Zadatak 121 (Ana, gimnazija)

Oprugu konstante 500 N/m stisnemo za 10 cm i pustimo titrati. Odredite najveću brzinu tijela mase 20 dag pri titranju.

$$A.\ 3\ \frac{m}{s} \qquad B.\ 5\ \frac{m}{s} \qquad C.\ 2\ \frac{m}{s} \qquad D.\ 4\ \frac{m}{s}$$

Rješenje 121

k = 500 N/m, s = 10 cm = 0.1 m, m = 20 dag = 0.2 kg, v = ?

Elastična opruga produžena za s ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2,$$

gdje je k konstanta opruge.
Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Pri titranju tijelo se giba, na primjer gore – dolje oko ravnotežnog položaja. Pomak tijela mijenja se od nule do maksimalnoga na jednu i na drugu stranu. Maksimalni pomak nazivamo amplitudom titranja. Kada tijelo prolazi ravnotežnim položajem, pomak (elongacija) mu je nula, a brzina maksimalna. Tada je i kinetička energija maksimalna, a elastična potencijalna nula. Kada je tijelo u amplitudnom položaju kinetička energija je nula, a elastična potencijalna je maksimalna. Budući da je ukupna mehanička energija očuvana, kinetička energija tijela u ravnotežnom položaju jednaka je elastičnoj potencijalnoj energiji koju tijelo ima u amplitudnom položaju.

$$E_k = E_{ep} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \ / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot s^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot s^2}{m} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot s^2}{m}} \Rightarrow v = s \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.1\ m \cdot \sqrt{\frac{500\ \frac{N}{m}}{0.2\ kg}} = 5\ \frac{m}{s}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 121

Oprugu konstante 1000 N/m stisnemo za 10 cm i pustimo titrati. Odredite najveću brzinu tijela mase 40 dag pri titranju.

$$A.\ 3\ \frac{m}{s} \qquad B.\ 5\ \frac{m}{s} \qquad C.\ 2\ \frac{m}{s} \qquad D.\ 4\ \frac{m}{s}$$

Rezultat: B.

Zadatak 122 (Vlado, gimnazija)

Kolika je perioda matematičkog njihala duljine 1 m na Zemlji, a kolika na Mjesecu? (Akceleracija slobodnog pada na Zemlji iznosi $g_1 = 9.81\ m/s^2$, a na Mjesecu $g_2 = 1.62\ m/s^2$)

Rješenje 122

$l = 1$ m, $g_1 = 9.81\ m/s^2$, $g_2 = 1.62\ m/s^2$, $T_1 = ?$, $T_2 = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Perioda matematičkog njihala duljine l je:

- na Zemlji

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1\ m}{9.81\ \frac{m}{s^2}}} = 2.006\ s$$

- na Mjesecu

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_2}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1\ m}{1.62\ \frac{m}{s^2}}} = 4.937\ s.$$

Vježba 122

Kolika je perioda matematičkog njihala duljine 1 m na planetu gdje je akceleracija slobodnog pada g = 4 m/s^2?

Rezultat: 3.14 s.

Zadatak 123 (Vlado, gimnazija)

Duljina je matematičkog njihala na Zemlji 1 m. Za koliko posto treba smanjiti duljinu njihala na Mjesecu da bi njegova perioda bila ista kao na Zemlji?
(Akceleracija slobodnog pada na Zemlji iznosi g_1 = 9.81 m/s^2, a na Mjesecu g_2 = 1.62 m/s^2)

Rješenje 123

l = 1 m, g_1 = 9.81 m/s^2, g_2 = 1.62 m/s^2, p = ?

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Iz uvjeta da periode matematičkog njihala na Zemlji i Mjesecu moraju biti iste izračuna se duljina l_2 njihala na Mjesecu.

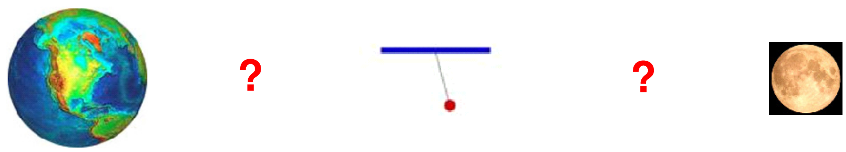
$$T_1 = T_2 \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g_2}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g_2}} \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{g_2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{g_2}} \ /^2 \Rightarrow \frac{l_1}{g_1} = \frac{l_2}{g_2} \Rightarrow \frac{l_1}{g_1} = \frac{l_2}{g_2} \ / \cdot g_2 \Rightarrow l_2 = l_1 \cdot \frac{g_2}{g_1}.$$

Relativno smanjenje duljine njihala iznosi:

$$p = \frac{l_1 - l_2}{l_1} \Rightarrow p = \frac{l_1}{l_1} - \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow p = \frac{l_1}{l_1} - \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{l_1} \cdot l_2 \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{l_1} \cdot l_1 \cdot \frac{g_2}{g_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 1 - \frac{1}{l_1} \cdot l_1 \cdot \frac{g_2}{g_1} \Rightarrow p = 1 - \frac{g_2}{g_1} = 1 - \frac{1.62\ \frac{m}{s^2}}{9.81\ \frac{m}{s^2}} = 0.8349 = \frac{83.49}{100} = 83.49\ \%.$$



Vježba 123

Duljina je matematičkog njihala na Zemlji 100 cm. Za koliko posto treba smanjiti duljinu njihala na Mjesecu da bi njegova perioda bila ista kao na Zemlji?
(Akceleracija slobodnog pada na Zemlji iznosi $g_1 = 9.81$ m/s^2, a na Mjesecu $g_2 = 1.62$ m/s^2)

Rezultat: 83.49 %.

