Zadatak 081 (Sanja, gimnazija)

Jednadžba titranja materijalne točke mase 10 g ima oblik $x = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\ cm.$

Nađi maksimalnu silu koja djeluje na točku i ukupnu energiju točke.

Rješenje 081

m = 10 g = 0.01 kg, $x = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\ cm,$ F_{max} = ?, E = ?

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra.

Harmoničko titranje opisuje se trigonometrijskim funkcijama sinus i kosinus.

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right),$$

gdje je

- x – elongacija ili pomak tijela iz ravnotežnog položaja
- A – amplituda ili maksimalna elongacija
- ω – kružna frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- k – konstanta opruge
- m – masa tijela što titra na opruzi
- t – vrijeme titranja
- φ_0 – početna faza.

Maksimalna sila je u slučaju kada je tijelo maksimalno udaljeno od položaja ravnoteže, tj. kada je elongacija maksimalna (kada tijelo ima amplitudu A).

$$F_{max} = -k \cdot A.$$

Elastična opruga produžena za x ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je k konstanta opruge. Energija će biti maksimalna kada tijelo ima maksimalnu elongaciju (kada ima amplitudu A).

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2.$$

Prvo iz zadane jednadžbe odredimo fizikalne veličine i njihove vrijednosti:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) \\ x = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} A = 5\ cm = 0.05\ m & \text{amplituda titranja} \\ \omega = \frac{\pi}{5}\ \frac{1}{s} & \text{kružna frekvencija} \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{4} & \text{početna faza} \end{array}\right\}.$$

Konstanta opruge k dobije se iz formule za kružnu frekvenciju

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ /^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}\ / \cdot m \Rightarrow k = m \cdot \omega^2.$$

- Maksimalna sila točke iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} k = m \cdot \omega^{2} \\ F_{\max} = k \cdot A \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow F_{\max} = m \cdot \omega^{2} \cdot A = 0.01\ kg \cdot \left(\frac{\pi}{5}\ \frac{1}{s}\right)^{2} \cdot 0.05\ m = 1.974 \cdot 10^{-4}\ \text{N}.$$

- Ukupna energija točke iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} k = m \cdot \omega^{2} \\ E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^{2} \cdot A^{2} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\omega \cdot A)^{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.01\ kg \cdot \left(\frac{\pi}{5}\ \frac{1}{s} \cdot 0.05\ m\right)^{2} = 4.935 \cdot 10^{-6}\ \text{J}.$$

Vježba 081

Jednadžba titranja materijalne točke mase 20 g ima oblik $x = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\ cm.$

Nađi maksimalnu silu koja djeluje na točku.

Rezultat: $3.948 \cdot 10^{-4}$ N.

Zadatak 082 (Tony, gimnazija)

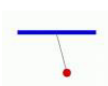
Njihalo preneseno sa Zemlje na Mjesec harmonijski titra periodom koja je 2.45 puta duža od periode harmonijskoga titranja toga njihala na Zemlji. Koliko iznosi ubrzanje slobodnoga pada na Mjesecu, ako je ubrzanje slobodnoga pada na Zemlji g?

$$A.\ \frac{g}{6} \qquad B.\ \frac{g}{2.45} \qquad C.\ 2.45 \cdot g \qquad D.\ 6 \cdot g$$

Rješenje 082

$T_M = 2.45 \cdot T_Z$, $g_Z = g$, $g_M = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest



$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

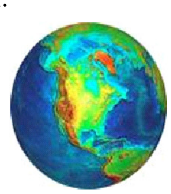
gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$T_M = 2.45 \cdot T_Z \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_M}} = 2.45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_Z}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_M}} = 2.45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_Z}}\ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g_M}} = 2.45 \cdot \sqrt{\frac{l}{g_Z}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g_M}} = 2.45 \cdot \sqrt{\frac{l}{g_Z}}\ /^{2} \Rightarrow \frac{l}{g_M} = 6.0025 \cdot \frac{l}{g_Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l}{g_M} = 6 \cdot \frac{l}{g} \Rightarrow \frac{l}{g_M} = 6 \cdot \frac{l}{g}\ / \cdot \frac{1}{l} \Rightarrow \frac{1}{g_M} = \frac{6}{g} \Rightarrow g_M = \frac{g}{6}.$$

Odgovor je pod A.



T_Z $\qquad$ $T_M = 2.45 \cdot T_Z$ $\qquad$ T_M

Vježba 082

Njihalo preneseno sa Zemlje na planet harmonijski titra periodom koja je 2 puta duža od periode harmonijskoga titranja toga njihala na Zemlji. Koliko iznosi ubrzanje slobodnoga pada na planetu, ako je ubrzanje slobodnoga pada na Zemlji g?

$$A.\ \frac{g}{6} \qquad B.\ \frac{g}{4} \qquad C.\ 4\cdot g \qquad D.\ 6\cdot g$$

Rezultat: Odgovor je pod B.

Zadatak 083 (Tiho, gimnazija)

Uteg mase m ovješen o oprugu konstante k titra periodom T. Kojom će periodom titrati uteg mase 4 · m ovješen o istu oprugu?

$$A.\ 2\cdot T \qquad B.\ 4\cdot T \qquad C.\ 8\cdot T \qquad D.\ 16\cdot T$$

Rješenje 083

$m_1 = m, \quad T_1 = T, \quad m_2 = 4 \cdot m, \quad T_2 = ?$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile $F = - k \cdot s$ ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m_2}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{4\cdot m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot 2\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ T_2 = 2\cdot 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\left(2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow T_2 = 2\cdot T_1 \Rightarrow T_2 = 2\cdot T.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m_2}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{4\cdot m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{4\cdot m}{k}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{4\cdot m}{k}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{4\cdot m}{k}}}{\sqrt{\dfrac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}}}{\sqrt{\dfrac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}}}{\sqrt{\dfrac{m}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 2 \Rightarrow T_2 = 2\cdot T_1 \Rightarrow T_2 = 2\cdot T.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 083

Uteg mase m ovješen o oprugu konstante k titra periodom T. Kojom će periodom titrati uteg mase 9 · m ovješen o istu oprugu?

$$A.\ 9 \cdot T \qquad B.\ 6 \cdot T \qquad C.\ 3 \cdot T \qquad D.\ 18 \cdot T$$

Rezultat: Odgovor je pod C.

Zadatak 084 (Slavica, gimnazija)

Omjer duljina niti dvaju matematičkih njihala jest 1 : 4. U kojem su omjeru njihova titrajna vremena?

