

### Zadatak 021 (Franjo, tehnička škola)

Kuglica jednostavnog njihala duljine  $l = 1.5 \text{ m}$  izvedena je iz ravnotežnog položaja u točku A, a zatim puštena. Ispod objesišta njihala postavljen je tanak štاپ na udaljenosti  $\frac{1}{2} \cdot l$  okomito na ravninu titranja. Odredi periodu titranja njihala.

#### Rješenje 021

$$l = 1.5 \text{ m}, \quad l_1 = l = 1.5 \text{ m}, \quad l_2 = \frac{1}{2} \cdot l = 0.75 \text{ m}, \quad g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad T = ?$$

Pretpostavimo da su amplitude njihala male, a trenje zanemarimo.

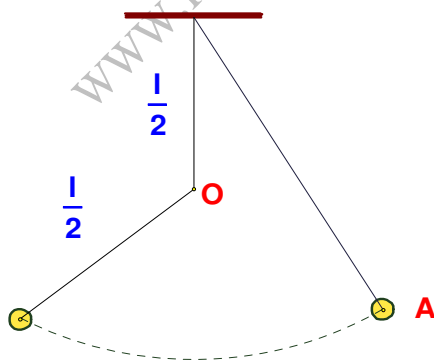
Njihalo napravi polovicu titraja sa dužinom  $l_1$  za vrijeme poluperiode  $\frac{1}{2} \cdot T_1$ . Drugu polovicu titraja njihalo

napravi sa dužinom  $l_2$  za vrijeme poluperiode  $\frac{1}{2} \cdot T_2$ . Vrijednosti tih poluperioda su:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot T_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \\ \frac{1}{2} \cdot T_2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot l}{g}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}}. \end{cases}$$

Ukupna perioda njihala je:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot T_1 + \frac{1}{2} \cdot T_2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} + \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ &= \pi \cdot \sqrt{\frac{1.5 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2.1 \text{ s}. \end{aligned}$$



### Vježba 021

Kuglica jednostavnog njihala duljine  $l = 6 \text{ m}$  izvedena je iz ravnotežnog položaja u točku A, a zatim puštena. Ispod objesišta njihala postavljen je tanak štاپ na udaljenosti  $\frac{1}{2} \cdot l$  okomito na ravninu titranja.

Odredi periodu titranja njihala.

**Rezultat:** 4.2 s.

### Zadatak 022 (Liburnija, gimnazija)

Elastično uže duljine 30 m i mase 8 kg napeto je između svojih krajeva silom 2250 N. Koliko će vrijeme biti potrebno da se transverzalni val, koji smo utisnuli udarcem na jednom kraju užeta, proširi do drugog kraja i vrati natrag ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )?

#### Rješenje 022

$$l = 30 \text{ m}, \quad m = 8 \text{ kg}, \quad F = 2250 \text{ N}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Na napetom užetu ili žici val se širi brzinom:

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}},$$

gdje je F napetost užeta, l duljina užeta, a m njegova masa. Vrijeme za koje se val proširi do drugog kraja i vrati natrag iznosi:

$$\left[ t = \frac{s}{v} \right] \Rightarrow t = \frac{2 \cdot l}{v} = \frac{2 \cdot l}{\sqrt{\frac{F \cdot l}{m}}} = 2 \cdot l \cdot \sqrt{\frac{m}{F \cdot l}} = 2 \cdot \sqrt{l^2 \cdot \frac{m}{F \cdot l}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{l \cdot m}{F}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{30 \text{ m} \cdot 8 \text{ kg}}{2250 \text{ N}}} = 0.65 \text{ s}.$$

### Vježba 022

Elastično uže duljine 60 m i mase 8 kg napeto je između svojih krajeva silom 2250 N. Koliko će vrijeme biti potrebno da se transverzalni val, koji smo utisnuli udarcem na jednom kraju užeta, proširi do drugog kraja i vrati natrag ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )?

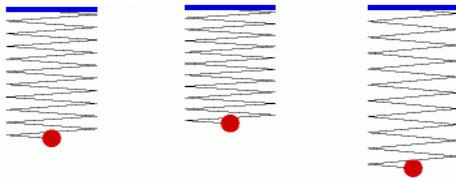
**Rezultat:** 0.92 s.

