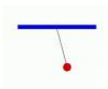
Zadatak 061 (Sanja, gimnazija)

Kolika je akceleracija slobodnog pada na ekvatoru ako je sekundno njihalo dugo 99.103 cm?

Rješenje 061

l = 99.103 cm, T = 2 s, g = ?

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest



$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Jedan njihaj sekundnog njihala traje 1 s, a jedan potpuni titraj (dva njihaja = period) traje T = 2 s. Sekundno njihalo jest njihalo sa poluperiodom 1 s, a njegovo titrajno vrijeme (period) T = 2s.
Iz izraza za period matematičkog njihala dobije se akceleracija slobodnog pada na ekvatoru:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \; /^{2} \Rightarrow T^{2} = 4 \cdot \pi^{2} \cdot \frac{l}{g} \; / \cdot g \Rightarrow g \cdot T^{2} = 4 \cdot \pi^{2} \cdot l \Rightarrow g = \frac{4 \cdot \pi^{2} \cdot l}{T^{2}} =$$

$$= \frac{4 \cdot \pi^{2} \cdot 99.103 \; cm}{(2 \; s)^{2}} = 978.107 \; \frac{cm}{s^{2}}.$$

Vježba 061

Kolika je akceleracija slobodnog pada na mjestu gdje je sekundno njihalo dugo 100 cm?

Rezultat: $986.96 \; \frac{cm}{s^{2}}.$

Zadatak 062 (Sanja, gimnazija)

Kolika je duljina sekundnoga matematičkog njihala? (g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 062

T = 2 s, g = 9.81 m/s^2, l = ?

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Jedan njihaj sekundnog njihala traje 1 s, a jedan potpuni titraj (dva njihaja = period) traje T = 2 s. Sekundno njihalo jest njihalo sa poluperiodom 1 s, a njegovo titrajno vrijeme (period) T = 2s.
Iz izraza za period matematičkog njihala dobije se njegova duljina:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \; /^{2} \Rightarrow T^{2} = 4 \cdot \pi^{2} \cdot \frac{l}{g} \; / \cdot g \Rightarrow g \cdot T^{2} = 4 \cdot \pi^{2} \cdot l \Rightarrow l = \frac{g \cdot T^{2}}{4 \cdot \pi^{2}} =$$

$$= \frac{9.81 \; \frac{m}{s^{2}} \cdot (2 \; s)^{2}}{4 \cdot \pi^{2}} = 0.9939608 \; m \approx 1 \; m.$$

Vježba 062

Kolika je duljina sekundnog njihala na mjestu gdje je g = 980 cm/s^2?

Rezultat: 0.9929 m.

Zadatak 063 (Ana, gimnazija)

Valovi se u nekom sredstvu šire brzinom 3.6 m/s uz frekvenciju 6 Hz. Kolika je razlika u fazi dviju točaka koje su međusobno udaljene 30 cm?

Rješenje 063

v = 3.6 m/s, $\quad \nu$ = 6 Hz, $\quad \Delta x$ = 30 cm = 0.3 m, $\quad \Delta\varphi$ = ?

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$\lambda = \mathrm{v} \cdot T \quad , \quad \lambda = \frac{\mathrm{v}}{\nu},$$

gdje je λ valna duljina, T period titraja, ν frekvancija, a v brzina širenja vala.

Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti x_1 i x_2 od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}.$$

Razlika u fazi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{\mathrm{v}}{\nu} \\ \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\frac{\mathrm{v}}{\nu}} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x \cdot \nu}{\mathrm{v}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{0.3\ m \cdot 6\ \frac{1}{s}}{3.6\ \frac{m}{s}} = \pi.$$

Vježba 063

Valovi se u nekom sredstvu šire brzinom 7.2 m/s uz frekvenciju 6 Hz. Kolika je razlika u fazi dviju točaka koje su međusobno udaljene 60 cm?

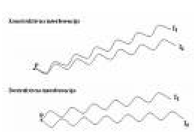
Rezultat: π.

Zadatak 064 (Ana, gimnazija)

Razlika hoda dvaju valova koji interferiraju iznosi 0.6 · λ. Kolika je razlika faza valova (izražena u stupnjevima)?

Rješenje 064

$\Delta x = 0.6 \cdot \lambda, \quad \Delta\varphi$ = ?



Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti x_1 i x_2 od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}.$$

Razlika u fazi iznosi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{0.6 \cdot \lambda}{\lambda} = 1.2 \cdot \pi = \left[\pi\ rad = 180^0\right] = 1.2 \cdot 180^0 = 216^0.$$

Vježba 064

Razlika hoda dvaju valova koji interferiraju iznosi 0.5 · λ. Kolika je razlika faza valova (izražena u stupnjevima)?

Rezultat: 180^0.

Zadatak 065 (Viki, gimnazija)

Val se širi u pravcu brzinom 60 m/s. Frekvencija vala je 8 Hz. Odredi (u stupnjevima i radijanima) razliku u fazi između čestice koja je izvor vala i čestice koja je 5 m udaljena od izvora.

Rješenje 065

v = 60 m/s, $\quad \nu$ = 8 Hz, $\quad x_1$ = 0 m, $\quad x_2$ = 5 m, $\quad \Delta\varphi$ = ?

