

**Zadatak 061 (Sanja, gimnazija)**

Kolika je akceleracija slobodnog pada na ekvatoru ako je sekundno njihalo dugo 99.103 cm?

**Rješenje 061**

$$l = 99.103 \text{ cm}, \quad T = 2 \text{ s}, \quad g = ?$$

**Matematičko njihalo** je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja niže koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest



$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je  $l$  duljina njihala, a  $g$  akceleracija slobodnog pada.

Jedan njihaj sekundnog njihala traje 1 s, a jedan potpuni titraj (dva njihaja = perioda) traje  $T = 2 \text{ s}$ .

Sekundno njihalo jest njihalo sa poluperiodom 1 s, a njegovo titrajno vrijeme (perioda)  $T = 2 \text{ s}$ .

Iz izraza za periodu matematičkog njihala dobije se akceleracija slobodnog pada na ekvatoru:

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad /^2 \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g} \quad / \cdot g \Rightarrow g \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot l \Rightarrow g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2} = \\ &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 99.103 \text{ cm}}{(2 \text{ s})^2} = 978.107 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

**Vježba 061**

Kolika je akceleracija slobodnog pada na mjestu gdje je sekundno njihalo dugo 100 cm?

**Rezultat:**  $986.96 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ .

**Zadatak 062 (Sanja, gimnazija)**

Kolika je duljina sekundnoga matematičkog njihala? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 062**

$$T = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad l = ?$$

**Matematičko njihalo** je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja niže koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je  $l$  duljina njihala, a  $g$  akceleracija slobodnog pada.

Jedan njihaj sekundnog njihala traje 1 s, a jedan potpuni titraj (dva njihaja = perioda) traje  $T = 2 \text{ s}$ .

Sekundno njihalo jest njihalo sa poluperiodom 1 s, a njegovo titrajno vrijeme (perioda)  $T = 2 \text{ s}$ .

Iz izraza za periodu matematičkog njihala dobije se njegova duljina:

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad /^2 \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g} \quad / \cdot g \Rightarrow g \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot l \Rightarrow l = \frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} = \\ &= \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi^2} = 0.9939608 \text{ m} \approx 1 \text{ m}. \end{aligned}$$

**Vježba 062**

Kolika je duljina sekundnog njihala na mjestu gdje je  $g = 980 \text{ cm/s}^2$ ?

**Rezultat:**  $0.9929 \text{ m}$ .

**Zadatak 063 (Ana, gimnazija)**

Valovi se u nekom sredstvu šire brzinom 3.6 m/s uz frekvenciju 6 Hz. Kolika je razlika u fazi dviju točaka koje su međusobno udaljene 30 cm?

**Rješenje 063**

$$v = 3.6 \text{ m/s}, \quad \nu = 6 \text{ Hz}, \quad \Delta x = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}, \quad \Delta\varphi = ?$$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$\lambda = v \cdot T, \quad \lambda = \frac{v}{\nu},$$

gdje je  $\lambda$  valna duljina,  $T$  perioda titraja,  $\nu$  frekvencija, a  $v$  brzina širenja vala.

Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti  $x_1$  i  $x_2$  od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}.$$

Razlika u fazi iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{v}{\nu} \\ \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\frac{v}{\nu}} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x \cdot \nu}{v} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{0.3 \text{ m} \cdot 6 \frac{1}{\text{s}}}{3.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \pi.$$

**Vježba 063**

Valovi se u nekom sredstvu šire brzinom 7.2 m/s uz frekvenciju 6 Hz. Kolika je razlika u fazi dviju točaka koje su međusobno udaljene 60 cm?

**Rezultat:**  $\pi$ .

**Zadatak 064 (Ana, gimnazija)**

Razlika hoda dvaju valova koji interferiraju iznosi  $0.6 \cdot \lambda$ . Kolika je razlika faza valova (izražena u stupnjevima)?

**Rješenje 064**

$$\Delta x = 0.6 \cdot \lambda, \quad \Delta\varphi = ?$$



Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti  $x_1$  i  $x_2$  od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}.$$

Razlika u fazi iznosi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{0.6 \cdot \lambda}{\lambda} = 1.2 \cdot \pi = \left[ \pi \text{ rad} = 180^\circ \right] = 1.2 \cdot 180^\circ = 216^\circ.$$

**Vježba 064**

Razlika hoda dvaju valova koji interferiraju iznosi  $0.5 \cdot \lambda$ . Kolika je razlika faza valova (izražena u stupnjevima)?

**Rezultat:**  $180^\circ$ .

**Zadatak 065 (Viki, gimnazija)**

Val se širi u pravcu brzinom 60 m/s. Frekvencija vala je 8 Hz. Odredi (u stupnjevima i radijanima) razliku u fazi između čestice koja je izvor vala i čestice koja je 5 m udaljena od izvora.

**Rješenje 065**

$$v = 60 \text{ m/s}, \quad \nu = 8 \text{ Hz}, \quad x_1 = 0 \text{ m}, \quad x_2 = 5 \text{ m}, \quad \Delta\varphi = ?$$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$\lambda = v \cdot T \quad , \quad \lambda = \frac{v}{\nu}$$

gdje je  $\lambda$  valna duljina,  $T$  perioda titraja,  $\nu$  frekvencija, a  $v$  brzina širenja vala.

Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti  $x_1$  i  $x_2$  od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Razlika u fazi iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{v}{\nu} \\ \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\frac{v}{\nu}} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{(x_2 - x_1) \cdot \nu}{v} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{(5 \text{ m} - 0 \text{ m}) \cdot 8 \frac{1}{s}}{60 \frac{m}{s}} =$$

$$= \frac{80}{60} \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \pi = 4.189 \text{ rad} = \left[ \pi \text{ rad} = 180^\circ \right] = \frac{4}{3} \cdot 180^\circ = 240^\circ.$$

### Vježba 065

Val se širi u pravcu brzinom 30 m/s. Frekvencija vala je 4 Hz. Odredi (u stupnjevima i radijanima) razliku u fazi između čestice koja je izvor vala i čestice koja je 5 m udaljena od izvora.

**Rezultat:**  $4.189 \text{ rad} = 240^\circ$ .

### Zadatak 066 (Viki, gimnazija)

Koliku razliku u fazi imaju dvije točke koje su 2 m i 8 m udaljene od izvora vala, ako se kroz njih širi val brzinom 300 m/s. Vrijeme jednog titraja jest 0.02 s.

#### Rješenje 066

$$x_1 = 2 \text{ m}, \quad x_2 = 8 \text{ m}, \quad v = 300 \text{ m/s}, \quad T = 0.02 \text{ s}, \quad \Delta\varphi = ?$$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$\lambda = v \cdot T \quad , \quad \lambda = \frac{v}{\nu}$$

gdje je  $\lambda$  valna duljina,  $T$  perioda titraja,  $\nu$  frekvencija, a  $v$  brzina širenja vala.

Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti  $x_1$  i  $x_2$  od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Razlika u fazi iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = v \cdot T \\ \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{v \cdot T} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{8 \text{ m} - 2 \text{ m}}{300 \frac{m}{s} \cdot 0.02 \text{ s}} = 2 \cdot \pi.$$

### Vježba 066

Koliku razliku u fazi imaju dvije točke koje su 3 m i 9 m udaljene od izvora vala, ako se kroz njih širi val brzinom 300 m/s. Vrijeme jednog titraja jest 0.02 s.

**Rezultat:**  $2 \cdot \pi$ .

### Zadatak 067 (Ante, Visoka škola za sigurnost na radu)

Harmonički oscilator ima masu 300 kg i amplitudu 3 mm. Kolika je frekvencija ako je ukupna energija 2 J?

#### Rješenje 067

$$m = 300 \text{ kg}, \quad A = 3 \text{ mm} = 0.003 \text{ m}, \quad E = 2 \text{ J}, \quad \nu = ?$$

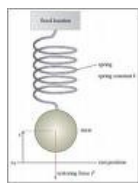
Titranje uzrokovano elastičnom silom  $F = -k \cdot s$ , zove se jednostavno harmoničko titranje, a

sustav koji titra jednostavni harmonički oscilator. Energija tijela koje harmonički titra je

$$E = 2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot A^2,$$

gdje je  $m$  masa harmoničkog oscilatora,  $v$  frekvencija, a  $A$  amplituda.

Frekvencija je:



$$E = 2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot A^2 \Rightarrow v^2 = \frac{E}{2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot A^2} \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{E}{2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot A^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\pi \cdot A} \cdot \sqrt{\frac{E}{2 \cdot m}} = \frac{1}{\pi \cdot 0.003 \text{ m}} \cdot \sqrt{\frac{2 \text{ J}}{2 \cdot 300 \text{ kg}}} = 6.13 \frac{1}{\text{s}} = 6.13 \text{ Hz}.$$

### Vježba 067

Harmonički oscilator ima masu 600 kg i amplitudu 3 mm. Kolika je frekvencija ako je ukupna energija 4 J?

**Rezultat:** 6.13 Hz.

### Zadatak 068 (Tea, studentica)

Kolika je perioda fizikalnog njihala u obliku homogenog štapa duljine  $l = 1 \text{ m}$ , ako se njiše oko osi koja prolazi:

- jednim njegovim krajem
- kroz točku štapa udaljenu  $1/3$  od njegovog kraja? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 068

$$l = 1 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T = ?$$

Fizikalno njihalo je svako tijelo koje se može njihati pod utjecajem težine tijela. Perioda fizikalnog njihala malih amplituda je

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L}},$$

gdje je  $I$  moment tromosti,  $m$  masa i  $L$  udaljenost osi od središta mase (težišta) njihala.