Rješenje 084

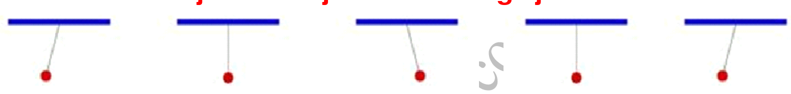
$l_1 : l_2 = 1 : 4, \quad T_1 : T_2 = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

jedan titraj matematičkog njihala



1.inačica

Iz omjera duljina niti dvaju matematičkih njihala slijedi:

$$l_1 : l_2 = 1 : 4 \Rightarrow 4 \cdot l_1 = l_2 \Rightarrow l_2 = 4 \cdot l_1.$$

Duljina niti drugog njihala je četiri puta veća od duljine niti prvog njihala.
Iz sustava jednadžbi dobije se omjer njihovih titrajnih vremena.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{l_2}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\dfrac{l_1}{g}}}{\sqrt{\dfrac{l_2}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\dfrac{l_1}{g}}{\dfrac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\dfrac{l_1}{g}}{\dfrac{l_2}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{4 \cdot l_1}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{4 \cdot l_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_1 : T_2 = 1 : 2 \Rightarrow T_2 = 2 \cdot T_1.$$

2.inačica

Iz formule

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

može se zaključiti da je perioda T razmjerna s kvadratnim korijenom (drugim korijenom) duljine l niti njihala

$$T \sim \sqrt{l}.$$

Ako se duljina niti poveća 4 puta, perioda se poveća 2 puta.
Ako se duljina niti poveća 9 puta, perioda se poveća 3 puta.
Ako se duljina niti smanji 4 puta, perioda se smanji 2 puta.
Ako se duljina niti smanji 9 puta, perioda se smanji 3 puta. Itd.

Iz omjera duljina niti dvaju matematičkih njihala dobije se:

$$l_1 : l_2 = 1 : 4 \Rightarrow 4 \cdot l_1 = l_2 \Rightarrow l_2 = 4 \cdot l_1.$$

Duljina niti drugog njihala je četiri puta veća od duljine niti prvog njihala. Perioda drugog njihala je dva puta veća od periode prvog njihala.

Vježba 084

Omjer duljina niti dvaju matematičkih njihala jest 1 : 9. U kojem su omjeru njihova titrajna vremena?

Rezultat: 1 : 3.

Zadatak 085 (Slavica, gimnazija)

Dva njihala počinju se istodobno njihati. Za prvih 20 titraja prvog njihala drugo njihalo učini 15 titraja. Koliki je omjer duljina tih njihala?

Rješenje 085

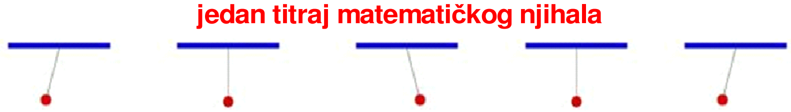
$n_1 = 20, \quad n_2 = 15, \quad l_1 : l_2 = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

jedan titraj matematičkog njihala



Frekvencija ν je broj titraja (ophoda) u jedinici vremena. Perioda T je vrijeme jednog titraja (ophoda). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Budući da se frekvencija ν može izraziti na dva načina:

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{n}{t} \;, \; n \text{ je broj titraja} \;, \; t \text{ je vrijeme za koje je učinjeno } n \text{ titraja} \\ \nu = \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

slijedi

$$\frac{n}{t} = \frac{1}{T} \Rightarrow t = n \cdot T.$$

Njihala su se počela njihati istodobno pa vrijedi:

$$t_1 = t_2 \Rightarrow n_1 \cdot T_1 = n_2 \cdot T_2 \Rightarrow 20 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 15 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \; / : 2\pi \Rightarrow 20 \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 15 \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 \cdot \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{g}} = 15 \cdot \frac{\sqrt{l_2}}{\sqrt{g}} \; / \cdot \frac{\sqrt{g}}{5} \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{l_1} = 3 \cdot \sqrt{l_2} \; /^2 \Rightarrow 16 \cdot l_1 = 9 \cdot l_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot l_1 = 9 \cdot l_2 \; / \cdot \frac{1}{16 \cdot l_2} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{9}{16}.$$

Vježba 085

Dva njihala počinju se istodobno njihati. Za prvih 25 titraja prvog njihala drugo njihalo učini 15 titraja. Koliki je omjer duljina tih njihala?

Rezultat: $\frac{9}{25}.$

Zadatak 086 (Maturant, gimnazija)

Elastičnu zavojnicu na koju je ovješen uteg izvučemo iz položaja ravnoteže za 2 cm i pustimo titrati. Konstanta elastičnosti zavojnice iznosi 1000 N/m. Nakon nekoga vremena zavojnica prestane titrati. Koliko je energije zavojnica predala okolini tijekom titranja?

Rješenje 086

$y = 2$ cm $= 0.02$ m, $k = 1000$N/m, $E_{ep} = ?$

Elastična potencijalna energija zavojnice je rad uložen za sabijanje ili rastezanje zavojnice za određenu duljinu y. Elastična zavojnica produžena za y ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2,$$

gdje je k konstanta zavojnice.

Energija koju je zavojnica predala okolini tijekom titranja iznosi:

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \frac{N}{m} \cdot (0.02 \; m)^2 = 0.2 \; J.$$

Vježba 086

Elastičnu zavojnicu na koju je ovješen uteg izvučemo iz položaja ravnoteže za 4 cm i pustimo titrati. Konstanta elastičnosti zavojnice iznosi 1000 N/m. Nakon nekoga vremena zavojnica prestane titrati. Koliko je energije zavojnica predala okolini tijekom titranja?

Rezultat: 0.8 J.

Zadatak 087 (Maturant, gimnazija)

Tijelo mase 0.1 kg titra na elastičnoj opruzi tako da je vremenska ovisnost elongacije opisana izrazom $x = 0.05 \cdot \sin(20 \cdot t + 30^\circ)$ pri čemu je x u metrima, a t u sekundama.

a) Kolika je amplituda titranja tijela?

b) Kolika je konstanta elastičnosti opruge?

Rješenje 087

$m = 0.1$ kg, $x = 0.05 \cdot \sin(20 \cdot t + 30^\circ)$, $A = ?$, $k = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra.

Harmoničko titranje opisuje se trigonometrijskim funkcijama sinus i kosinus.

