquad C.\ 2\ \frac{m}{s} \qquad D.\ 4\ \frac{m}{s}$$

Rješenje 121

k = 500 N/m, s = 10 cm = 0.1 m, m = 20 dag = 0.2 kg, v = ?

Elastična opruga produžena za s ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2,$$

gdje je k konstanta opruge.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Pri titranju tijelo se giba, na primjer gore – dolje oko ravnotežnog položaja. Pomak tijela mijenja se od nule do maksimalnoga na jednu i na drugu stranu. Maksimalni pomak nazivamo amplitudom titranja. Kada tijelo prolazi ravnotežnim položajem, pomak (elongacija) mu je nula, a brzina maksimalna. Tada je i kinetička energija maksimalna, a elastična potencijalna nula. Kada je tijelo u amplitudnom položaju kinetička energija je nula, a elastična potencijalna je maksimalna. Budući da je ukupna mehanička energija očuvana, kinetička energija tijela u ravnotežnom položaju jednaka je elastičnoj potencijalnoj energiji koju tijelo ima u amplitudnom položaju.

$$E_k = E_{ep} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \ / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot s^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot s^2}{m} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot s^2}{m}} \Rightarrow v = s \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.1\ m \cdot \sqrt{\frac{500\ \frac{N}{m}}{0.2\ kg}} = 5\ \frac{m}{s}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 121

Oprugu konstante 1000 N/m stisnemo za 10 cm i pustimo titrati. Odredite najveću brzinu tijela mase 40 dag pri titranju.

$$A.\ 3\ \frac{m}{s} \qquad B.\ 5\ \frac{m}{s} \qquad C.\ 2\ \frac{m}{s} \qquad D.\ 4\ \frac{m}{s}$$

Rezultat: B.

Zadatak 122 (Vlado, gimnazija)

Kolika je perioda matematičkog njihala duljine 1 m na Zemlji, a kolika na Mjesecu? (Akceleracija slobodnog pada na Zemlji iznosi $g_1 = 9.81$ m/s^2, a na Mjesecu $g_2 = 1.62$ m/s^2)

Rješenje 122

l = 1 m, $g_1 = 9.81$ m/s^2, $g_2 = 1.62$ m/s^2, $T_1 = ?$, $T_2 = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Perioda matematičkog njihala duljine l je:

- na Zemlji

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1\ m}{9.81\ \frac{m}{s^2}}} = 2.006\ s$$

- na Mjesecu

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_2}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1\ m}{1.62\ \frac{m}{s^2}}} = 4.937\ s.$$

Vježba 122

Kolika je perioda matematičkog njihala duljine 1 m na planetu gdje je akceleracija slobodnog pada $g = 4\ m/s^2$?

Rezultat: 3.14 s.

Zadatak 123 (Vlado, gimnazija)

Duljina je matematičkog njihala na Zemlji 1 m. Za koliko posto treba smanjiti duljinu njihala na Mjesecu da bi njegova perioda bila ista kao na Zemlji?
(Akceleracija slobodnog pada na Zemlji iznosi $g_1 = 9.81\ m/s^2$, a na Mjesecu $g_2 = 1.62\ m/s^2$)

Rješenje 123

$l = 1$ m, $g_1 = 9.81\ m/s^2$, $g_2 = 1.62\ m/s^2$, $p = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Iz uvjeta da periode matematičkog njihala na Zemlji i Mjesecu moraju biti iste izračuna se duljina l_2 njihala na Mjesecu.

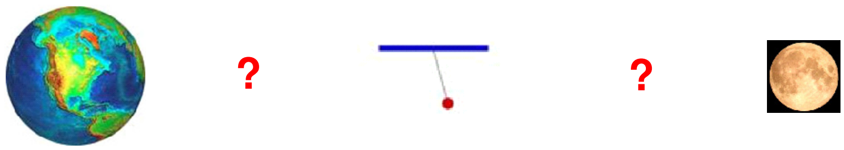
$$T_1 = T_2 \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g_2}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g_2}}\ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{g_2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{g_2}}\ /^2 \Rightarrow \frac{l_1}{g_1} = \frac{l_2}{g_2} \Rightarrow \frac{l_1}{g_1} = \frac{l_2}{g_2}\ / \cdot g_2 \Rightarrow l_2 = l_1 \cdot \frac{g_2}{g_1}.$$