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$\lambda = v \cdot T \quad , \quad \lambda = \frac{v}{\nu},$$

gdje je λ valna duljina, T period titraja, ν frekvencija, a v brzina širenja vala.
Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti x_1 i x_2 od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}.$$

Razlika u fazi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{v}{\nu} \\ \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{x_2 - x_1}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\frac{v}{\nu}} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\left(x_2 - x_1\right) \cdot \nu}{v} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{(5\ m - 0\ m) \cdot 8\ \frac{1}{s}}{60\ \frac{m}{s}} =$$

$$= \frac{80}{60} \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \pi = 4.189\ rad = \left[\pi\ rad = 180^0\right] = \frac{4}{3} \cdot 180^0 = 240^0.$$

Vježba 065

Val se širi u pravcu brzinom 30 m/s. Frekvencija vala je 4 Hz. Odredi (u stupnjevima i radijanima) razliku u fazi između čestice koja je izvor vala i čestice koja je 5 m udaljena od izvora.

Rezultat: $4.189\ rad = 240^0.$

Zadatak 066 (Viki, gimnazija)

Koliku razliku u fazi imaju dvije točke koje su 2 m i 8 m udaljene od izvora vala, ako se kroz njih širi val brzinom 300 m/s. Vrijeme jednog titraja jest 0.02 s.

Rješenje 066

x_1 = 2 m, x_2 = 8 m, v = 300 m/s, T = 0.02 s, Δφ = ?

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$\lambda = v \cdot T \quad , \quad \lambda = \frac{v}{\nu},$$

gdje je λ valna duljina, T period titraja, ν frekvencija, a v brzina širenja vala.
Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti x_1 i x_2 od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}.$$

Razlika u fazi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = v \cdot T \\ \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{x_2 - x_1}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{v \cdot T} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{8\ m - 2\ m}{300\ \frac{m}{s} \cdot 0.02\ s} = 2 \cdot \pi.$$

Vježba 066

Koliku razliku u fazi imaju dvije točke koje su 3 m i 9 m udaljene od izvora vala, ako se kroz njih širi val brzinom 300 m/s. Vrijeme jednog titraja jest 0.02 s.

Rezultat: $2 \cdot \pi.$

Zadatak 067 (Ante, Visoka škola za sigurnost na radu)

Harmonički oscilator ima masu 300 kg i amplitudu 3 mm. Kolika je frekvencija ako je ukupna energija 2 J?

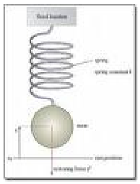
Rješenje 067

m = 300 kg, A = 3 mm = 0.003 m, E = 2 J, ν = ?

Titranje uzrokovano elastičnom silom F = – k · s, zove se jednostavno harmoničko titranje, a sustav koji titra jednostavni harmonički oscilator. Energija tijela koje harmonički titra je

$$E = 2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2,$$

gdje je m masa harmoničkog oscilatora, ν frekvencija, a A amplituda.



Frekvencija je:

$$E = 2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2 \Rightarrow \nu^2 = \frac{E}{2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot A^2} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \nu = \sqrt{\frac{E}{2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot A^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{\pi \cdot A} \cdot \sqrt{\frac{E}{2 \cdot m}} = \frac{1}{\pi \cdot 0.003\ m} \cdot \sqrt{\frac{2\ J}{2 \cdot 300\ kg}} = 6.13\ \frac{1}{s} = 6.13\ Hz.$$

Vježba 067

Harmonički oscilator ima masu 600 kg i amplitudu 3 mm. Kolika je frekvencija ako je ukupna energija 4 J?

Rezultat: 6.13 Hz.

Zadatak 068 (Tea, studentica)

Koliki je period fizikalnog njihala u obliku homogenog štapa duljine l = 1 m, ako se njiše oko osi koja prolazi:

a) jednim njegovim krajem

b) kroz točku štapa udaljenu 1/3 od njegovog kraja? ($g = 9.81\ m/s^2$)

Rješenje 068

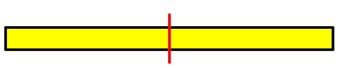
$l = 1$ m, $g = 9.81\ m/s^2$, $T = ?$

Fizikalno njihalo je svako tijelo koje se može njihati pod utjecajem težine tijela. Period fizikalnog njihala malih amplituda je

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L}},$$

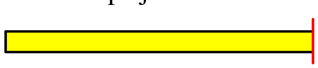
gdje je I moment tromosti, m masa i L udaljenost osi od središta mase (težišta) njihala.

Moment tromosti štapa duljine l s obzirom na os koja prolazi njegovom sredinom i okomita je na njegovu dužinu iznosi:



$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2.$$

Moment tromosti štapa duljine l s obzirom na os koja prolazi jednim njegovim krajem i okomita je na dužinu štapa je:



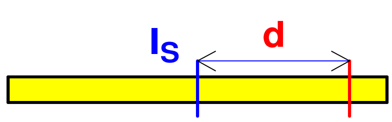
$$I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2.$$

Poučak o paralelnim osima

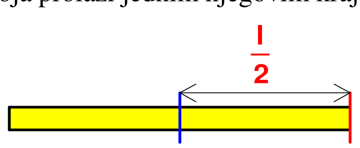
Poučak o paralelnim osima omogućuje računanje momenta tromosti za bilo koju paralelnu os ako je poznat moment tromosti s obzirom na os kroz središte mase. Neka je I_S moment tromosti za os kroz središte mase, dok je I moment tromosti s obzirom na paralelnu os, a d udaljenost između osi. Tada je:

$$I = I_S + m \cdot d^2,$$

gdje je m masa tijela.