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

gdje je

- x – elongacija ili pomak tijela iz ravnotežnog položaja
- A – amplituda ili maksimalna elongacija
- ω – kružna frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m \cdot \omega^2.$$

- k – konstanta opruge
- m – masa tijela što titra na opruzi
- t – vrijeme titranja
- φ_0 – početna faza.

a) Amplituda titranja tijela iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) \\ x = 0.05 \cdot \sin\left(20 \cdot t + 30^0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) \\ x = 0.05 \cdot \sin\left(20 \cdot t + 30^0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow A = 0.05 \ m.$$

b) Konstanta elastičnosti opruge je:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) \\ x = 0.05 \cdot \sin\left(20 \cdot t + 30^0\right) \\ k = m \cdot \omega^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) \\ x = 0.05 \cdot \sin\left(20 \cdot t + 30^0\right) \\ k = m \cdot \omega^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \omega = 20 \ \frac{rad}{s} \\ k = m \cdot \omega^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 0.1 \ kg \cdot \left(20 \ \frac{1}{s}\right)^2 = 40 \ \frac{N}{m}.$$

Vježba 087

Tijelo titra na elastičnoj opruzi tako da je vremenska ovisnost elongacije opisana izrazom $x = 0.25 \cdot \sin(2 \cdot t + 60^o)$ pri čemu je x u metrima, a t u sekundama. Kolika je amplituda titranja tijela?

Rezultat: 0.25 m.

Zadatak 088 (Edo, gimnazija)

Kada se na oprugu objesi jedan uteg mase m, opruga se produlji za 11 cm. Koliko je titrajno vrijeme (perioda) četiri utega (mase 4 · m) kada titraju na toj istoj opruzi?

Rješenje 088

$m_1 = m$, $x = 11$ cm $= 0.11$ m, $m_2 = 4 \cdot m$, $T_2 = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Za računanje dovoljno je uzeti

$$F = k \cdot x.$$

gdje je k konstanta elastičnosti. Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti periodu titranja:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Budući da uteg mase m visi na opruzi, sila teža G jednaka je sili opruge F.

$$\left.\begin{array}{l} F=k\cdot x \\ G=m_1\cdot g \\ F=G \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F=k\cdot x \\ G=m\cdot g \\ F=G \end{array}\right\} \Rightarrow k\cdot x=m\cdot g \Rightarrow k\cdot x=m\cdot g \quad /:x \Rightarrow k=\frac{m\cdot g}{x}.$$

Titrajno vrijeme (perioda) T_2 četiri utega (mase 4 · m) kada titraju na istoj opruzi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} T_2=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}} \\ k=\frac{m\cdot g}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow T_2=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{4\cdot m}{\frac{m\cdot g}{x}}} \Rightarrow T_2=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{4\cdot m}{\frac{m\cdot g}{x}}} \Rightarrow T_2=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{4\cdot x}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2=2\cdot\pi\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{x}{g}} \Rightarrow T_2=4\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{x}{g}}=4\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{0.11\ m}{9.81\ \frac{m}{s^2}}}=1.33\ s.$$

Vježba 088

Kada se na oprugu objesi jedan uteg mase m, opruga se produlji za 11 cm. Koliko je titrajno vrijeme (perioda) dva utega (mase 2 · m) kada titraju na toj istoj opruzi?

Rezultat: 0.94 s.

Zadatak 089 (Mario, student)

Dana je jednadžba vala y = 0.05 · sin(2πt – πx). Sve veličine su u SI sustavu. Odredite: amplitudu vala, kružnu frekvenciju, frekvenciju, periodu vala i brzinu širenja vala.

Rješenje 089

y = 0.05 · sin(2πt – πx), Y_0 = ?, ω = ?, ν = ?, T = ?, v = ?

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna brzina ω iznosi:

$$\omega=\frac{2\cdot\pi}{T},$$

gdje je T perioda, titrajno vrijeme.

Frekvencija ν je broj ophoda u jedinici vremena. Perioda T je vrijeme jednog ophoda. Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T\cdot\nu=1 \Rightarrow T=\frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu=\frac{1}{T}.$$

Valovito je gibanje periodičko prenošenje energije titranja od jednog mjesta na drugo. Elongaciju y koje god točke koja se nalazi na udaljenosti x od izvora vala u bilo koje vrijeme t možemo naći iz jednadžbe vala

$$y=Y_0\cdot\sin 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right),$$

gdje je Y_0 amplituda (maksimalna elongacija) vala, a $\frac{2\cdot\pi\cdot x}{\lambda}$ zaostatak u fazi neke točke na udaljenosti x od izvora vala. Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. To je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$\lambda=\mathrm{v}\cdot T \Rightarrow \mathrm{v}=\frac{\lambda}{T},$$

gdje je λ valna duljina, T perioda vala, v brzina širenja vala.

Amplitudu vala, period titranja i valnu duljinu odredit ćemo iz jednadžbe titranja jedne čestice u tom valu.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0.05 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot t - \pi \cdot x\right) \\ y = Y_0 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0.05 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(t - \frac{x}{2}\right) \\ y = Y_0 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0.05 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{1} - \frac{x}{2}\right) \\ y = Y_0 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0.05 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{1} - \frac{x}{2}\right) \\ y = Y_0 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Y_0 = 0.05 \ m \\ T = 1 \ s \\ \lambda = 2 \ m \end{array}\right\}.$$

Kružna frekvenija iznosi:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{1 \ s} = 2 \cdot \pi \ s^{-1}.$$

Brzina širenja vala ima vrijednost:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2 \ m}{1 \ s} = 2 \ \frac{m}{s}.$$

Vježba 089

Dana je jednadžba vala y = 0.5 · sin(2πt – πx). Sve veličine su u SI sustavu. Odredite amplitudu vala.

Rezultat: 0.5 m.

Zadatak 090 (Irena, gimnazija)

Jedno matematičko njihalo ima periodu 3 s, drugo 4 s. Kolika bi bila perioda matematičkog njihala čija bi duljina bila jednaka zbroju duljina obaju navedenih njihala?

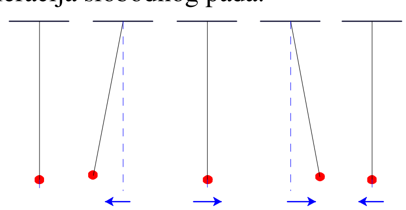
Rješenje 090

$T_1 = 3$ s, $T_2 = 4$ s, $T = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.