Relativno smanjenje duljine njihala iznosi:

$$p = \frac{l_1 - l_2}{l_1} \Rightarrow p = \frac{l_1}{l_1} - \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow p = \frac{l_1}{l_1} - \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{l_1} \cdot l_2 \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{l_1} \cdot l_1 \cdot \frac{g_2}{g_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 1 - \frac{1}{l_1} \cdot l_1 \cdot \frac{g_2}{g_1} \Rightarrow p = 1 - \frac{g_2}{g_1} = 1 - \frac{1.62\ \frac{m}{s^2}}{9.81\ \frac{m}{s^2}} = 0.8349 = \frac{83.49}{100} = 83.49\ \%.$$



Vježba 123

Duljina je matematičkog njihala na Zemlji 100 cm. Za koliko posto treba smanjiti duljinu njihala na Mjesecu da bi njegova perioda bila ista kao na Zemlji?
(Akceleracija slobodnog pada na Zemlji iznosi $g_1 = 9.81$ m/s^2, a na Mjesecu $g_2 = 1.62$ m/s^2)

Rezultat: 83.49 %.

Zadatak 124 (Ivan, gimnazija)

Uzduž užeta širi se val brzinom 2 m/s. Svaka točka užeta izvrši jedan titraj za 0.4 s. Kolika je frekvencija titranja vala?

$$A.\ 4\ Hz \qquad B.\ 2.5\ Hz \qquad C.\ 25\ Hz \qquad D.\ 0.25\ Hz$$

Rješenje 124

v = 2 m/s, T = 0.4 s, ν = ?

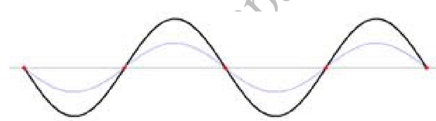
Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Frekvencija titranja iznosi:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.4\ s} = 2.5\ s^{-1} = 2.5\ Hz.$$

Odgovor je pod B.



Vježba 124

Uzduž užeta širi se val brzinom 2 m/s. Svaka točka užeta izvrši jedan titraj za 4 s. Kolika je frekvencija titranja vala?

$$A.\ 4\ Hz \qquad B.\ 2.5\ Hz \qquad C.\ 25\ Hz \qquad D.\ 0.25\ Hz$$

Rezultat: D.

Zadatak 125 (Ivan, gimnazija)

Dva jednaka zvučnika daju na istom mjestu u prostoru razinu zvuka od 95 dB. Kolika će biti razina zvuka na tom mjestu ako jedan od zvučnika prestane raditi?

Rješenje 125

v = 2 m/s, T = 0.4 s, ν = ?

Razina intenziteta zvuka (L) izražena u decibelima (dB) definira se izrazom

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0},$$

gdje intenzitet I_0 odgovara otprilike najslabijem zvuku kojeg još prosječno uho može čuti te iznosi

$$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2},$$

pri frekvenciji 1 kHz. Decibel je brojčana jedinica.
Budući da dva jednaka zvučnika daju na istom mjestu u prostoru razinu zvuka L_2, računamo intenzitet I_2 dva zvučnika.

$$L_2 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow L_2 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0} \; / \cdot \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{L_2}{10} = \log \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow \log \frac{I_2}{I_0} = \frac{L_2}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{antilogaritmiranje} \\ 10^{\log x} = x \end{bmatrix} \Rightarrow 10^{\log \frac{I_2}{I_0}} = 10^{\frac{L_2}{10}} \Rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{L_2}{10}} \Rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{L_2}{10}} \; / \cdot I_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}}.$$

Ako istodobno rade dva jednaka zvučnika intenzitet poraste dva puta. Dakle, kada radi jedan zvučnik intenzitet će biti upola manji.

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}}.$$

Računamo razinu intenziteta jednog zvučnika.

$$L_1 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow L_1 = 10 \cdot \log \frac{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}}}{I_0} \Rightarrow L_1 = 10 \cdot \log \frac{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}}}{I_0} \Rightarrow L_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{\frac{L_2}{10}} \right) =$$

$$= 10 \cdot \log \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{\frac{95}{10}} \right) = 10 \cdot \log \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{9.5} \right) = 91.99 \; dB \approx 92 \; dB.$$

Vježba 125

Dva jednaka zvučnika daju na istom mjestu u prostoru razinu zvuka od 80 dB. Kolika će biti razina zvuka na tom mjestu ako jedan od zvučnika prestane raditi?

Rezultat: 77 dB.