a) homogeni se štap njiše oko osi koja prolazi jednim njegovim krajem

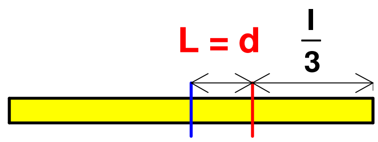


Period fizikalnog njihala je:

$$\left.\begin{array}{l} I=\frac{1}{3}\cdot m\cdot l^{2} \;\; , \;\; L=\frac{1}{2}\cdot l \\ T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{m\cdot g\cdot L}} \end{array}\right\} \Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot m\cdot l^{2}}{m\cdot g\cdot\frac{1}{2}\cdot l}} \Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot m\cdot l^{2}}{m\cdot g\cdot\frac{1}{2}\cdot l}} \Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{2\cdot l^{2}}{3\cdot g\cdot l}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{2\cdot l}{3\cdot g}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 1\,m}{3\cdot 9.81\,\frac{m}{s^{2}}}}=1.64\ s.$$

b) homogeni se štap njiše oko osi koja prolazi kroz točku štapa udaljenu 1/3 l od njegovog kraja



Računamo d udaljenost između osi:

$$d=\frac{1}{2}\cdot l-\frac{1}{3}\cdot l \Rightarrow d=\frac{3-2}{6}\cdot l \Rightarrow d=\frac{1}{6}\cdot l.$$

Moment tromosti I iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} d=\frac{1}{6}\cdot l \;\; , \;\; I_{S}=\frac{1}{12}\cdot m\cdot l^{2} \\ I=I_{S}+m\cdot d^{2} \end{array}\right\} \Rightarrow I=\frac{1}{12}\cdot m\cdot l^{2}+m\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot l\right)^{2} \Rightarrow I=\frac{1}{12}\cdot m\cdot l^{2}+\frac{1}{36}\cdot m\cdot l^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{3+1}{36}\cdot m\cdot l^{2} \Rightarrow I=\frac{4}{36}\cdot m\cdot l^{2} \Rightarrow I=\frac{1}{9}\cdot m\cdot l^{2}.$$

Period fizikalnog njihala je:

$$\left.\begin{array}{l} I=\frac{1}{9}\cdot m\cdot l^{2} \;\; , \;\; L=d=\frac{1}{6}\cdot l \\ T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{m\cdot g\cdot L}} \end{array}\right\} \Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\cdot m\cdot l^{2}}{m\cdot g\cdot\frac{1}{6}\cdot l}} \Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\cdot m\cdot l^{2}}{m\cdot g\cdot\frac{1}{6}\cdot l}} \Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{6\cdot l^{2}}{9\cdot g\cdot l}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{2\cdot l}{3\cdot g}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 1\,m}{3\cdot 9.81\,\frac{m}{s^{2}}}}=1.64\ s.$$

Vježba 068

Koliki je period fizikalnog njihala u obliku homogenog štapa duljine l = 4 m, ako se njiše oko osi koja prolazi jednim njegovim krajem?

Rezultat: 3.28 s.

Zadatak 069 (Tanja, gimnazija)

Uteg mase 0.5 kg visi na niti duljine 1 m. Uteg otklonimo iz položaja ravnoteže i pustimo da titra. Kolika je napetost niti u času kad uteg prolazi položajem ravnoteže brzinom 0.7 m/s? (g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 069

m = 0.5 kg, r = 1 m, v = 0.7 m/s, g = 9.81 m/s^2, F = ?

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatramo ga sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila m · a koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

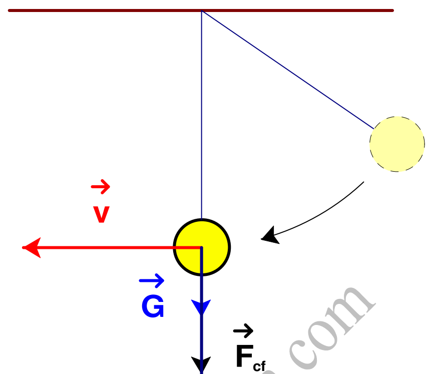
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna brzina, a r polumjer kružnice.



Nit napinje težina utega G i centrifugalna sila F_{cf} koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže. U času kad uteg prolazi ravnotežnim položajem, rezultantna (ukupna) je sila F jednaka zbroju težine utega G i centrifugalne sile F_{cf}:

$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F = m \cdot \left(g + \frac{v^2}{r} \right) = 0.5\ kg \cdot \left(9.81\ \frac{m}{s^2} + \frac{\left(0.7\ \frac{m}{s} \right)^2}{1\ m} \right) = 5.15\ N.$$

Vježba 069

Uteg mase 1 kg visi na niti duljine 1 m. Uteg otklonimo iz položaja ravnoteže i pustimo da titra. Kolika je napetost niti u času kad uteg prolazi položajem ravnoteže brzinom 0.7 m/s? ($g = 9.81\ m/s^2$)

Rezultat: 10.3 N.

Zadatak 070 (Marko, gimnazija)

Na tankoj niti visi kuglica mase 100 g. Najveća napetost koju nit može izdržati iznosi 1.96 N. Odredi najmanji kut α do kojega moramo otkloniti kuglicu na niti da bi nit pukla u času kad kuglica prolazi položajem ravnoteže? ($g = 9.81\ m/s^2$)

Rješenje 070

m = 100 g = 0.1 kg, F = 1.96 N, $g = 9.81\ m/s^2$, α = ?