Računamo duljine matematičkih njihala perioda T_1 i T_2.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \ /^2 \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \ /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{l_1}{g}}\right)^2 \\ T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{l_2}{g}}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_1}{g} \\ T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_2}{g} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\dfrac{l_1}{g} \quad / \cdot \dfrac{g}{4\cdot\pi^2} \\ T_2^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\dfrac{l_2}{g} \quad / \cdot \dfrac{g}{4\cdot\pi^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_1 = \dfrac{g\cdot T_1^2}{4\cdot\pi^2} \\ l_2 = \dfrac{g\cdot T_2^2}{4\cdot\pi^2} \end{array}\right\}.$$

Perioda T matematičkog njihala čija bi duljina bila jednaka zbroju duljina obaju navedenih njihala iznosi:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1+l_2}{g}} \Rightarrow T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\left(l_1+l_2\right)} \Rightarrow T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\left(\frac{g\cdot T_1^2}{4\cdot\pi^2}+\frac{g\cdot T_2^2}{4\cdot\pi^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot\left(T_1^2+T_2^2\right)} \Rightarrow T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot\left(T_1^2+T_2^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{4\cdot\pi^2}\cdot\left(T_1^2+T_2^2\right)} \Rightarrow T = 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{T_1^2+T_2^2} \Rightarrow T = 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{T_1^2+T_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{T_1^2+T_2^2} = \sqrt{(3\ s)^2+(5\ s)^2} = 5\ s.$$

Vježba 090

Jedno matematičko njihalo ima periodu 6 s, drugo 8 s. Kolika bi bila perioda matematičkog njihala čija bi duljina bila jednaka zbroju duljina obaju navedenih njihala?

Rezultat: 10 s.

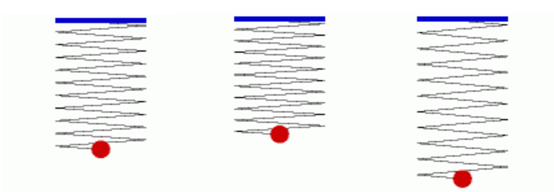
Zadatak 091 (Stela, srednja škola)

Kada se elastična opruga optereti utegom, mase m, produlji se za 3 cm. Kolika je perioda titranja opruge sa utegom? ($g = 9.81\ m/s^2$)

Rješenje 091

m, $x = 3\ cm = 0.03\ m$, $g = 9.81\ m/s^2$, $T = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu



izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k\cdot x$$

kažemo da harmonički titra.

Slovom x označili smo elongaciju, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku.

Perioda titranja elastične opruge je

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdje je m masa tijela, a k konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu).

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m\cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na

Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.
Kada elastičnu oprugu opteretimo utegom mase m, ona se zbog težine utega produlji za x. Zato vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} F = k \cdot x \\ F = G \\ G = m \cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow k \cdot x = m \cdot g \Rightarrow k \cdot x = m \cdot g \;/ : x \Rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x}.$$

Perioda titranja opruge sa utegom iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ k = \frac{m \cdot g}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{x}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{x}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}} =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.03\ m}{9.81\ \frac{m}{s^2}}} = 0.35\ s.$$

Vježba 091

Kada se elastična opruga optereti utegom, mase m, produlji se za 30 mm. Koliki je period titranja opruge sa utegom? (g = 9.81 m/s^2)

Rezultat: 0.35 s.

Zadatak 092 (Božica, gimnazija)

Kada se na kraj opruge objesi uteg mase 0.5 kg tada je njezina perioda titranja 2 s. Kolika treba biti masa dodatnog utega da bi se perioda titranja povećala tri puta?

Rješenje 092

m = 0.5 kg, T = 2 s, $T_1 = 3 \cdot T$, m_1 = ?

Perioda titranja elastične opruge je

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdje je m masa tijela, a k konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu). Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge.
Iz uvjeta zadatka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + m_1}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[T_1 = 3 \cdot T \right] \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + m_1}{k}} = 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m + m_1}{k}} = 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \;/ \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \sqrt{\frac{m + m_1}{k}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m + m_1}{k}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{m + m_1}{k}}\right)^2 = 9 \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 \Rightarrow \frac{m + m_1}{k} = 9 \cdot \frac{m}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m + m_1}{k} = 9 \cdot \frac{m}{k} \;/ \cdot k \Rightarrow m + m_1 = 9 \cdot m \Rightarrow m_1 = 9 \cdot m - m \Rightarrow m_1 = 8 \cdot m \Rightarrow m_1 = 8 \cdot 0.5\ kg \Rightarrow m_1 = 4\ kg.$$

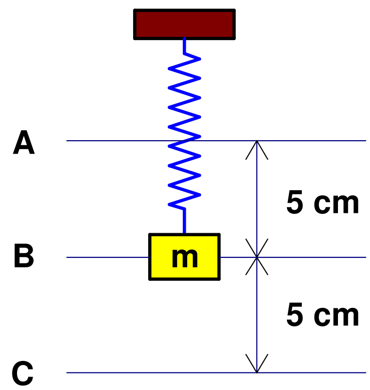
Vježba 092

Kada se na kraj opruge objesi uteg mase 500 g tada je njezina perioda titranja 3 s. Kolika treba biti masa dodatnog utega da bi se perioda titranja povećala tri puta?

Rezultat: 4 kg.

Zadatak 093 (Luka, gimnazija)

Crtež prikazuje tijelo mase m ovješeno o oprugu konstante 50 N/m. Oprugu rastegnemo za 5 cm i pustimo titrati pa ona titra periodom 2 s.



a) Napišite jednadžbu titranja tijela y = f(t) ako se u trenutku t = 0 tijelo nalazilo u točki B te se gibalo prema točki A.
b) Napišite jednadžbu titranja tijela y = f(t) ako se u trenutku t = 0 tijelo nalazilo u točki A.
c) Napišite jednadžbu titranja tijela y = f(t) ako se u trenutku t = 0 tijelo nalazilo u točki C.
d) U kojem je položaju brzina tijela najveća?
e) U kojem je položaju akceleracija tijela najveća?
f) U kojem je položaju kinetička energija tijela najveća?
g) U kojem je položaju elastična potencijalna energija najveća?
h) U kojem položaju je brzina tijela jednaka nuli?
i) U kojem položaju je elastična sila na tijelo najmanja?
j) Izračunajte ukupnu energiju ovoga oscilatora.