Zadatak 126 (ABC, tehnička škola)

Tijelo mase m ovješeno je o dvije opruge jednakih konstanti elastičnosti k. Jednom je ovješeno tako da su opruge u "seriji", a drugi put tako da su opruge u "paraleli". Periode titranja tijela u ta dva slučaja zadovoljavaju izraz:

$$A.\; T_s = T_p \qquad B.\; T_s = 2 \cdot T_p \qquad C.\; T_s = \frac{1}{2} \cdot T_p \qquad D.\; T_s = 4 \cdot T_p$$

Rješenje 126

$k_1 = k_2 = k$, $\quad T_s : T_p = ?$

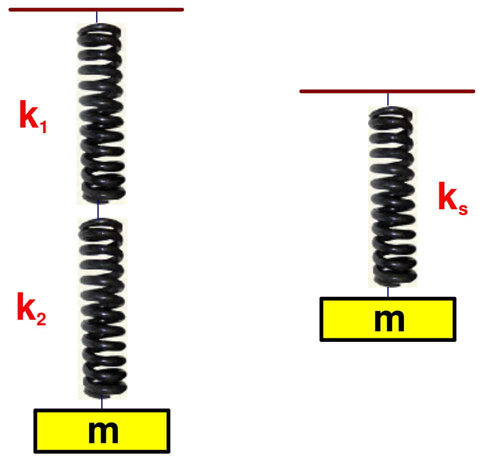
Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = - k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = - k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

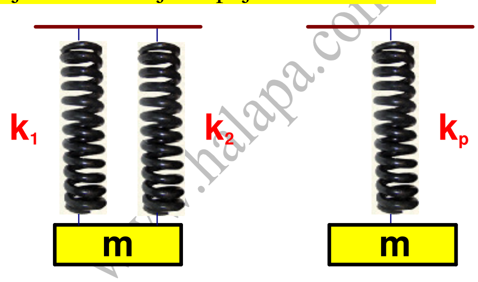
Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.



Ako dvije opruge koje imaju konstante elastičnosti k_1 i k_2 spojimo serijski, možemo ih zamijeniti jednom oprugom čija konstanta elastičnosti k_s iznosi:

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Serijski spojene opruge ponašaju se kao serijski spojeni kondenzatori.



Ako dvije opruge koje imaju konstante elastičnosti k_1 i k_2 spojimo paralelno, možemo ih zamijeniti jednom oprugom čija konstanta elastičnosti k_p iznosi:

$$k_p = k_1 + k_2.$$

Paralelno spojene opruge ponašaju se kao paralelno spojeni kondenzatori.

Tijelo mase m ovješeno je o dvije opruge jednakih konstanti elastičnosti k tako da su opruge u seriji. Konstanta elastičnosti k_s tog sustava iznosi:

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_s} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k_s} = \frac{2}{k} \Rightarrow k_s = \frac{k}{2}.$$

Tijelo mase m ovješeno je o dvije opruge jednakih konstanti elastičnosti k tako da su opruge u paraleli. Konstanta elastičnosti k_p tog sustava iznosi:

$$k_p = k_1 + k_2 \Rightarrow k_p = k + k \Rightarrow k_p = 2 \cdot k.$$

Računamo omjer perioda T_s i T_p.

$$\frac{T_s}{T_p} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_s}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_p}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_s}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_p}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p} = \frac{\sqrt{\frac{m}{k_s}}}{\sqrt{\frac{m}{k_p}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p} = \sqrt{\frac{\frac{m}{k_s}}{\frac{m}{k_p}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p} = \sqrt{\frac{\frac{m}{k_s}}{\frac{m}{k_p}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{1}{k_s}}{\frac{1}{k_p}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{k_p}{k_s}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{2\cdot k}{\frac{k}{2}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{2\cdot k}{1}}{\frac{k}{2}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{2\cdot k}{1}}{\frac{k}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{4} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=2 \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=2 \;/\cdot T_p \Rightarrow T_s=2\cdot T_p.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 126

Tijelo mase m ovješeno je o tri opruge jednakih konstanti elastičnosti k. Jednom je ovješeno tako da su opruge u "seriji", a drugi put tako da su opruge u "paraleli". Periode titranja tijela u ta dva slučaja zadovoljavaju izraz:

$$A.\ T_s=T_p \qquad B.\ T_s=3\cdot T_p \qquad C.\ T_s=\frac{1}{3}\cdot T_p \qquad D.\ T_s=6\cdot T_p$$

Rezultat: B.

Zadatak 127 (Josip, srednja škola)

Tijelo na opruzi titra frekvencijom 2 Hz. Povećanje mase tijela za 20 g povećat će periodu titranja za 0.2 s. Odredite konstantu elastičnosti opruge.