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

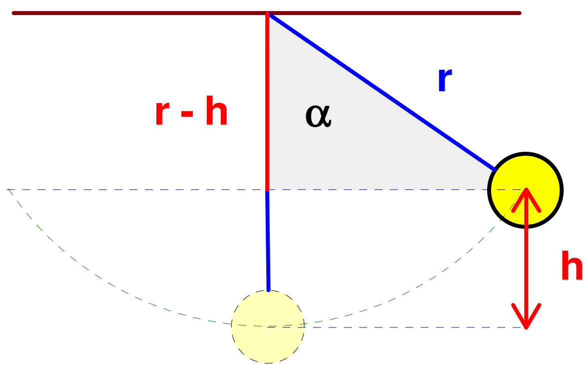
Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna brzina tijela, a r polumjer kružnice.
Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa stalnom alceleracijom g. Za takvo gibanje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h visina sa koje tijelo počinje padati.



Iz osjenčanog pravokutnog trokuta kojemu je jedna kateta r – h, a hipotenuza r dobije se visina h:

$$\cos\alpha = \frac{r-h}{r} \Rightarrow r - h = r \cdot \cos\alpha \Rightarrow -h = r \cdot \cos - r \;/\cdot(-1) \Rightarrow h = r - r \cdot \cos\alpha \Rightarrow h = r \cdot (1 - \cos\alpha).$$

Brzinu koju kuglica ima u času kad je na visini h od najnižeg položaja dobijemo iz formule za slobodan pad:

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = 2 \cdot g \cdot h \\ h = r \cdot (1 - \cos\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos\alpha).$$

Budući da se kuglica giba po kružnici, tj. po kružnom luku, centripetalna sila F_{cp} jednaka je rezultantnoj sili koja se dobije kao razlika napetosti niti F i težine kuglice G:

$$F_{cp} = F - G.$$

Računamo najmanji kut α do kojega moramo otkloniti kuglicu na niti da bi nit pukla u času kad kuglica prolazi položajem ravnoteže:

$$F_{cp} = F - G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = F - m \cdot g \Rightarrow \left[v^2 = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos\alpha) \right] \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos\alpha)}{r} = F - m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos\alpha)}{r} = F - m \cdot g \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot (1 - \cos\alpha) = F - m \cdot g \;/\cdot \frac{1}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\alpha = \frac{F - m \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow 1 - \cos\alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow 1 - \cos\alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos\alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow -\cos\alpha = \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} - \frac{3}{2} \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{2} - \frac{F}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{2} - \frac{F}{2 \cdot m \cdot g}\right) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{2} - \frac{1.96\ N}{2 \cdot 0.1\ kg \cdot 9.81\ \frac{m}{s^2}}\right) = 59^0\ 55'57''.$$

Vježba 070

Na tankoj niti visi kuglica mase 200 g. Najveća napetost koju nit može izdržati iznosi 3.92 N. Odredi najmanji kut α do kojega moramo otkloniti kuglicu na niti da bi nit pukla u času kad kuglica prolazi položajem ravnoteže? ($g = 9.81\ m/s^2$)

Rezultat: 59° 55' 57".

Zadatak 071 (Hrvoje, tehnička škola)

Kuglica mase 2 kg visi na nerastezljivoj niti. Nit se otkloni od vertikale za 60° i pusti. Kolika je napetost niti u času prolaska kugle ravnotežnim položajem ? ($g = 9.81\ m/s^2$)

Rješenje 071

$m = 2$ kg, $\alpha = 60°$, $g = 9.81\ m/s^2$, $F = ?$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatramo ga sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Na visini h tijelo miruje pa mu je gravitacijska potencijalna energija $E_{gp} = m \cdot g \cdot h$, a kinetička energija $E_k = 0$. Kada tijelo počne padati gravitacijska potencijalna energija smanjuje se, a kinetička energija raste.
Budući da tijelo za vrijeme pada ne međudjeluje s okolinom, vrijedi zakon očuvanja energije. Ukupna mehanička energija tijela u početnom položaju jednaka je mehaničkoj energiji u bilo kojoj točki visine.
Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa stalnom alceleracijom g. Za takvo gibanje vrijedi izraz

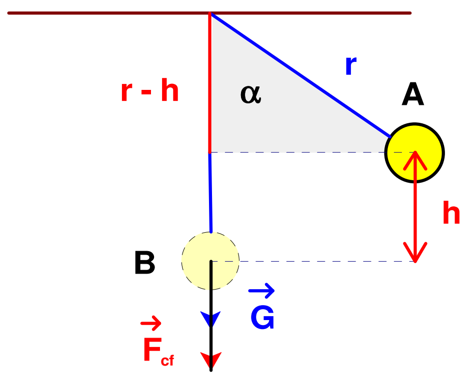
$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h visina sa koje tijelo počinje padati.

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna brzina tijela, a r polumjer kružnice.