Zadatak 124 (Ivan, gimnazija)

Uzduž užeta širi se val brzinom 2 m/s. Svaka točka užeta izvrši jedan titraj za 0.4 s. Kolika je frekvencija titranja vala?

$$A.\ 4\ Hz \qquad B.\ 2.5\ Hz \qquad C.\ 25\ Hz \qquad D.\ 0.25\ Hz$$

Rješenje 124

v = 2 m/s, T = 0.4 s, ν = ?

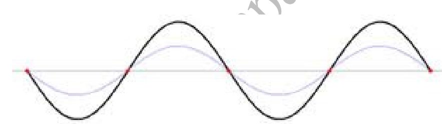
Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Frekvencija titranja iznosi:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.4\ s} = 2.5\ s^{-1} = 2.5\ Hz.$$

Odgovor je pod B.



Vježba 124

Uzduž užeta širi se val brzinom 2 m/s. Svaka točka užeta izvrši jedan titraj za 4 s. Kolika je frekvencija titranja vala?

$$A.\ 4\ Hz \qquad B.\ 2.5\ Hz \qquad C.\ 25\ Hz \qquad D.\ 0.25\ Hz$$

Rezultat: D.

Zadatak 125 (Ivan, gimnazija)

Dva jednaka zvučnika daju na istom mjestu u prostoru razinu zvuka od 95 dB. Kolika će biti razina zvuka na tom mjestu ako jedan od zvučnika prestane raditi?

Rješenje 125

v = 2 m/s, T = 0.4 s, ν = ?

Razina intenziteta zvuka (L) izražena u decibelima (dB) definira se izrazom

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0},$$

gdje intenzitet I_0 odgovara otprilike najslabijem zvuku kojeg još prosječno uho može čuti te iznosi

$$I_0 = 10^{-12}\ \frac{W}{m^2},$$

pri frekvenciji 1 kHz. Decibel je brojčana jedinica.
Budući da dva jednaka zvučnika daju na istom mjestu u prostoru razinu zvuka L_2, računamo intenzitet I_2 dva zvučnika.

$$L_2 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow L_2 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0} \; / \cdot \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{L_2}{10} = \log \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow \log \frac{I_2}{I_0} = \frac{L_2}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{antilogaritmiranje} \\ 10^{\log x} = x \end{array} \right] \Rightarrow 10^{\log \frac{I_2}{I_0}} = 10^{\frac{L_2}{10}} \Rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{L_2}{10}} \Rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{L_2}{10}} \; / \cdot I_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}}.$$

Ako istodobno rade dva jednaka zvučnika intenzitet poraste dva puta. Dakle, kada radi jedan zvučnik intenzitet će biti upola manji.

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}}.$$

Računamo razinu intenziteta jednog zvučnika.

$$L_1 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow L_1 = 10 \cdot \log \frac{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}}}{I_0} \Rightarrow L_1 = 10 \cdot \log \frac{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}}}{I_0} \Rightarrow L_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{\frac{L_2}{10}} \right) =$$

$$= 10 \cdot \log \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{\frac{95}{10}} \right) = 10 \cdot \log \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{9.5} \right) = 91.99 \; dB \approx 92 \; dB.$$

Vježba 125

Dva jednaka zvučnika daju na istom mjestu u prostoru razinu zvuka od 80 dB. Kolika će biti razina zvuka na tom mjestu ako jedan od zvučnika prestane raditi?

Rezultat: 77 dB.

Zadatak 126 (ABC, tehnička škola)

Tijelo mase m ovješeno je o dvije opruge jednakih konstanti elastičnosti k. Jednom je ovješeno tako da su opruge u "seriji", a drugi put tako da su opruge u "paraleli". Periode titranja tijela u ta dva slučaja zadovoljavaju izraz:

$A.\ T_s = T_p \qquad B.\ T_s = 2 \cdot T_p \qquad C.\ T_s = \frac{1}{2} \cdot T_p \qquad D.\ T_s = 4 \cdot T_p$

Rješenje 126

$k_1 = k_2 = k, \qquad T_s : T_p = ?$

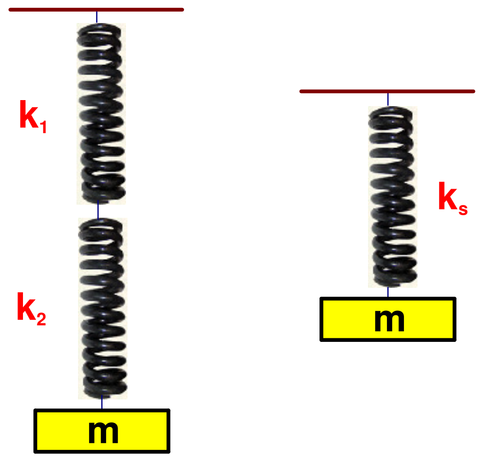
Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

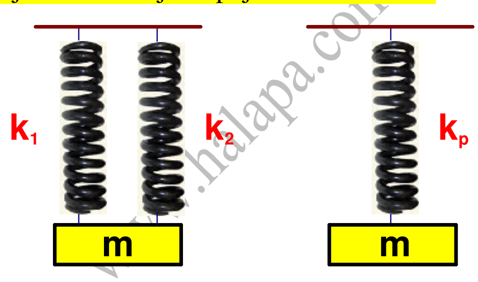
Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.



Ako dvije opruge koje imaju konstante elastičnosti k_1 i k_2 spojimo serijski, možemo ih zamijeniti jednom oprugom čija konstanta elastičnosti k_s iznosi:

$$\frac{1}{k_s}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}.$$

Serijski spojene opruge ponašaju se kao serijski spojeni kondenzatori.