Moment tromosti štapa duljine  $l$  s obzirom na os koja prolazi njegovom sredinom i okomita je na njegovu dužinu iznosi:

$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2.$$

Moment tromosti štapa duljine  $l$  s obzirom na os koja prolazi jednim njegovim krajem i okomita je na dužinu štapa je:

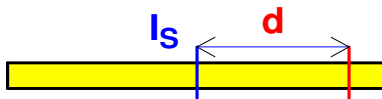
$$I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2.$$

### Poučak o paralelnim osima

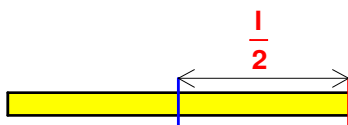
Poučak o paralelnim osima omogućuje računanje momenta tromosti za bilo koju paralelnu os ako je poznat moment tromosti s obzirom na os kroz središte mase. Neka je  $I_S$  moment tromosti za os kroz središte mase, dok je  $I$  moment tromosti s obzirom na paralelnu os, a  $d$  udaljenost između osi. Tada je:

$$I = I_S + m \cdot d^2,$$

gdje je  $m$  masa tijela.



- homogeni se štap njiše oko osi koja prolazi jednim njegovim krajem

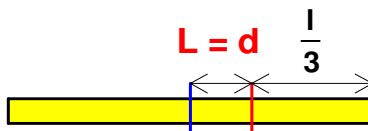


Perioda fizikalnog njihala je:

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2, \quad L = \frac{1}{2} \cdot l \\ T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2}{m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot l}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2}{m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot l}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l^2}{3 \cdot g \cdot l}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{3 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1.64 \text{ s.}$$

b) homogeni se štap njiše oko osi koja prolazi kroz točku štapa udaljenu 1/3 l od njegovog kraja



Računamo d udaljenost između osi:

$$d = \frac{1}{2} \cdot l - \frac{1}{3} \cdot l \Rightarrow d = \frac{3-2}{6} \cdot l \Rightarrow d = \frac{1}{6} \cdot l.$$

Moment tromosti I iznosi:

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{1}{6} \cdot l, \quad I_S = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 \\ I &= I_S + m \cdot d^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 + m \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot l\right)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 + \frac{1}{36} \cdot m \cdot l^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{3+1}{36} \cdot m \cdot l^2 \Rightarrow I = \frac{4}{36} \cdot m \cdot l^2 \Rightarrow I = \frac{1}{9} \cdot m \cdot l^2.$$

Perioda fizikalnog njihala je:

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{9} \cdot m \cdot l^2, \quad L = d = \frac{1}{6} \cdot l \\ T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{9} \cdot m \cdot l^2}{m \cdot g \cdot \frac{1}{6} \cdot l}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{9} \cdot m \cdot l^2}{m \cdot g \cdot \frac{1}{6} \cdot l}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot l^2}{9 \cdot g \cdot l}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{3 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1.64 \text{ s.}$$

### Vježba 068

Kolika je perioda fizikalnog njihala u obliku homogenog štapa duljine  $l = 4 \text{ m}$ , ako se njiše oko osi koja prolazi jednim njegovim krajem?

**Rezultat:** 3.28 s.

### Zadatak 069 (Tanja, gimnazija)

Uteg mase  $0.5 \text{ kg}$  visi na niti duljine  $1 \text{ m}$ . Uteg otklonimo iz položaja ravnoteže i pustimo da titra. Kolika je napetost niti u času kad uteg prolazi položajem ravnoteže brzinom  $0.7 \text{ m/s}$ ? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 069

$$m = 0.5 \text{ kg}, \quad r = 1 \text{ m}, \quad v = 0.7 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatramo ga sa stajališta

tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase  $m$  djeluje sila  $m \cdot a$  koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

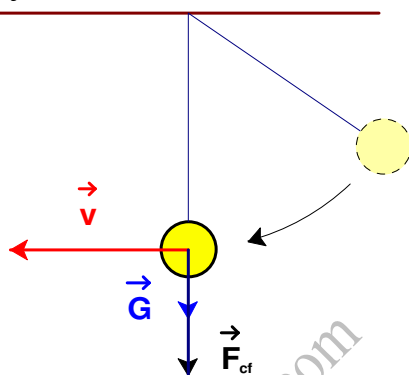
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija  $g$  kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $v$  obodna brzina, a  $r$  polumjer kružnice.



Nit napinje težina utega  $G$  i centrifugalna sila  $F_{cf}$  koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže. U času kad uteg prolazi ravnotežnim položajem, rezultatna (ukupna) je sila  $F$  jednaka zbroju težine utega  $G$  i centrifugalne sile  $F_{cf}$ :

$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F = m \cdot \left( g + \frac{v^2}{r} \right) = 0.5 \text{ kg} \cdot \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{\left( 0.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{1 \text{ m}} \right) = 5.15 \text{ N}.$$

### Vježba 069

Uteg mase 1 kg visi na niti duljine 1 m. Uteg otklonimo iz položaja ravnoteže i pustimo da titra. Kolika je napetost niti u času kad uteg prolazi položajem ravnoteže brzinom 0.7 m/s? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 10.3 N.