### Zadatak 023 (Liburnija, gimnazija)

Uteg mase 1 kg visi na elastičnoj opruzi i titra gore – dolje po stazi dugoj 20 cm. Perioda titranja jest 4 sekunde. Odredi maksimalnu elastičnu silu koja djeluje na uteg.

#### Rješenje 023

$$m = 1 \text{ kg}, \quad 2 \cdot A = 20 \text{ cm} \Rightarrow A = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}, \quad T = 4 \text{ s}, \quad F_{\max} = ?$$



Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za neko tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x, smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kazemo da harmonički titra.

Slovom x označili smo elongaciju, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku. Slovom A označili smo amplitudu, tj. maksimalnu elongaciju. Sila je najveća za  $x = A$ :

$$\left. \begin{array}{l} F_{\max} = -k \cdot x \\ x = A \end{array} \right\} \Rightarrow F_{\max} = -k \cdot A = -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} \cdot A = -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 1 \text{ kg}}{(4 \text{ s})^2} \cdot 0.10 \text{ m} = -0.25 \text{ N}.$$

Predznak minus (–) znači da je elastična sila usmjerena prema položaju ravnoteže.

### Vježba 023

Uteg mase 2 kg visi na elastičnoj opruzi i titra gore – dolje po stazi dugoj 20 cm. Perioda titranja jest 2 sekunde. Odredi maksimalnu elastičnu silu koja djeluje na uteg.

**Rezultat:** – 1.97 N.

### Zadatak 024 (Liburnija, gimnazija)

Uteg mase 1 kg visi na elastičnoj opruzi i titra gore – dolje po stazi dugoj 20 cm. Perioda titranja jest 4 sekunde. Odredi maksimalnu kinetičku energiju utega.

#### Rješenje 024

$$m = 1 \text{ kg}, \quad 2 \cdot A = 20 \text{ cm} \Rightarrow A = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}, \quad T = 4 \text{ s}, \quad E_{k \max} = ?$$

Uteg ima najveću kinetičku energiju za  $v = v_0$ , gdje je  $v_0$  maksimalna brzina dana izrazom:

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T}.$$

Maksimalna kinetička energija iznosi:

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T} \right)^2 = 2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \left( \frac{A}{T} \right)^2 = 2 \cdot \pi^2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot \left( \frac{0.10 \text{ m}}{4 \text{ s}} \right)^2 = 0.012 \text{ J}.$$

### Vježba 024

Uteg mase 2 kg visi na elastičnoj opruzi i titra gore – dolje po stazi dugoj 20 cm. Perioda titranja jest 2 sekunde. Odredi maksimalnu kinetičku energiju utega.

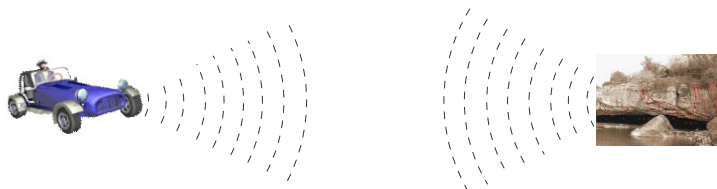
**Rezultat:** 0.099 J.

### Zadatak 025 (Iva, medicinska škola)

Automobil se giba prema udaljenoj stijeni brzinom 144 km/h. Vozač nakratko pritisne sirenu koja emitira zvuk frekvencije 400 Hz. Nakon 2 s začuje jeku tog zvuka. Kolika je frekvencija jেকে ako je brzina zvuka u zraku 340 m/s?

#### Rješenje 025

$$v = 144 \text{ km/h} = [144 : 3.6] = 40 \text{ m/s}, \quad v = 400 \text{ Hz}, \quad v_Z = 340 \text{ m/s}, \quad v'' = ?$$



Zadatak rješavamo u dva koraka:

1. najprije zamislimo da je stijena "mirni opažatelj" do kojeg dolazi zvuk od izvora koji mu se približava. Stijena "prima" zvuk frekvencije:

$$v' = v \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{v_Z}} = v \cdot \frac{v_Z}{v_Z - v}$$

2. sada stijena reflektira zvuk frekvencije  $v'$ , a vozač je opažatelj koji se giba prema mirnom izvoru i čuje zvuk frekvencije:

$$v'' = v' \cdot \left(1 + \frac{v}{v_Z}\right) = v \cdot \frac{v_Z}{v_Z - v} \cdot \left(1 + \frac{v}{v_Z}\right) = v \cdot \frac{v_Z}{v_Z - v} \cdot \frac{v_Z + v}{v_Z} = v \cdot \frac{v_Z + v}{v_Z - v} = 400 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 506.7 \text{ Hz.}$$

### Vježba 025

Automobil se giba prema udaljenoj stijeni brzinom 144 km/h. Vozač nakratko pritisne sirenu koja emitira zvuk frekvencije 500 Hz. Nakon 2 s začuje jeku tog zvuka. Kolika je frekvencija jেকে ako je brzina zvuka u zraku 340 m/s?