Ako dvije opruge koje imaju konstante elastičnosti k_1 i k_2 spojimo paralelno, možemo ih zamijeniti jednom oprugom čija konstanta elastičnosti k_p iznosi:

$$k_p=k_1+k_2.$$

Paralelno spojene opruge ponašaju se kao paralelno spojeni kondenzatori.

Tijelo mase m ovješeno je o dvije opruge jednakih konstanti elastičnosti k tako da su opruge u seriji. Konstanta elastičnosti k_s tog sustava iznosi:

$$\frac{1}{k_s}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{k_s}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\ \Rightarrow\ \frac{1}{k_s}=\frac{2}{k}\ \Rightarrow\ k_s=\frac{k}{2}.$$

Tijelo mase m ovješeno je o dvije opruge jednakih konstanti elastičnosti k tako da su opruge u paraleli. Konstanta elastičnosti k_p tog sustava iznosi:

$$k_p=k_1+k_2\ \Rightarrow\ k_p=k+k\ \Rightarrow\ k_p=2\cdot k.$$

Računamo omjer perioda T_s i T_p.

$$\frac{T_s}{T_p}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k_s}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k_p}}}\ \Rightarrow\ \frac{T_s}{T_p}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k_s}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k_p}}}\ \Rightarrow\ \frac{T_s}{T_p}=\frac{\sqrt{\frac{m}{k_s}}}{\sqrt{\frac{m}{k_p}}}\ \Rightarrow\ \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{m}{k_s}}{\frac{m}{k_p}}}\ \Rightarrow\ \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{m}{k_s}}{\frac{m}{k_p}}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{1}{k_s}}{\frac{1}{k_p}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{k_p}{k_s}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{2\cdot k}{\frac{k}{2}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{2\cdot k}{1}}{\frac{k}{2}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{2\cdot k}{1}}{\frac{k}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=\sqrt{4} \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=2 \Rightarrow \frac{T_s}{T_p}=2 \; / \cdot T_p \Rightarrow T_s=2\cdot T_p .$$

Odgovor je pod B.

Vježba 126

Tijelo mase m ovješeno je o tri opruge jednakih konstanti elastičnosti k. Jednom je ovješeno tako da su opruge u "seriji", a drugi put tako da su opruge u "paraleli". Periode titranja tijela u ta dva slučaja zadovoljavaju izraz:

$$A.\ T_s=T_p \qquad B.\ T_s=3\cdot T_p \qquad C.\ T_s=\frac{1}{3}\cdot T_p \qquad D.\ T_s=6\cdot T_p$$

Rezultat: B.

Zadatak 127 (Josip, srednja škola)

Tijelo na opruzi titra frekvencijom 2 Hz. Povećanje mase tijela za 20 g povećat će periodu titranja za 0.2 s. Odredite konstantu elastičnosti opruge.

Rješenje 127

$\nu_1 = 2$ Hz, $m_1 = m$, $\Delta m = 20$ g $= 0.02$ kg, $m_2 = m + \Delta m$, $\Delta T = 0.2$ s, $k = ?$

Frekvencija ν je broj titraja (ophoda) u jedinici vremena. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T\cdot\nu=1 \Rightarrow T=\frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu=\frac{1}{T}.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F=-k\cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.
Računamo periode titranja tijela prije i nakon povećanja njegove mase.

$$\left.\begin{array}{l} T_1=\frac{1}{\nu_1} \\ T_2=T_1+\Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1=\frac{1}{2\ s^{-1}} \\ T_2=T_1+\Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1=0.5\ s \\ T_2=T_1+\Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1=0.5\ s \\ T_2=0.5\ s+0.2\ s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1=0.5\ s \\ T_2=0.7\ s \end{array}\right\}.$$

Iz sustava jednadžbi izračuna se konstanta elastičnosti k.

$$\left.\begin{matrix} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbe}\end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \;/^2 \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}} \;/^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{m}{k} \\ T_2^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{m+\Delta m}{k} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{oduzmemo prvu jednadžbu} \\ \text{od druge jednadžbe}\end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{m+\Delta m}{k} - 4\cdot\pi^2\cdot\frac{m}{k} \Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\left(\frac{m+\Delta m}{k} - \frac{m}{k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{m+\Delta m - m}{k} \Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{\cancel{m}+\Delta m-\cancel{m}}{k} \Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{\Delta m}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{\Delta m}{k} \;/\cdot\frac{k}{T_2^2 - T_1^2} \Rightarrow k = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{\Delta m}{T_2^2 - T_1^2} = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{0.02\ kg}{(0.7\ s)^2 - (0.5\ s)^2} =$$

$$= 3.29\ \frac{kg}{s^2} = 3.29\ \frac{kg\cdot m}{s^2}\cdot\frac{1}{m} = 3.29\ \frac{N}{m}.$$

Vježba 127

Tijelo na opruzi titra frekvencijom 2 Hz. Povećanje mase tijela za 2 dag povećat će periodu titranja za 0.2 s. Odredite konstantu elastičnosti opruge.

Rezultat: 3.29 N/m.

Zadatak 128 (Josip, srednja škola)

Tijelo na opruzi titra frekvencijom 2 Hz. Povećanje mase tijela za 20 g povećat će periodu titranja za 0.2 s. Odredite masu tijela.