### Zadatak 070 (Marko, gimnazija)

Na tankoj niti visi kuglica mase 100 g. Najveća napetost koju nit može izdržati iznosi 1.96 N. Odredi najmanji kut  $\alpha$  do kojega moramo otkloniti kuglicu na niti da bi nit pukla u času kad kuglica prolazi položajem ravnoteže? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 070

$$m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}, \quad F = 1.96 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija  $g$  kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

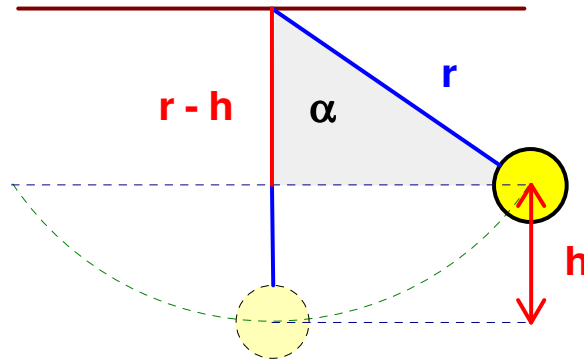
$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $v$  obodna brzina tijela, a  $r$  polumjer kružnice.

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa stalnom akceleracijom  $g$ . Za takvo gibanje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  visina sa koje tijelo počinje padati.



Iz osjenčanog pravokutnog trokuta kojemu je jedna kateta  $r-h$ , a hipotenuza  $r$  dobije se visina  $h$ :

$$\cos \alpha = \frac{r-h}{r} \Rightarrow r-h = r \cdot \cos \alpha \Rightarrow -h = r \cdot \cos \alpha - r \quad / \cdot (-1) \Rightarrow h = r - r \cdot \cos \alpha \Rightarrow h = r \cdot (1 - \cos \alpha).$$

Brzinu koju kuglica ima u času kad je na visini  $h$  od najnižeg položaja dobijemo iz formule za slobodan pad:

$$\left. \begin{array}{l} v^2 = 2 \cdot g \cdot h \\ h = r \cdot (1 - \cos \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha).$$

Budući da se kuglica giba po kružnici, tj. po kružnom luku, centripetalna sila  $F_{cp}$  jednaka je rezultantnoj sili koja se dobije kao razlika napetosti niti  $F$  i težine kuglice  $G$ :

$$F_{cp} = F - G.$$

Računamo najmanji kut  $\alpha$  do kojega moramo otkloniti kuglicu na niti da bi nit pukla u času kad kuglica prolazi položajem ravnoteže:

$$F_{cp} = F - G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = F - m \cdot g \Rightarrow \left[ v^2 = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha) \right] \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha)}{r} = F - m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha)}{r} = F - m \cdot g \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha) = F - m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{F - m \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos \alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow -\cos \alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{3}{2} \quad / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{2} - \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{3}{2} - \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} \right) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{3}{2} - \frac{1.96 \text{ N}}{2 \cdot 0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) = 59^\circ 55' 57''.$$

### Vježba 070

Na tankoj niti visi kuglica mase 200 g. Najveća napetost koju nit može izdržati iznosi 3.92 N. Odredi najmanji kut  $\alpha$  do kojega moramo otkloniti kuglicu na niti da bi nit pukla u času kad kuglica prolazi položajem ravnoteže? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $59^\circ 55' 57''$ .

### Zadatak 071 (Hrvoje, tehnička škola)

Kuglica mase 2 kg visi na nerastezljivoj niti. Nit se otkloni od vertikalne za  $60^\circ$  i pusti. Kolika je napetost niti u času prolaska kugle ravnotežnim položajem? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 071

$$m = 2 \text{ kg}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatramo ga sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase  $m$  djeluje sila  $m \cdot a$  koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Na visini  $h$  tijelo miruje pa mu je gravitacijska potencijalna energija  $E_{gp} = m \cdot g \cdot h$ , a kinetička energija  $E_k = 0$ . Kada tijelo počne padati gravitacijska potencijalna energija smanjuje se, a kinetička energija raste.

Budući da tijelo za vrijeme pada ne međudjeluje s okolinom, vrijedi zakon očuvanja energije. Ukupna mehanička energija tijela u početnom položaju jednaka je mehaničkoj energiji u bilo kojoj točki visine.

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa stalnom akceleracijom  $g$ . Za takvo gibanje vrijedi izraz

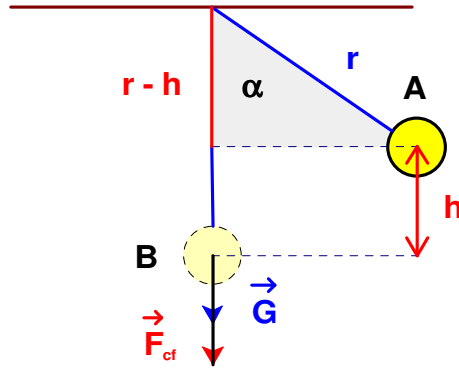
$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  visina sa koje tijelo počinje padati.

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $v$  obodna brzina tijela, a  $r$  polumjer kružnice.