Rješenje 127

ν_1 = 2 Hz, m_1 = m, Δm = 20 g = 0.02 kg, m_2 = m + Δm, ΔT = 0.2 s, k = ?

Frekvencija ν je broj titraja (ophoda) u jedinici vremena. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T\cdot\nu=1 \Rightarrow T=\frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu=\frac{1}{T}.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F=-k\cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.
Računamo periode titranja tijela prije i nakon povećanja njegove mase.

$$\left.\begin{array}{l} T_1=\frac{1}{\nu_1} \\ T_2=T_1+\Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1=\frac{1}{2\ s^{-1}} \\ T_2=T_1+\Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1=0.5\ s \\ T_2=T_1+\Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1=0.5\ s \\ T_2=0.5\ s+0.2\ s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1=0.5\ s \\ T_2=0.7\ s \end{array}\right\}.$$

Iz sustava jednadžbi izračuna se konstanta elastičnosti k.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m_2}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m+\Delta m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \;/^2 \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m+\Delta m}{k}} \;/^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\dfrac{m}{k} \\ T_2^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\dfrac{m+\Delta m}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo prvu jednadžbu} \\ \text{od druge jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{m+\Delta m}{k} - 4\cdot\pi^2\cdot\frac{m}{k} \Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\left(\frac{m+\Delta m}{k} - \frac{m}{k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{m+\Delta m-m}{k} \Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{m+\Delta m-m}{k} \Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{\Delta m}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{\Delta m}{k} \;/\cdot\frac{k}{T_2^2 - T_1^2} \Rightarrow k = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{\Delta m}{T_2^2 - T_1^2} = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{0.02\ kg}{(0.7\ s)^2 - (0.5\ s)^2} =$$

$$= 3.29\ \frac{kg}{s^2} = 3.29\ \frac{kg\cdot m}{s^2}\cdot\frac{1}{m} = 3.29\ \frac{N}{m}.$$

Vježba 127

Tijelo na opruzi titra frekvencijom 2 Hz. Povećanje mase tijela za 2 dag povećat će periodu titranja za 0.2 s. Odredite konstantu elastičnosti opruge.

Rezultat: 3.29 N/m.

Zadatak 128 (Josip, srednja škola)

Tijelo na opruzi titra frekvencijom 2 Hz. Povećanje mase tijela za 20 g povećat će periodu titranja za 0.2 s. Odredite masu tijela.

Rješenje 128

$\nu_1 = 2$ Hz, $m_1 = m$, $\Delta m = 20$ g $= 0.02$ kg, $m_2 = m + \Delta m$, $\Delta T = 0.2$ s, $m = ?$

Frekvencija ν je broj titraja (ophoda) u jedinici vremena. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T\cdot\nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k\cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k\cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.
Računamo periode titranja tijela prije i nakon povećanja njegove mase.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{\nu_1} \\ T_2 = T_1 + \Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{2\ s^{-1}} \\ T_2 = T_1 + \Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 0.5\ s \\ T_2 = T_1 + \Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 0.5\ s \\ T_2 = 0.5\ s + 0.2\ s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 0.5\ s \\ T_2 = 0.7\ s \end{array}\right\}.$$

Iz sustava jednadžbi izračuna se masa m.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \ /^2 \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}} \ /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k} \\ T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m + \Delta m}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo drugu jednadžbu} \\ \text{s prvom jednadžbom} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m + \Delta m}{k}}{4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m + \Delta m}{k}}{4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{m + \Delta m}{m} \Rightarrow m \cdot T_2^2 = (m + \Delta m) \cdot T_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot T_2^2 = m \cdot T_1^2 + \Delta m \cdot T_1^2 \Rightarrow m \cdot T_2^2 - m \cdot T_1^2 = \Delta m \cdot T_1^2 \Rightarrow m \cdot \left(T_2^2 - T_1^2\right) = \Delta m \cdot T_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \left(T_2^2 - T_1^2\right) = \Delta m \cdot T_1^2 \ / \cdot \frac{1}{T_2^2 - T_1^2} \Rightarrow m = \frac{\Delta m \cdot T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{0.02\ kg \cdot (0.5\ s)^2}{(0.7\ s)^2 - (0.5\ s)^2} = 0.021\ kg = 21\ g.$$

Vježba 128

Tijelo na opruzi titra frekvencijom 2 Hz. Povećanje mase tijela za 2 dag povećat će periodu titranja za 0.2 s. Odredite masu tijela.

Rezultat: 21 g.