Rješenje 093

m, k = 50 N/m, y_0 = 5 cm = 0.05 m, T = 2 s, y = ?, E = ?

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje. Kad tijelo titra, u tom je položaju najmanja potencijalna, a najveća kinetička energija. Zbroj tih dviju energija (zanemarivši gubitke) je stalan i jednak najvećoj potencijalnoj ili najvećoj kinetičkoj energiji.
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · y ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak, elongacija ili udaljenost y od položaja ravnoteže materijalne točke koja harmonički titra, mijenja se s vremenom prema

$$y = y_0 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot t}{T},$$

gdje je y elongacija, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, y_0 amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titraja ili perioda. Ako materijalna točka ne počinje titrati iz položaja ravnoteže, elongacija y mijenja se s vremenom

$$y = y_0 \cdot \sin \left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \varphi \right),$$

gdje je φ početni fazni kut.
Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak y i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za neko tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravo proporcionalna pomaku y, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = - k \cdot y$$

kažemo da harmonički titra.
Slovom y označili smo elongaciju, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku. Slovom y_0 označili smo amplitudu, tj. maksimalnu elongaciju. Sila je najveća za $y = y_0$.
Tada je ukupna energija harmoničkog oscilatora jednaka

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2 .$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Drugi Newtonov zakon: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow m = \frac{F}{a}.$$

a)
Budući da se u trenutku t = 0 tijelo nalazi u točki B, položaju ravnoteže, počinje titrati iz položaja ravnoteže pa jednadžba gibanja glasi:

$$y = y_0 \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = 0.05\ m \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2\ s} = 0.05\ m \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2\ s} = 0.05\ m \cdot \sin\left(\pi \cdot t\ s^{-1}\right).$$

b)
Budući da se u trenutku t = 0 tijelo nalazi u točki A, maksimalno je udaljeno od ravnotežnog položaja u pozitivnom smjeru y osi pa mu je amplituda pozitivna. Početni fazni kut je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i jednadžba gibanja glasi:

$$y = y_0 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \varphi\right) = 0.05\ m \cdot \left(\sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2\ s} + \frac{\pi}{2}\right) = 0.05\ m \cdot \left(\sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2\ s} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 0.05\ m \cdot \sin\left(\pi \cdot t\ s^{-1} + \frac{\pi}{2}\right) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha\right] = 0.05\ m \cdot \cos\left(\pi \cdot t\ s^{-1}\right).$$

c)
Budući da se u trenutku t = 0 tijelo nalazi u točki C, maksimalno je udaljeno od ravnotežnog položaja u negativnom smjeru y osi pa mu je amplituda negativna. Početni fazni kut je $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ i jednadžba gibanja glasi:

$$y = y_0 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \varphi\right) = 0.05\ m \cdot \left(\sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2\ s} - \frac{\pi}{2}\right) = 0.05\ m \cdot \left(\sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2\ s} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 0.05\ m \cdot \sin\left(\pi \cdot t\ s^{-1} - \frac{\pi}{2}\right) = \left[\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha\right] = -0.05\ m \cdot \cos\left(\pi \cdot t\ s^{-1}\right).$$

d)
Tijelo ima najveću kinetičku energiju kad prolijeće kroz ravnotežni položaj. U trenutku kad je tijelo u točki B (kada prolazi ravnotežnim položajem, y = 0) ono ima maksimalnu brzinu

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}}.$$

e)
Ako tijelo izvučemo za pomak y iz ravnotežnog položaja, opruga se također produlji za pomak y. Stoga djeluje elastična sila opruge

$$F = -k \cdot y$$

u smjeru suprotnom od pomaka y, tj. prema ravnotežnom položaju. Budući da na tijelo djeluje elastična sila

$$F = -k \cdot y$$

koja nije konstantna, za različite vrijednosti od y poprima različite vrijednosti. Iz drugog Newtonova poučka

$$F = m \cdot a$$

izlazi

$$m \cdot a = -k \cdot y \;\Rightarrow\; m \cdot a = -k \cdot y \;/ \cdot \frac{1}{m} \;\Rightarrow\; a = -\frac{k \cdot y}{m}$$

pa zato i akceleracija ovisi o pomaku y. Akceleracija je, dakle, najveća u točkama A i C kada je tijelo maksimalno udaljeno od ravnotežnog položaja.

f)
Kinetička energija je najveća kada tijelo prolijeće kroz ravnotežni položaj, tj. kada je u točki B. U trenutku kad tijelo prolijeće kroz ravnotežni položaj, y = 0, ono ima maksimalnu kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{max}^2$$

i elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot 0 = 0.$$

Elastična potencijalna energija jest nula jer je u tom trenutku pomak iz položaja ravnoteže jednak nuli. Kinetička energija tijela je najveća kada tijelo prolijeće kroz ravnotežni položaj, točku B.

g)
Tijelo ima najveću elastičnu potencijalnu energiju u krajnjim točkama A i C.
Elastična potencijalna energija je maksimalna kada je tijelo u točkama A ili C jer je u tom trenutku pomak iz položaja ravnoteže najveći (amplituda y_0)

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2.$$

h)
Kada je tijelo maksimalno udaljeno od ravnotežnog položaja (točke A i C) ima kinetičku energiju

$$E_k = 0 \; J$$

pa mu je brzina

$$v = 0 \; \frac{m}{s}.$$

i)
Ako tijelo izvučemo za pomak y iz ravnotežnog položaja, opruga se također produlji za pomak y. Stoga djeluje elastična sila opruge

$$F = -k \cdot y$$

u smjeru suprotnom od pomaka y, tj. prema ravnotežnom položaju. Budući da na tijelo djeluje elastična sila

$$F = -k \cdot y$$

koja nije konstantna, za različite vrijednosti od y poprima različite vrijednosti. Iz drugog Newtonova poučka

$$F = m \cdot a$$

izlazi

$$m \cdot a = -k \cdot y \Rightarrow m \cdot a = -k \cdot y \;/ \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow a = -\frac{k \cdot y}{m}$$

pa zato i akceleracija ovisi o pomaku y. Elastična sila

$$F = -k \cdot y$$

na tijelo najmanja je u točki B jer je tada pomak tijela iz ravnotežnog položaja jednak nuli, y = 0. Elastična sila jest nula jer je u tom trenutku pomak iz položaja ravnoteže jednak nuli.

j)

Po zakonu očuvanja energije zbroj kinetičke energije tijela i elastične potencijalne energije opruge je konstantan, tj.

$$E = E_k + E_{ep} = konst.$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = konst.$$

Ako u posebnom slučaju za y odaberemo amplitudu $y = y_0$, dobivamo

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2$$

jer je u amplitudnom položaju brzina v tijela nula, v = 0. Ukupna energija harmonijskog oscilatora iznosi:

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \frac{N}{m} \cdot (0.05\ m)^2 = 0.0625\ J.$$

Vježba 093

Tijelo je ovješeno o oprugu konstante 100 N/m. Oprugu rastegnemo za 10 cm i pustimo titrati. Izračunajte ukupnu energiju oscilatora.