Iz osjenčanog pravokutnog trokuta kojemu je jedna kateta r – h, a hipotenuza r dobije se visina h:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{r-h}{r} \\ \alpha = 60^0\end{array}\right\} \Rightarrow \cos 60^0 = \frac{r-h}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r-h}{r} \Rightarrow r = 2\cdot(r-h) \Rightarrow r = 2\cdot r - 2\cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot h = 2\cdot r - r \Rightarrow 2\cdot h = r \ /:2 \Rightarrow h = \frac{r}{2}.$$

Brzinu koju kuglica ima u času kad je na visini h od najnižeg položaja dobijemo iz formule za slobodan pad:

$$\left.\begin{array}{l}v^2 = 2\cdot g\cdot h \\ h = \frac{r}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow v^2 = 2\cdot g\cdot\frac{r}{2} \Rightarrow v^2 = 2\cdot g\cdot\frac{r}{2} \Rightarrow v^2 = g\cdot r.$$

Brzinu možemo dobiti i preko energija:
U najvišoj točki (točki A) kuglica ima maksimalnu gravitacijsku potencijalnu energiju, a u najnižoj točki (točki B) maksimalnu kinetičku energiju. Zbog zakona o očuvanju energije vrijedi da je gravitacijska potencijalna energija u najvišoj točki jednaka kinetičkoj energiji u najnižoj točki:

$$\left.\begin{array}{l}E_k = E_{gp} \\ h = \frac{r}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = m\cdot g\cdot h \\ h = \frac{r}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = m\cdot g\cdot\frac{r}{2} \ /\cdot\frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = g\cdot r.$$

Nit napinje težina kuglice G i centrifugalna sila F_{cf} koja djeluje na kuglicu. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i kuglica zajedno kruže. U času kad kuglica prolazi ravnotežnim položajem, rezultantna (ukupna) je sila F jednaka zbroju težine kuglice G i centrifugalne sile F_{cf}:

$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F = m\cdot g + m\cdot\frac{v^2}{r} \Rightarrow \left[v^2 = g\cdot r\right] \Rightarrow F = m\cdot g + m\cdot\frac{g\cdot r}{r} \Rightarrow F = m\cdot g + m\cdot\frac{g\cdot \cancel{r}}{\cancel{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m\cdot g + m\cdot g \Rightarrow F = 2\cdot m\cdot g = 2\cdot 2\ kg\cdot 9.81\ \frac{m}{s^2} = 39.24\ N.$$

Vježba 071

Kuglica mase 4 kg visi na nerastezljivoj niti. Nit se otkloni od vertikale za 60° i pusti. Kolika je napetost niti u času prolaska kugle ravnotežnim položajem ? (g = 9.81 m/s^2)

Rezultat: 78.48 N

Zadatak 072 (Goran, srednja škola)

Na niti duljine 1 m obješen je uteg mase 1 kg. Nit može izdržati silu od 11 N. Na koju se najveću visinu iznad ravnotežnog položaja može otkloniti uteg tako da nit održavamo napetom, a da pri titranju nit ne pukne? (g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 072

r = 1 m, m = 1 kg, F = 11 N, g = 9.81 m/s^2, h = ?

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatramo ga sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila m · a koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna brzina tijela, a r polumjer kružnice.

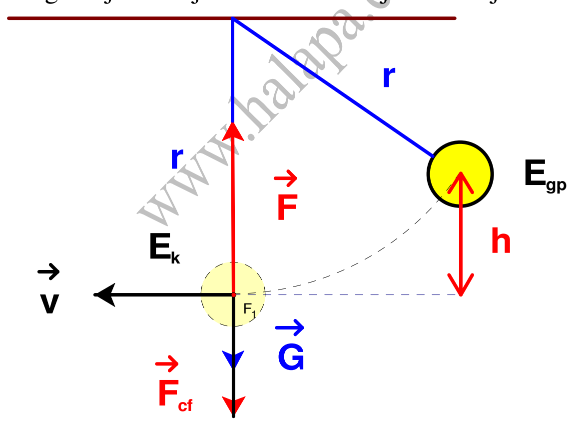
Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa stalnom alceleracijom g. Za takvo gibanje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h visina sa koje tijelo počinje padati.

1.inačica

U ovom slučaju promatramo gibanje sa stajališta sustava koji kruži zajedno s utegom.



Brzinu koju kuglica ima u času kad je na visini h od najnižeg položaja dobijemo iz formule za slobodan pad:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

Nit napinje težina utega G i centrifugalna sila F_{cf} koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže. U času kad uteg prolazi ravnotežnim položajem, rezultantna (ukupna) je sila F jednaka zbroju težine utega G i centrifugalne sile F_{cf}:

$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F_{cf} = F - G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = F - m \cdot g \Rightarrow \left[v^2 = 2 \cdot g \cdot h \right] \Rightarrow$$

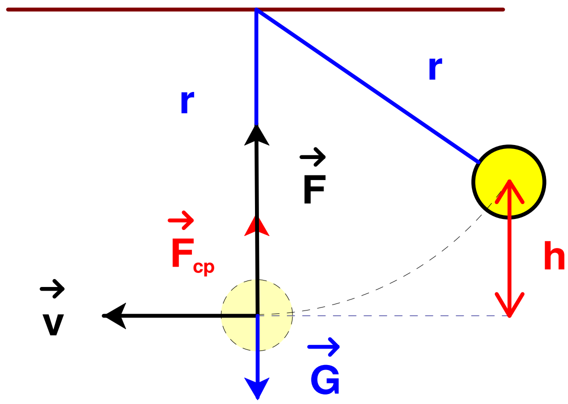
$$\Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{r} = F - m \cdot g \;/ \cdot \frac{r}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{r}{2 \cdot m \cdot g} \cdot (F - m \cdot g) \Rightarrow h = \frac{r}{2} \cdot \left(\frac{F}{m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{m \cdot g} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{r}{2} \cdot \left(\frac{F}{m \cdot g} - \frac{m \cdot g}{m \cdot g} \right) \Rightarrow h = \frac{r}{2} \cdot \left(\frac{F}{m \cdot g} - 1 \right) =$$

$$=\frac{1\ m}{2}\cdot\left(\frac{11\ N}{1\ kg\cdot 9.81\ \frac{m}{s^2}}-1\right)=0.0607\ m=6.07\ cm.$$

2.inačica

U ovom slučaju promatramo gibanje sa stajališta sustava u kojem uteg kruži.