Rješenje 128

$\nu_1 = 2$ Hz, $m_1 = m$, $\Delta m = 20$ g $= 0.02$ kg, $m_2 = m + \Delta m$, $\Delta T = 0.2$ s, $m = ?$

Frekvencija ν je broj titraja (ophoda) u jedinici vremena. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T\cdot\nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k\cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.
Računamo periode titranja tijela prije i nakon povećanja njegove mase.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{\nu_1} \\ T_2 = T_1 + \Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{2\ s^{-1}} \\ T_2 = T_1 + \Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 0.5\ s \\ T_2 = T_1 + \Delta T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 0.5\ s \\ T_2 = 0.5\ s + 0.2\ s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 0.5\ s \\ T_2 = 0.7\ s \end{array}\right\}.$$

Iz sustava jednadžbi izračuna se masa m.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \ /^2 \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}} \ /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k} \\ T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m + \Delta m}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo drugu jednadžbu} \\ \text{s prvom jednadžbom} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m + \Delta m}{k}}{4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{\cancel{4 \cdot \pi^2} \cdot \frac{m + \Delta m}{\cancel{k}}}{\cancel{4 \cdot \pi^2} \cdot \frac{m}{\cancel{k}}} \Rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{m + \Delta m}{m} \Rightarrow m \cdot T_2^2 = (m + \Delta m) \cdot T_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot T_2^2 = m \cdot T_1^2 + \Delta m \cdot T_1^2 \Rightarrow m \cdot T_2^2 - m \cdot T_1^2 = \Delta m \cdot T_1^2 \Rightarrow m \cdot \left(T_2^2 - T_1^2\right) = \Delta m \cdot T_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \left(T_2^2 - T_1^2\right) = \Delta m \cdot T_1^2 \ / \cdot \frac{1}{T_2^2 - T_1^2} \Rightarrow m = \frac{\Delta m \cdot T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{0.02\ kg \cdot (0.5\ s)^2}{(0.7\ s)^2 - (0.5\ s)^2} = 0.021\ kg = 21\ g.$$

Vježba 128

Tijelo na opruzi titra frekvencijom 2 Hz. Povećanje mase tijela za 2 dag povećat će periodu titranja za 0.2 s. Odredite masu tijela.

Rezultat: 21 g.

Zadatak 129 (Ivan, srednja škola)

Uteg mase 200 g titra amplitudom A = 10 cm i periodom T = 0.5 s. Odredi:

a) konstantu opruge
b) maksimalnu brzinu
c) kinetičku energiju utega.

Rješenje 129

m = 200 g = 0.2 kg, A = 10 cm = 0.1 m, T = 0.5 s, k = ?, v_0 = ?, E_{kmaks} = ?

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.
Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda).
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije. Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja

ravnoteže tijela koje harmonički titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda A.
Kada tijelo prolijeće kroz ravnotežni položaj ima:

- najveću brzinu

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A$$

- najveću kinetičku energiju

$$E_{kmaks} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 .$$

a)
Konstanta opruge iznosi:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \; /^2 \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k} \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k} \; / \cdot \frac{k}{T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.2 \; kg}{(0.5 \; s)^2} = 31.58 \; \frac{kg}{s^2} = 31.58 \; \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{1}{m} = 31.58 \; N \cdot \frac{1}{m} = 31.58 \; \frac{N}{m}.$$

b)
Maksimalna brzina ima vrijednost:

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A = \frac{2 \cdot \pi}{0.5 \; s} \cdot 0.1 \; m = 1.26 \; \frac{m}{s}.$$

c)
Kinetička energija utega je:

$$\left.\begin{array}{l} E_{kmaks} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \\ v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow E_{kmaks} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.2 \; kg \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{0.5 \; s} \cdot 0.1 \; m\right)^2 = 0.16 \; J.$$

Vježba 129

Uteg mase 400 g titra amplitudom A = 10 cm i periodom T = 0.5 s. Odredi kinetičku energiju utega.

Rezultat: 0.32 J.

Zadatak 130 (Tin, srednja škola)

Jednadžba koja opisuje harmonijsko titranje neke točke glasi $x = 6 \; cm \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \; s^{-1} \cdot t + \pi\right)$.

Nađi maksimalnu brzinu točke.

Rješenje 130

$x = 6 \; cm \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \; s^{-1} \cdot t + \pi\right)$, $v_0 = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.
Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji.
Ako tijelo ne počne titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right),$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T vrijeme jednog titraja (perioda), t vrijeme, φ početni fazni kut. Maksimalna brzina tijela koje harmonijski titra dana je izrazom

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A.$$

Maksimalna brzina iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) \\ x = 6\ cm \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\ s^{-1} \cdot t + \varphi\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) \\ x = 6\ cm \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\ s^{-1} \cdot t + \varphi\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 6\ cm \\ \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{\pi}{3}\ s^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A\right] \Rightarrow v_0 = \frac{\pi}{3}\ s^{-1} \cdot 6\ cm \Rightarrow v_0 = 6.28\ \frac{cm}{s}.$$

Vježba 130

Jednadžba koja opisuje harmonijsko titranje neke točke glasi $x = 12\ cm \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\ s^{-1} \cdot t + \pi\right)$. Nađi maksimalnu brzinu točke.

Rezultat: 12.57 cm/s.

Zadatak 131 (Ana, srednja škola)

Amplituda harmonijskog titranja je 1 cm, a perioda titranja 1 s. Najveća brzina tijela koje titra iznosi:

$$A.\ 6.28\ \frac{m}{s} \qquad B.\ 6.28\ \frac{cm}{s} \qquad C.\ 628\ \frac{m}{s} \qquad D.\ 62.8\ \frac{cm}{s}$$

Rješenje 131

A = 1 cm, T = 1 s, v_0 = ?