**Rezultat:** 633.3 Hz.

### Zadatak 026 (Gimnazijalac, gimnazika)

Kolika je razlika faza harmoničnih titraja:  $x_1 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)$  i  $x_2 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - 60^\circ\right)$ ?

#### Rješenje 026

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \frac{\pi}{4}\right) \\ x_2 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - 60^\circ\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \\ \varphi_2 = -60^\circ = -\frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7 \cdot \pi}{12}.$$

### Vježba 026

Kolika je razlika faza harmoničnih titraja:  $x_1 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)$  i  $x_2 = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - 45^\circ\right)$ ?

**Rezultat:**  $\frac{\pi}{2}$ .

### Zadatak 027 (Gimnazijalac, gimnazika)

U mjestu B ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ) ura njihalica ima periodu titranja  $T = 1 \text{ s}$ . Kad uru prenesemo u mjesto A, ona u 24 h zaostaje 35 s. Kolika je akceleracija slobodnog pada u mjestu A?

#### Rješenje 027

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T = 1 \text{ s}, \quad \Delta t = 35 \text{ s}, \quad g_A = ?$$



Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest  $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ , gdje je  $l$  duljina njihala, a  $g$  akceleracija slobodnog pada. Budući da u mjestu B znamo periodu titranja ure njihalice, izračunat ćemo duljinu njihala:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g} \Rightarrow l = \frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$$

U mjestu A njihalo ima periodu:

$$24 \text{ h} = 86400 \text{ s} \Rightarrow T_A = \frac{86400}{86400 - \Delta t} = \frac{86400}{86400 - 35} \text{ s} = \frac{86400}{86365} \text{ s}$$

Tom vremenu odgovara akceleracija slobodnog pada  $g_A$ :

$$\begin{aligned} T_A &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_A}} \Rightarrow g_A = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T_A^2} = \frac{4 \cdot \pi^2}{T_A^2} \cdot \frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} = g \cdot \frac{T^2}{T_A^2} = g \cdot \left( \frac{T}{T_A} \right)^2 = \\ &= 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left( \frac{1 \text{ s}}{\frac{86400}{86365} \text{ s}} \right)^2 = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left( \frac{86365}{86400} \right)^2 = 9.802 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

#### Vježba 027

U mjestu B ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ) ura njihalica ima periodu titranja  $T = 1 \text{ s}$ . Kad uru prenesemo u mjesto A, ona u 24 h zaostaje 70 s. Kolika je akceleracija slobodnog pada u mjestu A?

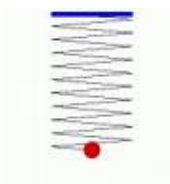
**Rezultat:**  $9.79 \text{ m/s}^2$ .

### Zadatak 028 (Ante, tehnička škola)

Na oprugu konstante elastičnosti  $10 \text{ N/m}$  koja slobodno visi, objesimo uteg mase  $0.1 \text{ kg}$ . Kolika će biti maksimalna brzina utega? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 028

$$k = 10 \text{ N/m}, \quad m = 0.1 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$



Sila koja djeluje na tijelo i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je:

$$F = -k \cdot x$$

Sila je najveća za  $x = A$ , gdje je  $A$  amplituda:

$$F = -k \cdot A$$

U zadanom slučaju je težina tijela uzrok rastezanja opruge. Zato vrijedi:

$$F = G \Rightarrow -k \cdot A = m \cdot g \Rightarrow A = -\frac{m \cdot g}{k}$$

Maksimalna brzina iznosi:

$$\left. \begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ period titranja} \\ v &= \frac{2 \cdot A \cdot \pi}{T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot \left( -\frac{m \cdot g}{k} \right) \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow v = -\frac{m \cdot g}{k} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = -g \cdot \sqrt{\frac{m^2}{k^2} \cdot \frac{k}{m}} =$$

$$= -g \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = -9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sqrt{\frac{0.1 \text{ kg}}{10 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = -0.981 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v| = 0.981 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Vježba 028

Na oprugu konstante elastičnosti 1 N/m koja slobodno visi, objesimo uteg mase 0.01 kg. Kolika će biti maksimalna brzina utega? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

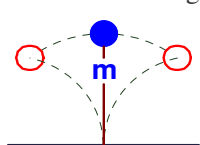
**Rezultat:**  $|v| = 0.981 \frac{m}{s}$ .