Brzinu koju kuglica ima u času kad je na visini h od najnižeg položaja dobijemo iz formule za slobodan pad:

$$v^2=2\cdot g\cdot h.$$

Budući da se uteg giba po kružnici, tj. po kružnom luku, centripetalna sila F_{cp} jednaka je rezultantnoj sili koja se dobije kao razlika napetosti niti F i težine utega G:

$$F_{cp}=F-G.$$

Računamo najveću visinu h do koje se uteg može otkloniti tako da nit održavamo napetom, a da pri titranju nit ne pukne:

$$F_{cf}=F-G\ \Rightarrow\ m\cdot\frac{v^2}{r}=F-m\cdot g\ \Rightarrow\ \left[v^2=2\cdot g\cdot h\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m\cdot\frac{2\cdot g\cdot h}{r}=F-m\cdot g\ /\cdot\frac{r}{2\cdot m\cdot g}\ \Rightarrow\ h=\frac{r}{2\cdot m\cdot g}\cdot\left(F-m\cdot g\right)\ \Rightarrow\ h=\frac{r}{2}\cdot\left(\frac{F}{m\cdot g}-\frac{m\cdot g}{m\cdot g}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ h=\frac{r}{2}\cdot\left(\frac{F}{m\cdot g}-\frac{m\cdot g}{m\cdot g}\right)\ \Rightarrow\ h=\frac{r}{2}\cdot\left(\frac{F}{m\cdot g}-1\right)=$$

$$=\frac{1\ m}{2}\cdot\left(\frac{11\ N}{1\ kg\cdot 9.81\ \frac{m}{s^2}}-1\right)=0.0607\ m=6.07\ cm.$$

Vježba 072

Na niti duljine 2 m obješen je uteg mase 1 kg. Nit može izdržati silu od 11 N. Na koju se najveću visinu iznad ravnotežnog položaja može otkloniti uteg tako da nit održavamo napetom, a da pri titranju nit ne pukne? ($g = 9.81\ m/s^2$)

Rezultat: 12.13 cm.

Zadatak 073 (Josip, srednja škola)

Koliko je naprezanje čelične žice duljine 1 m kada se rastegne 5 mm? (Youngov modul elastičnosti za čelik $E = 210\cdot 10^9$ Pa)

Rješenje 073

l = 1 m, Δl = 5 mm = 0.005 m, E = 210 · 10^9 Pa, p = ?

Produljenje tijela pri rastezanju je izravno razmjerno vanjskoj sili i duljini tijela, a obrnuto razmjerno ploštini poprečnog presjeka tijela:

$$\Delta l \sim \frac{F \cdot l}{S}.$$

Zakonitost linearne elastične deformacije tijela zovemo Hookeov zakon. Za deformaciju elastičnog tijela na vlâk vrijedi Hookeov zakon:

Relativno produljenje tijela razmjerno je napetosti.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot p,$$

gdje je $\frac{\Delta l}{l}$ relativno produljenje (produljenje po jedinici duljine), $p = \frac{F}{S}$ napetost (omjer sile i površine presjeka tijela na koje sila djeluje), E modul elastičnosti sredstva.

Naprezanje čelične žice iznosi:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot p \;\Rightarrow\; \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot p \;/ \cdot E \;\Rightarrow\; p = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = 210 \cdot 10^9 \; Pa \cdot \frac{0.005 \; m}{1 \; m} = 1.05 \cdot 10^9 \; Pa = 1050 \; MPa.$$

Vježba 073

Koliko je naprezanje čelične žice duljine 2 m kada se rastegne 10 mm? (Youngov modul elastičnosti za čelik E = 210 · 10^9 Pa)

Rezultat: 1050 MPa.

Zadatak 074 (Josip, srednja škola)

Jedno matematičko njihalo ima titrajno vrijeme 4 s, a drugo 3 s. Koliko je titrajno vrijeme matematičkog njihala čija je duljina jednaka zbroju duljina ta dva njihala?

Rješenje 074

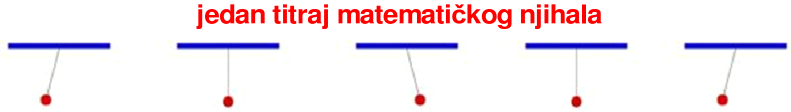
T_1 = 4 s, T_2 = 3 s, l_1, l_2, l = l_1 + l_2, T = ?

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

jedan titraj matematičkog njihala



Prvo matematičko njihalo ima titrajno vrijeme T_1 i duljinu l_1 pa vrijedi:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \;\Rightarrow\; T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \;/^2 \;\Rightarrow\; T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_1}{g} \;/ \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \;\Rightarrow\; \frac{l_1}{g} = \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2}.$$

Drugo matematičko njihalo ima titrajno vrijeme T_2 i duljinu l_2 pa vrijedi:

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \;\Rightarrow\; T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \;/^2 \;\Rightarrow\; T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_2}{g} \;/ \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \;\Rightarrow\; \frac{l_2}{g} = \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2}.$$