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.
Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna brzina tijela koje harmonijski titra dana je izrazom

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A,$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T vrijeme jednog titraja (perioda).
Maksimalna brzina iznosi:

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A = \frac{2 \cdot \pi}{1\ s} \cdot 1\ cm = 6.28\ \frac{cm}{s}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 131

Amplituda harmonijskog titranja je 1 m, a perioda titranja 1 s. Najveća brzina tijela koje titra iznosi:

$$A.\ 6.28\ \frac{m}{s} \qquad B.\ 6.28\ \frac{cm}{s} \qquad C.\ 628\ \frac{m}{s} \qquad D.\ 62.8\ \frac{cm}{s}$$

Rezultat: A.

Zadatak 132 (Ana, srednja škola)

Amplituda harmonijskog titranja je 1 cm, a perioda titranja 1 s. Najveća akceleracija tijela koje titra iznosi:

$$A.\ 6.28\ \frac{m}{s^2} \qquad B.\ 6.28\ \frac{cm}{s^2} \qquad C.\ 39.4\ \frac{cm}{s^2} \qquad D.\ 3.94\ \frac{cm}{s^2}$$

Rješenje 132

A = 1 cm, T = 1 s, a_0 = ?

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.

Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Maksimalna akceleracija tijela koje harmonijski titra dana je izrazom

$$a_0 = \left(\frac{2\cdot\pi}{T}\right)^2 \cdot A,$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T vrijeme jednog titraja (perioda).

Maksimalna akceleracija iznosi:

$$a_0 = \left(\frac{2\cdot\pi}{T}\right)^2 \cdot A = \left(\frac{2\cdot\pi}{1\ s}\right)^2 \cdot 1\ cm = 39.4\ \frac{cm}{s^2}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 132

Amplituda harmonijskog titranja je 1 m, a perioda titranja 1 s. Najveća akceleracija tijela koje titra iznosi:

$$A.\ 6.28\ \frac{m}{s^2} \qquad B.\ 6.28\ \frac{cm}{s^2} \qquad C.\ 39.4\ \frac{m}{s^2} \qquad D.\ 3.94\ \frac{cm}{s^2}$$

Rezultat: C.

Zadatak 133 (Ana, srednja škola)

Tijelo mase m titra na opruzi. Kada se masa tijela poveća dva puta, što se događa s periodom titranja sustava?

A. Perioda se poveća dva puta.
B. Perioda se poveća za manje od dva puta.
C. Perioda se smanji dva puta.
D. Perioda se smanji za manje od dva puta.

Rješenje 133

m_1 = m, m_2 = 2 · m, $T_2 : T_1$ = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda).

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.

Računamo omjer perioda kada je na opruzi tijelo mase m_2, a zatim tijelo mase m_1.

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\frac{\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\frac{m_2}{k}}{\frac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{2\cdot m}{m}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{2\cdot m}{m}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{2}\ /\cdot T_1 \Rightarrow T_2=\sqrt{2}\cdot T_1 \Rightarrow T_2=1.41\cdot T_1.$$

Perioda se poveća za manje od dva puta.
Odgovor je pod B.

Vježba 133

Tijelo mase m titra na opruzi. Kada se masa tijela poveća četiri puta, što se događa s periodom titranja sustava?

A. Perioda se poveća dva puta.
B. Perioda se poveća za manje od dva puta.
C. Perioda se smanji dva puta.
D. Perioda se smanji za manje od dva puta.

Rezultat: A.

Zadatak 134 (Edy, srednja škola)

Točkasti izvor vala titra frekvencijom 50 Hz. Val se širi brzinom od 300 m/s. Kolika je razlika u fazi između točaka koje su 2 m i 8 m udaljene od izvora?

A. 0 *rad* *B.* π *rad* *C.* 6 *rad* *D.* 2π *rad*

Rješenje 134

$\nu = 50$ Hz, v = 300 m/s, $x_1 = 2$ m, $x_2 = 8$ m, $\Delta\varphi = ?$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$\lambda = \mathrm{v}\cdot T \quad , \quad \lambda=\frac{\mathrm{v}}{\nu},$$

gdje je λ valna duljina, T perioda titraja, ν frekvencija, a v brzina širenja vala.
Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti x_1 i x_2 od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{x_2-x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{\Delta x}{\lambda}.$$

Razlika u fazi između točaka koje su za x_1 i x_2 udaljene od izvora iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=\frac{\mathrm{v}}{\nu}\\ \Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{x_2-x_1}{\lambda}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{x_2-x_1}{\frac{\mathrm{v}}{\nu}} \Rightarrow \Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{\frac{x_2-x_1}{1}}{\frac{\mathrm{v}}{\nu}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{(x_2-x_1)\cdot\nu}{\mathrm{v}} \Rightarrow \Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{(8\ m-2\ m)\cdot 50\ \frac{1}{s}}{300\ \frac{m}{s}} \Rightarrow \Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{6\ m\cdot 50\ \frac{1}{s}}{300\ \frac{m}{s}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{300\ \frac{m}{s}}{300\ \frac{m}{s}} \Rightarrow \Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot\frac{300\ \frac{m}{s}}{300\ \frac{m}{s}} \Rightarrow \Delta\varphi=2\cdot\pi\ rad.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 134

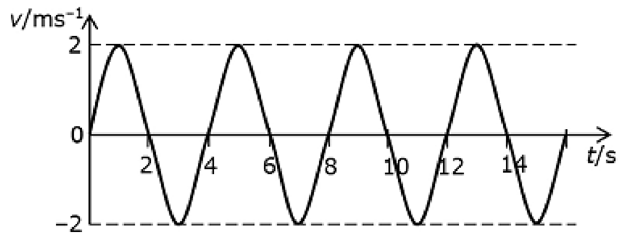
Točkasti izvor vala titra frekvencijom 50 Hz. Val se širi brzinom od 300 m/s. Kolika je razlika u fazi između točaka koje su 3 m i 9 m udaljene od izvora?

$$A.\ 0\ rad \qquad B.\ \pi\ rad \qquad C.\ 6\ rad \qquad D.\ 2\pi\ rad$$

Rezultat: D.