Rezultat: 0.5 J.

Zadatak 094 (Plavuša, medicinska škola)

Uteg mase m ovješen o oprugu konstante k titra periodom T. Kojom će periodom titrati uteg mase $4 \cdot m$ ovješen o istu oprugu?

$$A)\ T \qquad B)\ 2 \cdot T \qquad C)\ \frac{T}{2} \qquad D)\ 4 \cdot T$$

Rješenje 094

m, k, T, $m_1 = 4 \cdot m$, $T_1 = ?$

Ako tijelo ovješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za neko tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravo proporcionalna pomaku, smjera suprotnoga pomaku kažemo da harmonički titra.

Perioda titranja opruge je

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdje je m masa tijela, a k konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu).

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_1 = 2 \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow T_1 = 2 \cdot T.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = 2 \Rightarrow \frac{T_1}{T} = 2 \; / \cdot 2 \Rightarrow T_1 = 2 \cdot T.$$

Odgovor je pod B

3.inačica

Iz formule za periodu opruge

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

uočimo da je perioda T upravno razmjerna s kvadratnim korijenom mase utega.

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k}} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{m} \Rightarrow T \sim \sqrt{m}.$$

Ako se masa utega poveća 4 puta, perioda će se povećati

$$\sqrt{4} = 2$$

puta.

Odgovor je pod B.

Vježba 094

Uteg mase m ovješen o oprugu konstante k titra periodom T. Kojom će periodom titrati uteg mase 9 · m ovješen o istu oprugu?

$$A)\; 3 \cdot T \qquad B)\; 9 \cdot T \qquad C)\; \frac{T}{3} \qquad D)\; T$$

Rezultat: A.

Zadatak 095 (Maja, gimnazija)

Njihalo preneseno sa Zemlje na Mjesec harmonijski titra periodom koja je 2.45 puta duža od periode harmonijskog titranja toga njihala na Zemlji. Koliko iznosi ubrzanje slobodnog pada na Mjesecu, ako je ubrzanje slobodnog pada na Zemlji g?

$$A)\; \frac{g}{6} \qquad B)\; \frac{g}{2.45} \qquad C)\; 2.45 \cdot g \qquad D)\; 6 \cdot g$$

Rješenje 095

$T_M = 2.45 \cdot T$, g, $g_M = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Perioda titranja njihala je na:

- Zemlji: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$
- Mjesecu: $T_M = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_M}}$.

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$T_M = 2.45 \cdot T \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_M}} = \frac{245}{100} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_M}} = \frac{245}{100} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

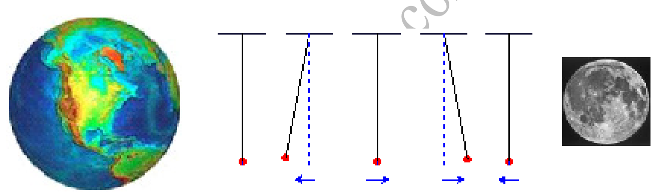
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g_M}} = \frac{49}{20} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g_M}} = \frac{49}{20} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \; /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{l}{g_M}}\right)^2 = \left(\frac{49}{20}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l}{g_M} = \frac{2401}{400} \cdot \frac{l}{g} \Rightarrow \frac{l}{g_M} = \frac{2401}{400} \cdot \frac{l}{g} \; / \cdot \frac{1}{l} \Rightarrow \frac{1}{g_M} = \frac{2401}{400} \cdot \frac{1}{g} \Rightarrow \frac{1}{g_M} = \frac{2401}{400 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2401 \cdot g_M = 400 \cdot g \Rightarrow 2401 \cdot g_M = 400 \cdot g \; /: 2401 \Rightarrow g_M = \frac{400}{2401} \cdot g \Rightarrow \left[\frac{400}{2401} \approx \frac{1}{6}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_M = \frac{1}{6} \cdot g \Rightarrow g_M = \frac{g}{6}.$$

Odgovor je pod A.



Vježba 095

Njihalo preneseno sa Mjeseca na Zemlju harmonijski titra periodom koja je 2.45 puta kraća od periode harmonijskog titranja toga njihala na Mjesecu. Koliko iznosi ubrzanje slobodnog pada na Zemlji, ako je ubrzanje slobodnog pada na Mjesecu g?

$$A)\ \frac{g}{6} \qquad B)\ \frac{g}{2.45} \qquad C)\ 2.45 \cdot g \qquad D)\ 6 \cdot g$$

Rezultat: D.

Zadatak 096 (Ivan, tehnička škola)

Brod na moru proizvede 10 valova za 5 sekundi. Pri prijelazu valova iz dublje vode u pliću valna duljina promijeni im se sa 3 m na 2 m. Odredi:
a) brzine valova u dubokoj i plitkoj vodi
b) indeks loma.

Rješenje 096

n = 10 valova, t = 5 s, λ_1 = 3 m, λ_2 = 2 m, v_1 = ?, v_2 = ? $n_{2/1}$ = ?

Frekvencija titranja ν računa se po formuli

$$\nu = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj titraja koje je tijelo učinilo u vremenu t.

Ako su v_1 i v_2 brzine valova u prvom i drugom sredstvu, onda omjer brzina $\frac{v_1}{v_2}$ bilježimo sa $n_{2/1}$ i zovemo relativnim indeksom loma drugog sredstva prema prvom sredstvu.

$$n_{2/1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Brzina širenja vala v dana je formulom

$$v = \lambda \cdot \nu,$$

gdje je λ valna duljina, ν frekvencija vala.
Kada val prelazi iz jednog sredstva u drugo, međusobno različitih svojstava, brzina v i valna duljina λ mu se mijenjaju, dok frekvencija ν ostaje ista. Naime, frekvencija je svojstvo izvora vala.

a)
Računamo frekvenciju vala.