Titrajno vrijeme matematičkog njihala čija je duljina jednaka zbroju duljina oba njihala iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} l = l_1 + l_2 \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g} + \frac{l_2}{g}} \Rightarrow \left[\frac{l_1}{g} = \frac{T_1^{\,2}}{4 \cdot \pi^2} \,,\; \frac{l_2}{g} = \frac{T_2^{\,2}}{4 \cdot \pi^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{T_1^{\,2}}{4 \cdot \pi^2} + \frac{T_2^{\,2}}{4 \cdot \pi^2}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{T_1^{\,2} + T_2^{\,2}}{4 \cdot \pi^2}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{T_1^{\,2} + T_2^{\,2}}}{\sqrt{4 \cdot \pi^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{T_1^{\,2} + T_2^{\,2}}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{T_1^{\,2} + T_2^{\,2}}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow T = \sqrt{T_1^{\,2} + T_2^{\,2}} = \sqrt{(4\ s)^2 + (3\ s)^2} = 5\ s.$$

Vježba 074

Jedno matematičko njihalo ima titrajno vrijeme 6 s, a drugo 8 s. Koliko je titrajno vrijeme matematičkog njihala čija je duljina jednaka zbroju duljina ta dva njihala?

Rezultat: 10 s.

Zadatak 075 (Matija, gimnazija)

Matematičko njihalo služi kao sat na način da mu je period njihanja 2 s. Želimo duljinu njihala podesiti tako da period njihala bude 1 s. Kolika mora biti nova duljina njihala? ($g = 10\ m/s^2$)

Rješenje 075

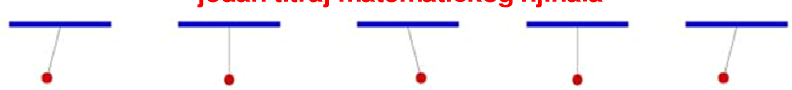
$T = 2$ s, l – duljina njihala perioda T, $T_1 = 1$ s, $g = 10\ m/s^2$, $x = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

jedan titraj matematičkog njihala



1.inačica

Iz sustava jednadžbi dobije se nova duljina x niti matematičkog njihala:

$$\left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{x}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{x}{g}}}{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{x}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{x}{g}}{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{x}{\cancel{g}}}{\frac{l}{\cancel{g}}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{x}{l}} \;/^2 \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = \frac{x}{l} \;/ \cdot l \Rightarrow x = l \cdot \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = l \cdot \left(\frac{1\ s}{2\ s}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot l.$$

Duljina niti njihala mora se skratiti četiri puta.

2.inačica

Iz formule

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

može se zaključiti da je period T razmjeran s kvadratnim korijenom (drugim korijenom) duljine l niti njihala

$$T \sim \sqrt{l}.$$

Ako se duljina niti poveća 4 puta, period se poveća 2 puta.
Ako se duljina niti poveća 9 puta, period se poveća 3 puta.
Ako se duljina niti smanji 4 puta, period se smanji 2 puta.
Ako se duljina niti smanji 9 puta, period se smanji 3 puta. Itd.

Period matematičkog njihala je T = 2 s. Duljinu niti njihala podesili smo tako da period njihala bude T_1 = 1 s. Budući da se period smanjio 2 puta, duljina niti njihala mora se smanjiti 4 puta.

Vježba 075

Matematičko njihalo služi kao sat na način da mu je period njihanja 3 s. Želimo duljinu njihala podesiti tako da period njihala bude 1 s. Kolika mora biti nova duljina njihala? ($g = 10\ m/s^2$)

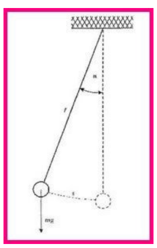
Rezultat: Duljina niti njihala mora se skratiti devet puta.

Zadatak 076 (Armin, elektrotehnička škola)

Izračunati duljinu matematičkog njihala koje se, na mjestu gdje je $g = 9.81\ m/s^2$, njiše periodom od 4 s.

Rješenje 076

$g = 9.81\ m/s^2$, T = 4 s, l = ?



Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Duljina matematičkog njihala iznosi:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \ /^2 \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g} \ / \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} =$$

$$= \frac{(4\ s)^2 \cdot 9.81\ \frac{m}{s^2}}{4 \cdot \pi^2} = 3.976\ \text{m}.$$

Vježba 076

Izračunati duljinu matematičkog njihala koje se, na mjestu gdje je $g = 9.81\ m/s^2$, njiše periodom od 5 s.

Rezultat: 6.212 m.

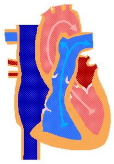
Zadatak 077 (Armin, elektrotehnička škola)

Ako je čovjeku srčani puls 75, koliki su period i frekvencija otkucaja njegovog srca?

Rješenje 077

n = 75, t = 1 min = 60 s, T = ?, ν = ?

Frekvencija ν je broj ophoda (ili titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Period T je vrijeme jednog ophoda (ili titraja). Između frekvencije ν i perioda T postoji veza:



$$\nu \cdot T = 1 \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{1}{T} \\ T = \dfrac{1}{\nu}. \end{cases}$$

Budući da je čovjeku srčani puls 75 otkucaja u minuti, frekvencija ν otkucaja njegovog srca iznosi:

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{75}{60\ s} = 1.25\ \frac{1}{s} = 1.25\ Hz.$$

Period T otkucaja njegovog srca je:

$$T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow T = \frac{t}{n} = \frac{60\ s}{75} = 0.8\ s.$$

Vježba 077

Ako je čovjeku srčani puls 90, kolika je frekvencija otkucaja njegovog srca?

Rezultat: 1.5 Hz.