Zadatak 135 (Iva, srednja škola)

Graf prikazuje brzinu u ovisnosti o vremenu titranja jednostavnog njihala. Kolika je amplituda titranja njihala?

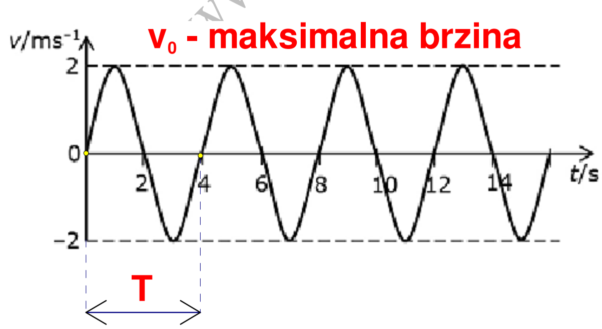


Rješenje 135

v_0 = 2 m/s, T = 4 s, A = ?

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku, kažemo da harmonijski titra.
Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Pomak ili elongacija je udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra. Maksimalna elongacije zove se amplituda A.
Kada tijelo prolijeće kroz ravnotežni položaj ima najveću brzinu

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A.$$



Sa slike očitamo maksimalnu brzinu v_0 i periodu T.

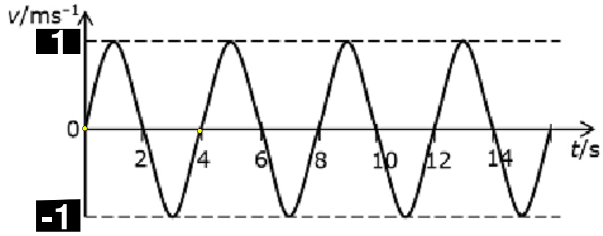
$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 2\ \frac{m}{s} \\ T = 4\ s \end{array}\right\}.$$

Amplituda titranja iznosi:

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A \Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A \ / \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow A = v_0 \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi} = 2\ \frac{m}{s} \cdot \frac{4\ s}{2 \cdot \pi} = 1.27\ m.$$

Vježba 135

Graf prikazuje brzinu u ovisnosti o vremenu titranja jednostavnog njihala. Kolika je amplituda titranja njihala?



Rezultat: 0.64 m.

Zadatak 136 (Ana, srednja škola)

Kada na oprugu objesimo uteg mase 3 kg, njezina je duljina 83.9 cm, a za uteg mase 9 kg duljina je 142.7 cm. Kolika je konstanta opruge? ($g = 9.81$ m/s^2)

Rješenje 136

$m_1 = 3$ kg, $l_1 = 83.9$ cm $= 0.839$ m, $m_2 = 9$ kg, $l_2 = 142.7$ cm $= 1.427$ m, $g = 9.81$ m/s^2, $k = ?$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra, k je konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu). Predznak minus – možemo izostaviti u numeričkim zadatcima.

Neka je l_0 duljina neopterećene opruge (opruge bez utega).

Kada na opruzi visi uteg mase m_1 ona ima duljinu l_1 pa elastična sila opruge iznosi:

$$F_1 = k \cdot \Delta l_1 \Rightarrow F_1 = k \cdot (l_1 - l_0).$$

Kada na opruzi visi uteg mase m_2 ona ima duljinu l_2 pa elastična sila opruge iznosi:

$$F_2 = k \cdot \Delta l_2 \Rightarrow F_2 = k \cdot (l_2 - l_0).$$

Budući da uteg visi na opruzi, sila teža jednaka je elastičnoj sili opruge.

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = G_1 \\ F_2 = G_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k \cdot (l_1 - l_0) = m_1 \cdot g \\ k \cdot (l_2 - l_0) = m_2 \cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow k \cdot (l_2 - l_0) - k \cdot (l_1 - l_0) = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot l_2 - k \cdot l_0 - k \cdot l_1 + k \cdot l_0 = (m_2 - m_1) \cdot g \Rightarrow k \cdot l_2 - k \cdot l_0 - k \cdot l_1 + k \cdot l_0 = (m_2 - m_1) \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot l_2 - k \cdot l_1 = (m_2 - m_1) \cdot g \Rightarrow k \cdot (l_2 - l_1) = (m_2 - m_1) \cdot g \Rightarrow k \cdot (l_2 - l_1) = (m_2 - m_1) \cdot g \; / \cdot \frac{1}{l_2 - l_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{(m_2 - m_1) \cdot g}{l_2 - l_1} = \frac{(9 \ kg - 3 \ kg) \cdot 9.81 \ \frac{m}{s^2}}{1.427 \ m - 0.839 \ m} = 100 \ \frac{N}{m}.$$

Vježba 136

Kada na oprugu objesimo uteg mase 2 kg, njezina je duljina 83.9 cm, a za uteg mase 8 kg duljina je 142.7 cm. Kolika je konstanta opruge? (g = 9.81 m/s^2)

Rezultat: 100 N/m.

Zadatak 137 (Maja, srednja škola)

Tijelo mase 1 kg harmonijski titra. Brzina titranja tijela mijenja se u vremenu po formuli $v = 9 \ \frac{m}{s} \cdot \cos\left(\pi \cdot s^{-1} \cdot t\right)$. Kolika je ukupna energija titranja tijela?