Iz osjenčanog pravokutnog trokuta kojemu je jedna kateta  $r - h$ , a hipotenuza  $r$  dobije se visina  $h$ :

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{r-h}{r} \\ \alpha = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{r-h}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r-h}{r} \Rightarrow r = 2 \cdot (r-h) \Rightarrow r = 2 \cdot r - 2 \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot h = 2 \cdot r - r \Rightarrow 2 \cdot h = r \quad / : 2 \Rightarrow h = \frac{r}{2}$$

Brzinu koju kuglica ima u času kad je na visini  $h$  od najnižeg položaja dobijemo iz formule za slobodan pad:

$$\left. \begin{array}{l} v^2 = 2 \cdot g \cdot h \\ h = \frac{r}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow v^2 = g \cdot r$$

Brzinu možemo dobiti i preko energija:

U najvišoj točki (točki A) kuglica ima maksimalnu gravitacijsku potencijalnu energiju, a u najnižoj točki (točki B) maksimalnu kinetičku energiju. Zbog zakona o očuvanju energije vrijedi da je gravitacijska potencijalna energija u najvišoj točki jednaka kinetičkoj energiji u najnižoj točki:

$$\left. \begin{array}{l} E_k = E_{gp} \\ h = \frac{r}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \\ h = \frac{r}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot \frac{r}{2} \quad / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = g \cdot r$$

Nit napinje težina kuglice  $G$  i centrifugalna sila  $F_{cf}$  koja djeluje na kuglicu. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i kuglica zajedno kruže. U času kad kuglica prolazi ravnotežnim položajem, rezultantna (ukupna) je sila  $F$  jednaka zbroju težine kuglice  $G$  i centrifugalne sile  $F_{cf}$ :

$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \left[ v^2 = g \cdot r \right] \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{g \cdot r}{r} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{g \cdot r}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot g \Rightarrow F = 2 \cdot m \cdot g = 2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 39.24 \text{ N}$$

### Vježba 071

Kuglica mase 4 kg visi na nerastezljivoj niti. Nit se otkloni od vertikale za  $60^\circ$  i pusti. Kolika je napetost niti u času prolaska kugle ravnotežnim položajem? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 78.48 N

### Zadatak 072 (Goran, srednja škola)

Na niti duljine 1 m obješen je uteg mase 1 kg. Nit može izdržati silu od 11 N. Na koju se najveću visinu iznad ravnotežnog položaja može otkloniti uteg tako da nit održavamo napetom, a da pri titranju nit ne pukne? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 072

$$r = 1 \text{ m}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad F = 11 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatramo ga sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase  $m$  djeluje sila  $m \cdot a$  koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija  $g$  kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $v$  obodna brzina tijela, a  $r$  polumjer kružnice.

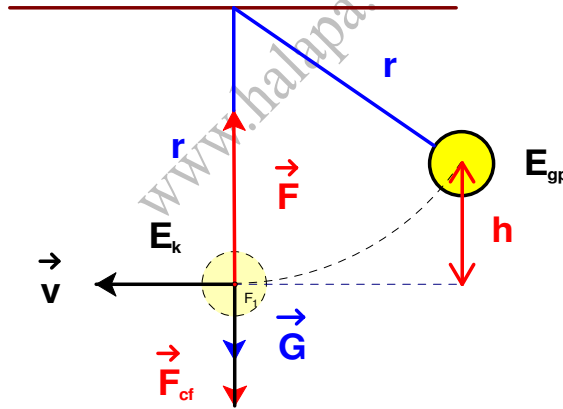
Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa stalnom akceleracijom  $g$ . Za takvo gibanje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  visina sa koje tijelo počinje padati.

1. inačica

U ovom slučaju promatramo gibanje sa stajališta sustava koji kruži zajedno s utegom.



Brzinu koju kuglica ima u času kad je na visini  $h$  od najnižeg položaja dobijemo iz formule za slobodan pad:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

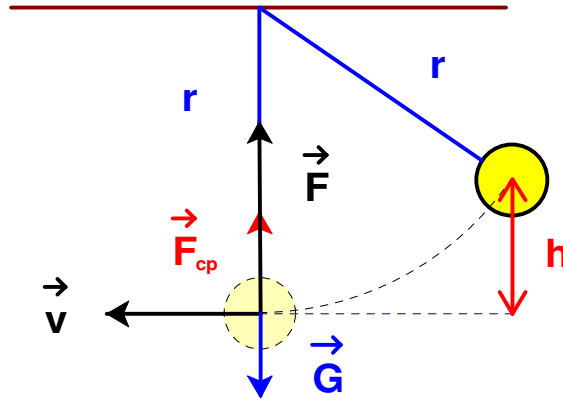
Nit napinje težina utega  $G$  i centrifugalna sila  $F_{cf}$  koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže. U času kad uteg prolazi ravnotežnim položajem, resultantna (ukupna) je sila  $F$  jednaka zbroju težine utega  $G$  i centrifugalne sile  $F_{cf}$ :

$$\begin{aligned} F &= G + F_{cf} \Rightarrow F_{cf} = F - G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = F - m \cdot g \Rightarrow \left[ v^2 = 2 \cdot g \cdot h \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{r} &= F - m \cdot g \quad / \cdot \frac{r}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{r}{2 \cdot m \cdot g} \cdot (F - m \cdot g) \Rightarrow h = \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{F}{m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{m \cdot g} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow h &= \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{F}{m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{m \cdot g} \right) \Rightarrow h = \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{F}{m \cdot g} - 1 \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1 \text{ m}}{2} \cdot \left( \frac{11 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} - 1 \right) = 0.0607 \text{ m} = 6.07 \text{ cm}.$$

2. inačica

U ovom slučaju promatramo gibanje sa stajališta sustava u kojem uteg kruži.