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{10}{5\ s} = 2\ \frac{1}{s} = 2\ s^{-1} = 2\ Hz.$$

Budući da val prelazi iz dublje vode u pliću, dolazi do loma vala pri čemu se mijenja brzina vala v i valna duljina λ. Frekvencija ν ostaje nepromijenjena jer ona ovisi o izvoru koji proizvodi valove.
Brzine valova u dubokoj i plitkoj vodi su:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 \cdot \nu = 3\ m \cdot 2\ \frac{1}{s} = 6\ \frac{m}{s} \\ v_2 &= \lambda_2 \cdot \nu = 2\ m \cdot 2\ \frac{1}{s} = 4\ \frac{m}{s} \end{aligned}\right\}.$$

b)
Indeks loma iznosi:

$$n_{2/1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{6\ \frac{m}{s}}{4\ \frac{m}{s}} = 1.5.$$

Vježba 096

Brod na moru proizvede 15 valova za 5 sekundi. Pri prijelazu valova iz dublje vode u pliću valna duljina promijeni im se sa 3 m na 2 m. Odredi brzine valova u dubokoj i plitkoj vodi.

Rezultat: $v_1 = 9$ m/s, $v_2 = 6$ m/s.

Zadatak 097 (Branislav, gimnazija)

Materijalna točka titra harmoničko prema jednadžbi $x = 3\ cm \cdot \sin 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t.$ Za koje će vrijeme ta točka prijeći put od položaja ravnoteže do najveće elongacije ako je t izraženo u sekundama?

Rješenje 097

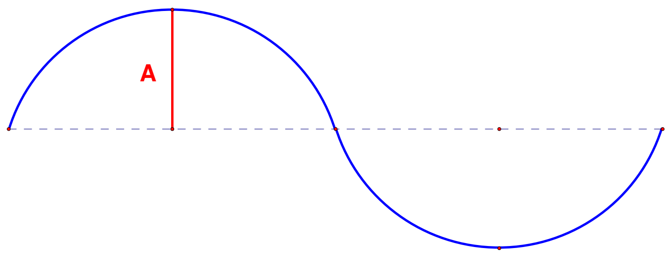
$$x = 3\ cm \cdot \sin 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t, \quad A = 3\ cm, \quad t = ?$$

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje.
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne

elongaciji. Pomak, elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže materijalne točke koja harmonički titra, mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin \frac{2\pi \cdot t}{T},$$

gdje je x elongacija, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titraja ili perioda.



Budući da točka prilikom titranja prelazi put od položaja ravnoteže do maksimalne elongacije (amplitude), slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3\ cm \cdot \sin 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t \\ A = 3\ cm\ \ ,\ \ x = A \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3\ cm = 3\ cm \cdot \sin 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3\ cm = 3\ cm \cdot \sin 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\ / \cdot \frac{1}{3\ cm}\ \Rightarrow\ 1 = \sin 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t = 1\ \Rightarrow\ \sin 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t = 1\ / \sin^{-1}\ \Rightarrow\ 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t = \sin^{-1} 1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t = \frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t = \frac{\pi}{2}\ / \cdot \frac{2\ s}{\pi}\ \Rightarrow\ t = 1\ s.$$

Vježba 097

Materijalna točka titra harmoničko prema jednadžbi $x = 7\ cm \cdot \sin 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t$. Za koje će vrijeme ta točka prijeći put od položaja ravnoteže do najveće elongacije ako je t izraženo u sekundama?

Rezultat: 1 s.

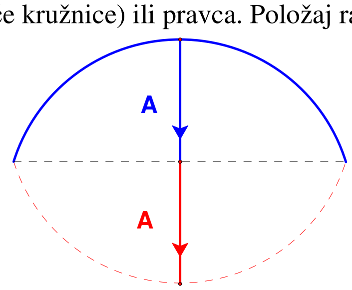
Zadatak 098 (Ante, gimnazija)

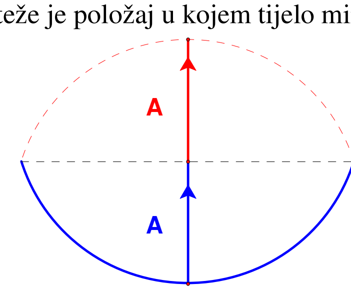
Koliki put prevali u 1 sekundi čestica žice koja titra frekvencijom od 300 Hz ako je amplituda titranja 0.5 mm?

Rješenje 098

t = 1 s, ν = 300 Hz, A = 0.5 mm = 0.05 cm, s = ?

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje.





Budući da je frekvencija 300 Hz (broj titraja u jednoj sekundi), čestica žice jedan titraj izvede za $\frac{1}{300}\ s$. Za to vrijeme čestica je prešla put x:

$$x = 4 \cdot A = 4 \cdot 0.05\ cm = 0.2\ cm.$$

U jednoj sekundi čestica žice je 300 puta prešla put x pa je ukupni prevaljeni put s jednak:

$$s = x \cdot \nu = 0.2 \ cm \cdot 300 = 60 \ cm.$$

Vježba 098

Koliki put prevali u 1 sekundi čestica žice koja titra frekvencijom od 400 Hz ako je amplituda titranja 0.5 mm?

Rezultat: 80 cm.

Zadatak 099 (Igor, srednja škola)

Koji dio vremena jednog titraja mora proći da točka koja harmonički titra postigne brzinu koja će veličinom biti jednaka polovici najveće brzine? Početni fazni kut jednak je nuli.

Rješenje 099

$$v = \frac{1}{2} \cdot v_0 \quad , \quad t = ?$$

Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje.
Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Brzina tijela koje harmonički titra mijenja se s vremenom

$$v = v_0 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

gdje je v_0 maksimalna brzina, T vrijeme jednog titraja ili perioda.

$$\left.\begin{array}{l} v = v_0 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} \\ v = \frac{1}{2} \cdot v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow v_0 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{1}{2} \cdot v_0 \Rightarrow v_0 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{1}{2} \cdot v_0 \ / \cdot \frac{1}{v_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{1}{2} \ / \cos^{-1} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = \frac{\pi}{3} \ / \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow t = \frac{T}{6}.$$

Vježba 099

Koji dio vremena jednog titraja mora proći da točka koja harmonički titra postigne brzinu koja će veličinom biti jednaka $\frac{\sqrt{2}}{2}$ najveće brzine? Početni fazni kut jednak je nuli.