Rješenje 137

m = 1 kg, E_u = ?

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje.
Harmonijsko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = -k \cdot x$ ili neke druge sile razmjerne (proporcionalne) elongaciji. Brzina tijela koje harmonijski titra mijenja se s vremenom

$$v = v_0 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

gdje je v_0 maksimalna brzina, T vrijeme jednog titraja ili perioda.
Kinetička energija je najveća kada tijelo prolijeće kroz ravnotežni položaj. Tada ima maksimalnu kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

i elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot 0 = 0.$$

Najprije odredimo maksimalna brzina v_0:

$$\left.\begin{array}{l} v = 9 \ \frac{m}{s} \cdot \cos\left(\pi \cdot s^{-1} \cdot t\right) \\ v = v_0 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = 9 \ \frac{m}{s} \cdot \cos\left(\pi \cdot s^{-1} \cdot t\right) \\ v = v_0 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow v_0 = 9 \ \frac{m}{s}.$$

Tada je ukupna energija titranja tijela jednaka maksimalnoj kinetičkoj energiji.

$$E_u = E_k \quad \Rightarrow \quad E_u = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \ kg \cdot \left(9 \ \frac{m}{s}\right)^2 = 40.5 \ J.$$

Vježba 137

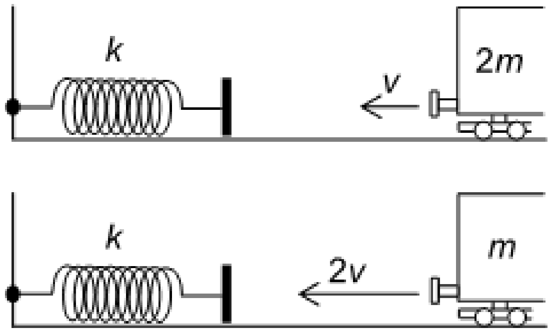
Tijelo mase 1 kg harmonijski titra. Brzina titranja tijela mijenja se u vremenu po formuli $v = 10 \ \frac{m}{s} \cdot \cos\left(\pi \cdot s^{-1} \cdot t\right)$. Kolika je ukupna energija titranja tijela?

Rezultat: 50 J.

Zadatak 138 (Max, gimnazija)

Slika prikazuje dva vagona koji se gibaju prema oprugama jednakih konstanti elastičnosti k. Pri sudaru s oprugom vagon mase $2 \cdot m$ sabije oprugu za x_1, a vagon mase m sabije oprugu za x_2. Koji odnos vrijedi za x_1 i x_2?

$A.\ x_2 = \frac{x_1}{2}$ $\quad B.\ x_2 = x_1$ $\quad C.\ x_2 = \sqrt{2} \cdot x_1$ $\quad D.\ x_2 = 2 \cdot x_1$



Rješenje 138

k, $\quad v_1 = v$, $\quad m_1 = 2 \cdot m$, $\quad v_2 = 2 \cdot v$, $\quad m_2 = m$, $\quad \frac{x_2}{x_1} = ?$

Elastična opruga produžena za s ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2,$$

gdje je k konstanta elastičnosti opruge.
Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona očuvanja energije pri sudaru vagona s oprugom kinetička energija vagona transformira se u elastičnu potencijalnu energiju opruge. Za prvu i drugu oprugu vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} E_{ep1} = E_{k1} \\ E_{ep2} = E_{k2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 \\ \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot v^2 \\ \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot v)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot v^2 \\ \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 4 \cdot v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot 4 \cdot v^2}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot 4 \cdot v^2}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot v^2} \Rightarrow \Rightarrow \frac{x_2^2}{x_1^2} = 2 \Rightarrow \frac{x_2^2}{x_1^2} = 2 \ / \cdot x_1^2 \Rightarrow x_2^2 = 2 \cdot x_1^2 \Rightarrow$$

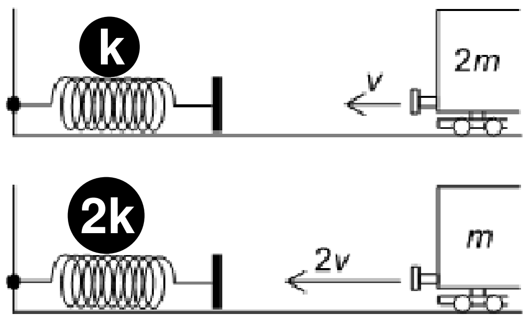
$$\Rightarrow x_2^2 = 2 \cdot x_1^2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow x_2 = \sqrt{2 \cdot x_1^2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{2} \cdot x_1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 138

Slika prikazuje dva vagona koji se gibaju prema oprugama konstanti elastičnosti k i $2 \cdot k$. Pri sudaru s oprugom vagon mase $2 \cdot m$ sabije oprugu za x_1, a vagon mase m sabije oprugu za x_2. Koji odnos vrijedi za x_1 i x_2?

$$A.\ x_2 = \frac{x_1}{2} \qquad B.\ x_2 = x_1 \qquad C.\ x_2 = \sqrt{2} \cdot x_1 \qquad D.\ x_2 = 2 \cdot x_1$$



Rezultat: B.

Zadatak 139 (Ivana, strukovna škola)

Što je potrebno izmjeriti da bi se pomoću jednostavnoga matematičkoga njihala odredila akceleracija sile teže?

A. periodu titranja i masu obješenoga utega
B. periodu titranja i duljinu niti njihala
C. masu obješenoga utega i duljinu niti njihala
D. periodu i amplitudu titranja

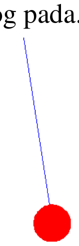
Rješenje 139

T, l, g

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.