Brzinu koju kuglica ima u času kad je na visini  $h$  od najnižeg položaja dobijemo iz formule za slobodan pad:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

Budući da se uteg giba po kružnici, tj. po kružnom luku, centripetalna sila  $F_{cp}$  jednaka je rezultantnoj sili koja se dobije kao razlika napetosti niti  $F$  i težine utega  $G$ :

$$F_{cp} = F - G.$$

Računamo najveću visinu  $h$  do koje se uteg može otkloniti tako da nit održavamo napetom, a da pri titranju nit ne pukne:

$$\begin{aligned} F_{cf} = F - G &\Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = F - m \cdot g \Rightarrow \left[ v^2 = 2 \cdot g \cdot h \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{r} = F - m \cdot g &\Rightarrow h = \frac{r}{2 \cdot m \cdot g} \cdot (F - m \cdot g) \Rightarrow h = \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{F}{m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{m \cdot g} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow h = \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{F}{m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{m \cdot g} \right) &\Rightarrow h = \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{F}{m \cdot g} - 1 \right) = \\ = \frac{1 \text{ m}}{2} \cdot \left( \frac{11 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} - 1 \right) &= 0.0607 \text{ m} = 6.07 \text{ cm}. \end{aligned}$$

### Vježba 072

Na niti duljine 2 m obješen je uteg mase 1 kg. Nit može izdržati silu od 11 N. Na koju se najveću visinu iznad ravnotežnog položaja može otkloniti uteg tako da nit održavamo napetom, a da pri titranju nit ne pukne? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 12.13 cm.

### Zadatak 073 (Josip, srednja škola)

Koliko je naprezanje čelične žice duljine 1 m kada se rastegne 5 mm? (Youngov modul elastičnosti za čelik  $E = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ )

**Rješenje 073**

$$l = 1 \text{ m}, \quad \Delta l = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}, \quad E = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \quad p = ?$$

Produljenje tijela pri rastezanju je izravno razmjerno vanjskoj sili i duljini tijela, a obrnuto razmjerno ploštini poprečnog presjeka tijela:

$$\Delta l \sim \frac{F \cdot l}{S}$$

Zakovitost linearne elastične deformacije tijela zovemo Hookeov zakon. Za deformaciju elastičnog tijela na vlak vrijedi Hookeov zakon:

Relativno produljenje tijela razmjerno je napetosti.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot p,$$

gdje je  $\frac{\Delta l}{l}$  relativno produljenje (produljenje po jedinici duljine),  $p = \frac{F}{S}$  napetost (omjer sile i površine presjeka tijela na koje sila djeluje), E modul elastičnosti sredstva.

Naprezanje čelične žice iznosi:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot p \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot p \cdot l \cdot E \Rightarrow p = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot \frac{0.005 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1.05 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 1050 \text{ MPa}.$$

**Vježba 073**

Koliko je naprezanje čelične žice duljine 2 m kada se rastezne 10 mm? (Youngov modul elastičnosti za čelik  $E = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ )

**Rezultat:** 1050 MPa.

**Zadatak 074 (Josip, srednja škola)**

Jedno matematičko njihalo ima titrajno vrijeme 4 s, a drugo 3 s. Koliko je titrajno vrijeme matematičkog njihala čija je duljina jednaka zbroju duljina ta dva njihala?

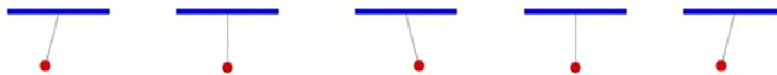
**Rješenje 074**

$$T_1 = 4 \text{ s}, \quad T_2 = 3 \text{ s}, \quad l_1, \quad l_2, \quad l = l_1 + l_2, \quad T = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja niže koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

**jedan titraj matematičkog njihala**

Prvo matematičko njihalo ima titrajno vrijeme  $T_1$  i duljinu  $l_1$  pa vrijedi:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \Rightarrow T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_1}{g} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow \frac{l_1}{g} = \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2}.$$

Drugo matematičko njihalo ima titrajno vrijeme  $T_2$  i duljinu  $l_2$  pa vrijedi:

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_2}{g} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow \frac{l_2}{g} = \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2}.$$

Titrajno vrijeme matematičkog njihala čija je duljina jednaka zbroju duljina oba njihala iznosi:

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} l &= l_1 + l_2 \\ T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g} + \frac{l_2}{g}} \Rightarrow \left[ \frac{l_1}{g} = \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2}, \frac{l_2}{g} = \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \right] \Rightarrow \\
\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} + \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2}{4 \cdot \pi^2}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}{\sqrt{4 \cdot \pi^2}} \Rightarrow \\
\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = \sqrt{(4 \text{ s})^2 + (3 \text{ s})^2} = 5 \text{ s.}
\end{aligned}$$

### Vježba 074

Jedno matematičko njihalo ima titrajno vrijeme 6 s, a drugo 8 s. Koliko je titrajno vrijeme matematičkog njihala čija je duljina jednaka zbroju duljina ta dva njihala?