### Zadatak 029 (Ante, tehnička škola)

Na vrhu čelične elastične opruge nalazi se metalna kugla mase 300 g. Da bi se kugla pomaknula u stranu za 2 cm na nju treba djelovati tangencijalnom silom iznosa 0.6 N. Kolika je perioda titranja opruge?

#### Rješenje 029

$$m = 300 \text{ g} = 0.3 \text{ kg}, \quad x = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}, \quad F = 0.6 \text{ N}, \quad T = ?$$



$$\left. \begin{aligned} F &= k \cdot x \\ T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} k &= \frac{F}{x} \\ T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{F}{x}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot x}{F}} =$$
$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.3 \text{ kg} \cdot 0.02 \text{ m}}{0.6 \text{ N}}} = 0.63 \text{ s}.$$

### Vježba 029

Na vrhu čelične elastične opruge nalazi se metalna kugla mase 300 g. Da bi se kugla pomaknula u stranu za 4 cm na nju treba djelovati tangencijalnom silom iznosa 0.6 N. Kolika je perioda titranja opruge?

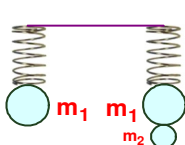
**Rezultat:** 0.89 s.

### Zadatak 030 (Marin, tehnička škola)

Koliko će se puta povećati perioda titranja opruge na kojoj visi uteg mase  $m$ , ako se na oprugu objesi još jedan uteg 50% manje mase od prvog utega?

#### Rješenje 030

$$m_1 = m, \quad m_2 = m - \frac{50}{100} m = 0.50 m, \quad T_2 : T_1 = ?$$



$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_2 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1.50 \cdot m}{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{dijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1.50 \cdot m}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{1.50 \cdot m}{k} \cdot \frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{1.50 \cdot m}{m}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{1.50} = 1.22.$$

### Vježba 030

Koliko će se puta povećati perioda titranja opruge na kojoj visi uteg mase  $m$ , ako se na oprugu objesi još jedan uteg 75% manje mase od prvog utega?

**Rezultat:** 1.12.

### Zadatak 031 (Ivana, studentica)

Žica duljine 50 cm titra osnovnim tonom frekvencije  $\nu_1 = 240 \text{ Hz}$ . Kolika je (minimalna) osnovna frekvencija tona kad se žica, pri istoj napetosti, skрати za 20 cm?

#### Rješenje 031

$$l = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}, \quad \nu_1 = 240 \text{ Hz}, \quad \Delta l = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad \nu_2 = ?$$

Osnovna frekvencija kojom titra žica duljine  $l$  jednaka je:

$$\nu_1 = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

gdje je  $F$  napetost žice, a  $\mu$  omjer mase i duljine žice. Poslije skraćivanja, žica će imati osnovnu frekvenciju titranja:

$$v_2 = \frac{1}{2 \cdot (l - \Delta l)} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Traženu frekvenciju  $v_2$  dobijemo iz sustava jednačbi:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{2 \cdot (l - \Delta l)} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \\ v_1 &= \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{1}{2 \cdot (l - \Delta l)} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}}{\frac{1}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{2 \cdot (l - \Delta l)}{2 \cdot l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{2 \cdot l}{2 \cdot (l - \Delta l)} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{l}{l - \Delta l} \Rightarrow v_2 = \frac{l}{l - \Delta l} \cdot v_1 = \frac{0.5 \text{ m}}{0.5 \text{ m} - 0.2 \text{ m}} \cdot 240 \text{ Hz} = 400 \text{ Hz}.$$

### Vježba 031

Žica duljine 50 cm titra osnovnim tonom frekvencije  $v_1 = 240$  Hz. Kolika je (minimalna) osnovna frekvencija tona kad se žica, pri istoj napetosti, skрати za 30 cm?