Zadatak 078 (Mihaela, srednja škola)

Zvučni val valne duljine 75 cm što ga u zraku emitira glazbena vilica širi se iz zraka u vodu. Kolika je valna duljina tog zvučnog vala u vodi ako je brzina širenja zvuka u zraku 330 m/s, a u vodi 1450 m/s?

Rješenje 078

λ_1 = 75 cm = 0.75 m, v_1 = 330 m/s, v_2 = 1450 m/s, λ_2 = ?

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. To je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$v = \lambda \cdot \nu,$$

gdje je v brzina širenja vala, λ valna duljina, ν frekvencija.

Pri prijelazu svjetlosti (vala) iz jednog optičkog sredstva u drugo frekvencija ostaje nepromijenjena, a mijenja se valna duljina i brzina svjetlosti (vala).

Duljina vala zvučnog vala iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \lambda_1 \cdot \nu \\ v_2 = \lambda_2 \cdot \nu \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1 \cdot \nu}{\lambda_2 \cdot \nu} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1 \cdot \cancel{\nu}}{\lambda_2 \cdot \cancel{\nu}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow v_1 \cdot \lambda_2 = v_2 \cdot \lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{v_2 \cdot \lambda_1}{v_1} = \frac{1450\ \frac{m}{s} \cdot 0.75\ m}{330\ \frac{m}{s}} = 3.3\ m.$$

Vježba 078

Zvučni val valne duljine 150 cm što ga u zraku emitira glazbena vilica širi se iz zraka u vodu. Kolika je valna duljina tog zvučnog vala u vodi ako je brzina širenja zvuka u zraku 330 m/s, a u vodi 1450 m/s?

Rezultat: 6.6 m.

Zadatak 079 (Zoki, maturant srednje škole)

O oprugu čija je konstanta $1\ N \cdot m^{-1}$ obješena je kuglica mase 10 g koja harmonijski oscilira s amplitudom $2 \cdot 10^{-2}$ m. Odredite elongaciju kuglice nakon 0.5 s ako su oscilacije neamortizirane i ako je početna faza nula. Masu opruge i dimenzije kuglice zanemariti.

Rješenje 079

$k = 1\ N \cdot m^{-1}$, m = 10 g = 0.01 kg, $A = 2 \cdot 10^{-2}$ m, t = 0.5 s, $\varphi_0 = 0$, x = ?

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra.

Harmoničko titranje opisuje se trigonometrijskim funkcijama sinus i kosinus.

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right),$$

gdje je

- x – elongacija ili pomak tijela iz ravnotežnog položaja
- A – amplituda ili maksimalna elongacija
- ω – kružna frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- k – konstanta opruge
- m – masa tijela što titra na opruzi
- t – vrijeme titranja
- φ_0 – početna faza.

Najprije izračunamo kružnu frekvenciju:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1 \frac{N}{m}}{0.01\ kg}} = 10\ \frac{rad}{s} = 10\ \frac{1}{s}.$$

Položaj (elongacija) kuglice nakon vremena t iznosi:

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) = 2 \cdot 10^{-2}\ m \cdot \sin\left(10\ \frac{1}{s} \cdot 0.5\ s + 0\right) = -0.01918\ m = -1.918\ cm = -19.18\ mm.$$

Pozor!

Pri računanju vrijednosti trigonometrijske funkcije treba pozornost obratiti na stanje (MOD) u kojem radi računalo. Treba ga koristiti u radijanima (RAD).

Vježba 079

O oprugu čija je konstanta 1 N · m^{-1} obješena je kuglica mase 1 dag koja harmonijski oscilira s amplitudom 2 cm. Odredite elongaciju kuglice nakon 0.5 s ako su oscilacije neamortizirane i ako je početna faza nula. Masu opruge i dimenzije kuglice zanemariti.

Rezultat: – 1.918 cm.

Zadatak 080 (Zoki, maturant srednje škole)

Posuda s utezima obješena je na opruzi i titra s periodom 0.5 s. Dodavanjem utega u posudu period titranja se promijeni na 0.6 s. Koliko se produljila opruga dodavanjem utega? (g = 9.81 m/s^2)

Rješenje 080

$T_1 = 0.5$ s, $T_2 = 0.6$ s, $g = 9.81$ m/s^2, $\Delta l = ?$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra.

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Posudu s utezima obješenu na opruzi možemo poistovjetiti s matematičkim njihalom koje titra uz male amplitude. Računamo duljine l_1 i l_2 opruge kada titra s periodima T_1 i T_2:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \;/^2 \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \;/^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_1}{g} \\ T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_2}{g} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_1}{g} \;/ \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \\ T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l_2}{g} \;/ \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_1 = \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g \\ l_2 = \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g \end{array}\right\}.$$

Nakon dodavanja utega produljenje opruge iznosi:

$$\Delta l = l_2 - l_1 \;\Rightarrow\; \Delta l = \frac{T_2^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g - \frac{T_1^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g \;\Rightarrow\; \Delta l = \left(T_2^2 - T_1^2\right) \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} =$$

$$= \left((0.6\ s)^2 - (0.5\ s)^2\right) \cdot \frac{9.81\ \frac{m}{s^2}}{4 \cdot \pi^2} = 0.0273\ m = 2.73\ cm.$$

Vježba 080

Posuda s utezima obješena je na opruzi i titra s periodom 0.4 s. Dodavanjem utega u posudu period titranja se promijeni na 0.5 s. Koliko se produljila opruga dodavanjem utega? ($g = 9.81\ m/s^2$)

Rezultat: 2.24 cm.