**Rezultat:** 10 s.

### Zadatak 075 (Matija, gimnazija)

Matematičko njihalo služi kao sat na način da mu je perioda njihanja 2 s. Želimo duljinu njihala podesiti tako da period njihala bude 1 s. Kolika mora biti nova duljina njihala? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 075

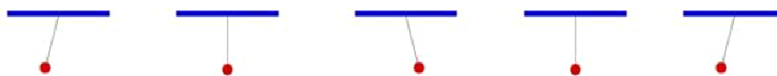
$$T = 2 \text{ s}, \quad l - \text{duljina njihala perioda } T, \quad T_1 = 1 \text{ s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad x = ?$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njviše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je  $l$  duljina njihala, a  $g$  akceleracija slobodnog pada.

### jedan titraj matematičkog njihala



#### 1. inačica

Iz sustava jednadžbi dobije se nova duljina  $x$  niti matematičkog njihala:

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \\ T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{x}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{x}{g} \cdot \frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{x}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{x}{l}} \cdot 1 \Rightarrow \left( \frac{T_1}{T} \right)^2 = \frac{x}{l} \cdot 1 \Rightarrow x = l \cdot \left( \frac{T_1}{T} \right)^2 = l \cdot \left( \frac{1 \text{ s}}{2 \text{ s}} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot l.
\end{aligned}$$

Duljina niti njihala mora se skratiti četiri puta.

#### 2. inačica

Iz formule

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

može se zaključiti da je perioda T razmjerna s kvadratnim korijenom (drugim korijenom) duljine l niti njihala

$$T \sim \sqrt{l}.$$

Ako se duljina niti poveća 4 puta, perioda se poveća 2 puta.

Ako se duljina niti poveća 9 puta, perioda se poveća 3 puta.

Ako se duljina niti smanji 4 puta, perioda se smanji 2 puta.

Ako se duljina niti smanji 9 puta, perioda se smanji 3 puta. Itd.

Perioda matematičkog njihala je  $T = 2$  s. Duljinu niti njihala podesili smo tako da perioda njihala bude  $T_1 = 1$  s. Budući da se perioda smanjila 2 puta, duljina niti njihala mora se smanjiti 4 puta.

### Vježba 075

Matematičko njihalo služi kao sat na način da mu je perioda njihanja 3 s. Želimo duljinu njihala podesiti tako da perioda njihala bude 1 s. Kolika mora biti nova duljina njihala? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

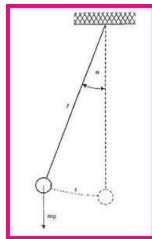
**Rezultat:** Duljina niti njihala mora se skratiti devet puta.

### Zadatak 076 (Armin, elektrotehnička škola)

Izračunati duljinu matematičkog njihala koje se, na mjestu gdje je  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , njiše periodom od 4 s.

### Rješenje 076

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T = 4 \text{ s}, \quad l = ?$$



Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Duljina matematičkog njihala iznosi:

$$\begin{aligned} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} &\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} / 2 \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g} / \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} = \\ &= \frac{(4 \text{ s})^2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4 \cdot \pi^2} = 3.976 \text{ m}. \end{aligned}$$

### Vježba 076

Izračunati duljinu matematičkog njihala koje se, na mjestu gdje je  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , njiše periodom od 5 s.

**Rezultat:** 6.212 m.

### Zadatak 077 (Armin, elektrotehnička škola)

Ako je čovjeku srčani puls 75, koliki su period i frekvencija otkucaja njegovog srca?

### Rješenje 077

$$n = 75, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad T = ?, \quad v = ?$$

Frekvencija v je broj ophoda (ili titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (ili titraja). Između frekvencije v i periode T postoji veza:



$$v \cdot T = 1 \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{T} \\ T = \frac{1}{v} \end{cases}$$

Budući da je čovjeku srčani puls 75 otkucaja u minuti, frekvencija  $v$  otkucaja njegovog srca iznosi:

$$v = \frac{n}{t} = \frac{75}{60 \text{ s}} = 1.25 \frac{1}{s} = 1.25 \text{ Hz.}$$

Perioda  $T$  otkucaja njegovog srca je:

$$T = \frac{1}{v} \Rightarrow T = \frac{t}{n} = \frac{60 \text{ s}}{75} = 0.8 \text{ s.}$$

### Vježba 077

Ako je čovjeku srčani puls 90, kolika je frekvencija otkucaja njegovog srca?

**Rezultat:** 1.5 Hz.

### Zadatak 078 (Mihaela, srednja škola)

Zvučni val valne duljine 75 cm što ga u zraku emitira glazbena vilica širi se iz zraka u vodu. Kolika je valna duljina tog zvučnog vala u vodi ako je brzina širenja zvuka u zraku 330 m/s, a u vodi 1450 m/s?

#### Rješenje 078

$$\lambda_1 = 75 \text{ cm} = 0.75 \text{ m}, \quad v_1 = 330 \text{ m/s}, \quad v_2 = 1450 \text{ m/s}, \quad \lambda_2 = ?$$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. To je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$v = \lambda \cdot v$$

gdje je  $v$  brzina širenja vala,  $\lambda$  valna duljina,  $v$  frekvencija.