1.inačica

U formuli za periodu matematičkog njihala pojavljuju se tri fizikalne veličine: perioda (T), duljina niti (l) i ubrzanje sile teže (g).

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Da bismo izračunali jednu fizikalnu veličinu ostale dvije moraju biti zadane. Dakle, da bismo odredili akceleraciju sile teže moramo izmjeriti periodu titranja i duljinu niti njihala.

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} \; /^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{l}{g} \Rightarrow g \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot l \Rightarrow g \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot l \; / \cdot \frac{1}{T^2} \Rightarrow g = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{T^2}.$$

Možemo pisati

$$g = f\left(l, T\right)$$

čime ističemo ovisnost akceleracije sile teže o veličinama: periodi titranja (T) i duljini niti njihala (l).

Odgovor je pod B.

Vježba 139

Koje je fizikalne veličine potrebno znati da bi se odredila perioda jednostavnoga matematičkoga njihala?

A. akceleraciju sile teže i masu obješenoga utega
B. akceleraciju sile teže i duljinu niti njihala
C. masu obješenoga utega i duljinu niti njihala
D. masu obješenoga utega i amplitudu titranja

Rezultat: B.

Zadatak 140 (Ante, strukovna škola)

Žica dugačka 9 m učvršćena je na krajevima. Žica se zatitra tako da se njom širi transverzalni val te se na njoj formira stojni val s četirima čvorovima (računajući i krajeve). Koliko iznosi valna duljina vala kojim je žica zatitrana?

$A.\ 3\ m \qquad B.\ 4.5\ m \qquad C.\ 6\ m \qquad D.\ 9\ m$

Rješenje 140

Valovito je gibanje periodičko prenošenje energije titranja od jednog mjesta na drugo. Transverzalni val je val kod kojeg čestice elastičnog sredstva titraju okomito na smjer širenja vala. Interferencija nastaje slaganjem dvaju ili više valova jednake frekvencije i konstantne razlike u fazi (tzv. koherentni valovi). Elongacije titraja među sobom se vektorski zbrajaju pa valovi mogu jačati ili slabiti. Stojni val je osobit slučaj interferencije dvaju valova koji se u istom sredstvu šire suprotnim smjerovima, a jednakih su duljina, amplituda i podudaraju se u fazama. Postiže se tako da se jedan val odbije od čvrste točke te se nakon odbijanja vraća natrag sa stalnim faznim pomakom π (180°), tj. razlikom hoda $\frac{\lambda}{2}$. Čvorovi stojnog vala su točke koje neprestano miruju. Trbusi stojnog vala su točke koje titraju najvećim amplitudama. Razmak između dvaju susjednih čvorova ili trbuha je $\frac{\lambda}{2}$.

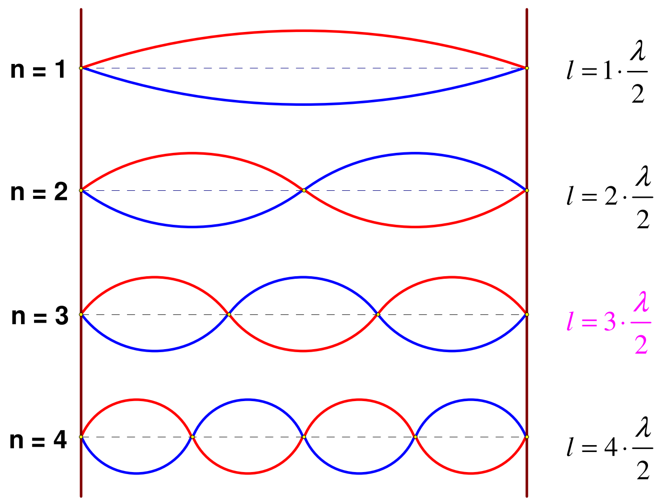
Zatitramo li napetu žicu duljine l učvršćenu na oba kraja (to su čvorovi vala), nastalo valno gibanje širi se žicom, dolazi do njezinog kraja i reflektira se u suprotnom smjeru pomaknuto u fazi za π (180°) ili $\frac{\lambda}{2}$. Stojni se valovi na napetoj žici pojavljuju s više frekvencija titranja.

- Osnovna frekvencija daje stojni val čiji su čvorovi na krajevima, a trbuh u sredini žice. Valna duljina jednaka je dvostrukoj duljini žice.

- Ako žica zatitra frekvencijom dvostruko većom od osnovne frekvencije, dobiju se čvorovi na krajevima i sredini žice, a trbusi su na $\frac{1}{4} \cdot l$ i $\frac{3}{4} \cdot l$ od početka žice.

Na žici će se pobuditi samo stojni valovi za koje je duljina žice jednaka cijelom broju polovica valne duljine.

$$l = n \cdot \frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2 \cdot l}{n} \ , \ n = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots$$



Budući da se na žici formirao stojni val sa četiri čvora (računajući i krajeve), duljina žice jednaka je trostrukoj polovici valne duljine.

$$l = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Tada je:

$$l = 3 \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow l = 3 \cdot \frac{\lambda}{2} \ / \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \cdot l = \frac{2}{3} \cdot 9 \ m = 6 \ m.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 140

Žica dugačka 12 m učvršćena je na krajevima. Žica se zatitra tako da se njom širi transverzalni val te se na njoj formira stojni val s četirima čvorovima (računajući i krajeve). Koliko iznosi valna duljina vala kojim je žica zatitrana?

$A. \ 4 \ m \qquad B. \ 12 \ m \qquad C. \ 6 \ m \qquad D. \ 8 \ m$

Rezultat: D.