**Rezultat:** 600 Hz..

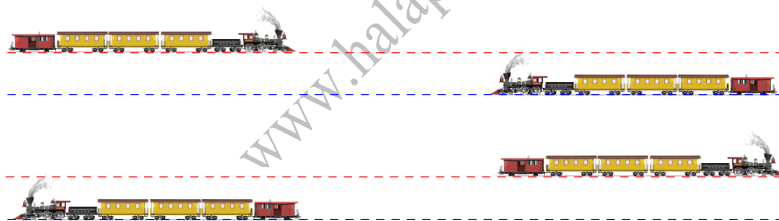
### Zadatak 032 (Ivana, studentica)

Dva vlaka gibaju se usporednim prugama jedan prema drugome brzinama  $v_1 = 72$  km/h i  $v_2 = 54$  km/h. Lokomotiva prvog vlaka proizvodi zvuk frekvencije  $v_1 = 600$  Hz. Koliku će frekvenciju imati zvuk koji čuje strojovođa drugog vlaka prije i poslije susreta. Brzina zvuka iznosi  $v_z = 340$  m/s.

### Rješenje 032

$$v_1 = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad v_2 = 54 \text{ km/h} = [54 : 3.6] = 15 \text{ m/s}, \quad v_1 = 600 \text{ Hz},$$

$$v_2' = ?, \quad v_2'' = ?$$



Prije susreta vlakova frekvencija zvuka koji čuje strojovođa je:

$$v_2' = \frac{v_z + v_2}{v_z - v_1} \cdot v_1 = \frac{340 \frac{m}{s} + 15 \frac{m}{s}}{340 \frac{m}{s} - 20 \frac{m}{s}} \cdot 600 \text{ Hz} = 666 \text{ Hz}.$$

Poslije susreta vlakova frekvencija zvuka koji čuje strojovođa iznosi:

$$v_2'' = \frac{v_z - v_2}{v_z + v_1} \cdot v_1 = \frac{340 \frac{m}{s} - 15 \frac{m}{s}}{340 \frac{m}{s} + 20 \frac{m}{s}} \cdot 600 \text{ Hz} = 542 \text{ Hz}.$$

### Vježba 032

Dva vlaka gibaju se usporednim prugama jedan prema drugome brzinama  $v_1 = 72$  km/h i  $v_2 = 54$  km/h. Lokomotiva prvog vlaka proizvodi zvuk frekvencije  $v_1 = 500$  Hz. Koliku će frekvenciju imati zvuk koji čuje strojovođa drugog vlaka prije i poslije susreta. Brzina zvuka iznosi  $v_z = 340$  m/s.

**Rezultat:**  $v_2' = 555$  Hz,  $v_2'' = 451$  Hz.

### Zadatak 033 (Anamarija, gimnazija)

Uže dugo 5 m promjera 2 mm drži predmet koji je toliko težak da uže tek što nije puklo. Kad se predmet počne njihati, uže će puknuti. Koliki bi trebao biti promjer užeta od istog materijala da uže ne bi puklo ako predmet prolazeći položajem ravnoteže ima brzinu 7 m/s? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 033

$$l = 5 \text{ m}, \quad 2 \cdot r = 2 \text{ mm}, \quad v = 7 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad 2 \cdot R = ?$$

Budući da se predmet njiše, uže napinje osim težine predmeta  $G$  još i centrifugalna sila  $F_{cf}$ . Najveća je napetost kad tijelo prolazi položajem ravnoteže. Tada sila koja nateže nit iznosi:

$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F = m \cdot \left( g + \frac{v^2}{r} \right).$$

Odredimo koliko je puta sila  $F$  veća od težine predmeta  $G$ :

$$\frac{F}{G} = \frac{m \cdot \left( g + \frac{v^2}{r} \right)}{m \cdot g} \Rightarrow \frac{F}{G} = \frac{g + \frac{v^2}{r}}{g} \Rightarrow \frac{F}{G} = \frac{g}{g} + \frac{v^2}{r \cdot g} \Rightarrow \frac{F}{G} = 1 + \frac{v^2}{r \cdot g} \Rightarrow \frac{F}{G} = 1 + \frac{\left( 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{5 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \frac{F}{G} = 2.$$