Pri prijelazu svjetlosti (vala) iz jednog optičkog sredstva u drugo frekvencija ostaje nepromijenjena, a mijenja se valna duljina i brzina svjetlosti (vala).

Duljina vala zvučnog vala iznosi:



$$\left. \begin{array}{l} v_1 = \lambda_1 \cdot v \\ v_2 = \lambda_2 \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1 \cdot v}{\lambda_2 \cdot v} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1 \cdot v}{\lambda_2 \cdot v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow v_1 \cdot \lambda_2 = v_2 \cdot \lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{v_2 \cdot \lambda_1}{v_1} = \frac{1450 \frac{m}{s} \cdot 0.75 \text{ m}}{330 \frac{m}{s}} = 3.3 \text{ m.}$$

### Vježba 078

Zvučni val valne duljine 150 cm što ga u zraku emitira glazbena vilica širi se iz zraka u vodu. Kolika je valna duljina tog zvučnog vala u vodi ako je brzina širenja zvuka u zraku 330 m/s, a u vodi 1450 m/s?

**Rezultat:** 6.6 m.

### Zadatak 079 (Zoki, maturant srednje škole)

O oprugu čija je konstanta  $1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  obješena je kuglica mase 10 g koja harmonijski oscilira s amplitudom  $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Odredite elongaciju kuglice nakon 0.5 s ako su oscilacije neamortizirane i ako je početna faza nula. Masu opruge i dimenzije kuglice zanemariti.

#### Rješenje 079

$$k = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, \quad m = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}, \quad A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad t = 0.5 \text{ s}, \quad \varphi_0 = 0, \quad x = ?$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak  $x$  i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku  $x$ , smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra.

Harmoničko titranje opisuje se trigonometrijskim funkcijama sinus i kosinus.

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

gdje je

- $x$  – elongacija ili pomak tijela iz ravnotežnog položaja
- $A$  – amplituda ili maksimalna elongacija
- $\omega$  – kružna frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- $k$  – konstanta opruge
- $m$  – masa tijela što titra na opruzi
- $t$  – vrijeme titranja
- $\varphi_0$  – početna faza.

Najprije izračunamo kružnu frekvenciju:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1 \frac{N}{m}}{0.01 \text{ kg}}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 10 \frac{1}{\text{s}}.$$

Položaj (elongacija) kuglice nakon vremena  $t$  iznosi:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \sin\left(10 \frac{1}{\text{s}} \cdot 0.5 \text{ s} + 0\right) = -0.01918 \text{ m} = -1.918 \text{ cm} = -19.18 \text{ mm}.$$

**Pozor!**

Pri računanju vrijednosti trigonometrijske funkcije treba pozornost obratiti na stanje (**MOD**) u kojem radi računalo. Treba ga koristiti u radianima (**RAD**).

### Vježba 079

O oprugu čija je konstanta  $1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  obješena je kuglica mase 1 dag koja harmonijski oscilira s amplitudom 2 cm. Odredite elongaciju kuglice nakon 0.5 s ako su oscilacije neamortizirane i ako je početna faza nula. Masu opruge i dimenzije kuglice zanemariti.

**Rezultat:**     – 1.918 cm.

### Zadatak 080 (Zoki, maturant srednje škole)

Posuda s utezima obješena je na opruzi i titra s periodom 0.5 s. Dodavanjem utega u posudu perioda titranja se promijeni na 0.6 s. Koliko se produljila opruga dodavanjem utega? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

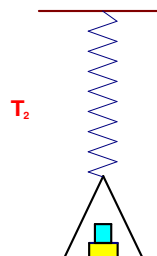
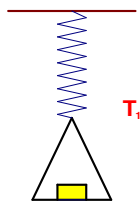
### Rješenje 080

$$T_1 = 0.5 \text{ s}, \quad T_2 = 0.6 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta l = ?$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak  $x$  i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku  $x$ , smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra.



Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njije koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je  $l$  duljina njihala, a  $g$  akceleracija slobodnog pada.

Posudu s utezima obješenu na opruzi možemo poistovjetiti s matematičkim njihalom koje titra uz male amplitude. Računamo duljine  $l_1$  i  $l_2$  opruge kada titra s periodama  $T_1$  i  $T_2$ :

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \cdot /^2 \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \cdot /^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_1}{g} \\ T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_2}{g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_1}{g} \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \\ T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_2}{g} \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g \\ l_2 = \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g \end{array} \right\}.$$

Nakon dodavanja utega produljenje opruge iznosi:

$$\Delta l = l_2 - l_1 \Rightarrow \Delta l = \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g - \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g \Rightarrow \Delta l = (T_2^2 - T_1^2) \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} =$$

$$= \left( (0.6 \text{ s})^2 - (0.5 \text{ s})^2 \right) \cdot \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4 \cdot \pi^2} = 0.0273 \text{ m} = 2.73 \text{ cm}.$$

### Vježba 080

Posuda s utezima obješena je na opruzi i titra s periodom 0.4 s. Dodavanjem utega u posudu perioda titranja se promijeni na 0.5 s. Koliko se produljila opruga dodavanjem utega? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 2.24 cm.