Rezultat: $\frac{T}{8}$.

Zadatak 100 (Jasna, srednja škola)

Podatci u tablici dobiveni su mjerenjem duljine opruge (l) pri njezinom opterećenju utezima različitih masa (m). Odredite konstantu elastičnosti opruge i pripadnu maksimalnu apsolutnu pogrješku.

m / g	0	10	20	30	40
l / cm	3.0	4.2	5.3	6.6	7.7

Rješenje 100

Mjeriti znači uspoređivati neku nepoznatu veličinu s poznatom. Budući da se pri svakom mjerenju javljaju slučajne pogreške traženu veličinu moramo izmjeriti više puta.

$$x_1 \quad , \quad x_2 \quad , \quad x_3 \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n.$$

Srednja vrijednost (aritmetička sredina) mjerenja $\bar{x}$ ujedno je i najvjerojatnija prava vrijednost.

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}.$$

Apsolutna vrijednost najvjerojatnije pogreške svakog pojedinog mjerenja (niz apsolutnih odstupanja) je

$$|A_1|=|x_1-\bar{x}| \quad , \quad |A_2|=|x_2-\bar{x}| \quad , \quad |A_3|=|x_3-\bar{x}| \quad , \quad ... \quad , \quad |A_n|=|x_n-\bar{x}|.$$

Najveća (maksimalna) apsolutna pogreška jest najveće odstupanje u nizu svih apsolutnih odstupanja.

$$|A|_m=\max\{|A_1|\ ,\ |A_2|\ ,\ |A_3|\ ,\ ...\ ,\ |A_n|\}$$

Najveće relativno odstupanje (maksimalna relativna pogreška) r pokazuje kolika je učinjena pogreška prilikom mjerenja u usporedbi s mjerenom veličinom, a izražava se u postocima (%).

$$r=\frac{|A|_m}{\bar{x}}\cdot 100\%.$$

Rezultat mjerenja (mjerni rezultat) prikazuje se u obliku

$$x=\bar{x}\pm|A|_m.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G=m\cdot g.$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F=-k\cdot x$$

kažemo da harmonijski titra.

Budući da se opruga opterećuje utezima različitih masa, težina utega uzrokovat će harmonijsko titranje. Zato vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} F=G \\ F=k\cdot x\ ,\ G=m\cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow k\cdot x=m\cdot g \Rightarrow k\cdot x=m\cdot g\ /\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow k=\frac{m\cdot g}{x}.$$

Računamo konstantu elastičnosti opruge pomoću četiri mjerenja zadana tablicom. ($g = 10\ m/s^2$)

m / g	0	10	20	30	40
l / cm	3.0	4.2	5.3	6.6	7.7

Pretvaramo mjerne jedinice (grame u kilograme, a centimetre u metre).

m / kg	0	0.01	0.02	0.03	0.04
l / m	0.030	0.042	0.053	0.066	0.077

Računamo produljenja opruge za svako mjerenje.

1.mjerenje

$$x_1=0.042\ m-0.030\ m=0.012\ m.$$

2.mjerenje

$$x_2=0.053\ m-0.030\ m=0.023\ m.$$

3.mjerenje

$$x_3=0.066\ m-0.030\ m=0.036\ m.$$

4.mjerenje

$$x_4=0.077\ m-0.030\ m=0.047\ m.$$

1. mjerenje	$k_1 = \frac{m_1 \cdot g}{x_1} = \frac{0.01\ kg \cdot 10\ \frac{m}{s^2}}{0.012\ m} = 8.33\ \frac{N}{m}$
2. mjerenje	$k_2 = \frac{m_2 \cdot g}{x_2} = \frac{0.02\ kg \cdot 10\ \frac{m}{s^2}}{0.023\ m} = 8.70\ \frac{N}{m}$
3. mjerenje	$k_3 = \frac{m_3 \cdot g}{x_3} = \frac{0.03\ kg \cdot 10\ \frac{m}{s^2}}{0.036\ m} = 8.33\ \frac{N}{m}$
4. mjerenje	$k_4 = \frac{m_4 \cdot g}{x_4} = \frac{0.04\ kg \cdot 10\ \frac{m}{s^2}}{0.047\ m} = 8.51\ \frac{N}{m}$

Srednja vrijednost konstante elastičnosti opruge iznosi:

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{4} = \frac{8.33\ \frac{N}{m} + 8.70\ \frac{N}{m} + 8.33\ \frac{N}{m} + 8.51\ \frac{N}{m}}{4} = 8.47\ \frac{N}{m}.$$

Apsolutna vrijednost najvjerojatnije pogreške svakog pojedinog mjerenja (niz apsolutnih odstupanja) je

- $\left|A_1\right| = \left|k_1 - \bar{k}\right| = \left|8.33\ \frac{N}{m} - 8.47\ \frac{N}{m}\right| = \left|-0.14\ \frac{N}{m}\right| = 0.14\ \frac{N}{m}$
- $\left|A_2\right| = \left|k_2 - \bar{k}\right| = \left|8.70\ \frac{N}{m} - 8.47\ \frac{N}{m}\right| = \left|0.23\ \frac{N}{m}\right| = 0.23\ \frac{N}{m}$
- $\left|A_3\right| = \left|k_3 - \bar{k}\right| = \left|8.33\ \frac{N}{m} - 8.47\ \frac{N}{m}\right| = \left|-0.14\ \frac{N}{m}\right| = 0.14\ \frac{N}{m}$
- $\left|A_4\right| = \left|k_4 - \bar{k}\right| = \left|8.51\ \frac{N}{m} - 8.47\ \frac{N}{m}\right| = \left|0.04\ \frac{N}{m}\right| = 0.04\ \frac{N}{m}$

Maksimalna apsolutna pogreška tako određene konstante elastičnosti iznosi

$$\left|A\right|_m = \max\left\{\left|A_1\right|,\ \left|A_2\right|,\ \left|A_3\right|,\ \left|A_4\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{0.14\ \frac{N}{m},\ 0.23\ \frac{N}{m},\ 0.14\ \frac{N}{m},\ 0.04\ \frac{N}{m}\right\} = 0.23\ \frac{N}{m}.$$

Vježba 100

Zadan je niz mjerenja. 5.51 cm, 5.52 cm, 5.48 cm, 5.50 cm, 5.49 cm. Nađi srednju vrijednost i najveću apsolutnu pogrešku.

Rezultat: 5.50 cm, 0.02 cm.