Budući da je sila koja nateže nit dva puta veća od težine predmeta, mora i uže imati dva puta veću površinu presjeka:

$$S_1 = 2 \cdot S \Rightarrow R^2 \cdot \pi = 2 \cdot r^2 \cdot \pi \quad | : \pi \Rightarrow R^2 = 2 \cdot r^2 \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow R = r \cdot \sqrt{2} \quad | : 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot R = 2 \cdot r \cdot \sqrt{2} \Rightarrow 2 \cdot R = 2 \text{ mm} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow 2 \cdot R = 2.83 \text{ mm}.$$

### Vježba 033

Uže dugo 5 m promjera 4 mm drži predmet koji je toliko težak da uže tek što nije puklo. Kad se predmet počne njihati, uže će puknuti. Koliki bi trebao biti promjer užeta od istog materijala da uže ne bi puklo ako predmet prolazeći položajem ravnoteže ima brzinu 7 m/s? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

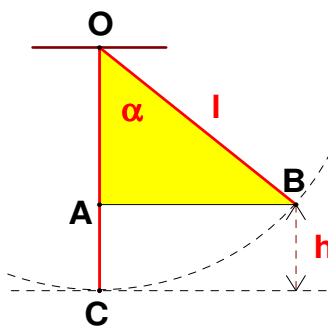
**Rezultat:** 5.66 mm.

### Zadatak 034 (Vedrana, studentica)

Uteg mase 1 kg visi na niti koju smo iz vertikalnog položaja otklonili za kut  $\alpha = 30^\circ$ . Nadite napetost niti kad smo uteg isпустиili te on prolazi položajem ravnoteže.

#### Rješenje 034

$$m = 1 \text{ kg}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$



Sa slike vidi se:

$$|OC| = |OB| = l, \quad \cos \alpha = \frac{|OA|}{|OB|} \Rightarrow |OA| = |OB| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |OA| = l \cdot \cos \alpha$$

Visina na koju se uteg podigne iznosi:

$$h = |AC| = |OC| - |OA| = l - l \cdot \cos \alpha = l \cdot (1 - \cos \alpha).$$

Brzina kojom uteg prolazi položajem ravnoteže je:  $v^2 = 2 \cdot g \cdot h$ .

Nit napinje težina utega  $G$  i centrifugalna sila koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže. Ukupna sila iznosi:

$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{l} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{l} \Rightarrow F = m \cdot g \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot h}{l} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F = m \cdot g \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)}{l} \right) \Rightarrow F = m \cdot g \cdot (1 + 2 \cdot (1 - \cos \alpha)) \Rightarrow F = m \cdot g \cdot (1 + 2 - 2 \cdot \cos \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow F = m \cdot g \cdot (3 - 2 \cdot \cos \alpha) = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3 - 2 \cdot \cos 30^\circ) = 12.44 \text{ N}.$$

### Vježba 034

Uteg mase 2 kg visi na niti koju smo iz vertikalnog položaja otklonili za kut  $\alpha = 30^\circ$ . Nađite napetost niti kad smo uteg ispustili te on prolazi položajem ravnoteže.

**Rezultat:** 24.88 N.

### Zadatak 035 (Gassan, student)

Što je transverzalni val?

### Rješenje 035

Transverzalni val je val kod kojeg čestice elastičnog sredstva titraju okomito na smjer širenja vala.

### Vježba 035

Što je longitudinalni val?

**Rezultat:** Longitudinalni val je val kod kojeg čestice elastičnog sredstva titraju u smjeru širenja vala.

### Zadatak 036 (Gassan, student)

Kolika je duljina vala zvuka u vodi, ako je  $\nu = 3$  kHz? (brzina zvuka u vodi  $v = 1484$  m/s)

### Rješenje 036

$\nu = 3$  kHz = 3000 Hz,  $v = 1484$  m/s,  $\lambda = ?$

$$v = \lambda \cdot \nu \Rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1484 \frac{m}{s}}{3000 \frac{1}{s}} = 0.49 \text{ m} \approx 0.5 \text{ m}.$$

### Vježba 036

Kolika je duljina vala zvuka u vodi, ako je  $\nu = 1$  kHz? (brzina zvuka u vodi  $v = 1484$  m/s)

**Rezultat:** 1.48 m.

### Zadatak 037 (Gassan, student)

Koliki su amplituda, frekvencija i brzina širenja vala, ako je

$$y(x, t) = 2 \text{ cm} \cdot \sin\left(12.57 \cdot t - 0.628 \cdot \frac{x}{\text{cm}}\right)?$$

### Rješenje 037

$y(x, t) = 2 \text{ cm} \cdot \sin(12.57 \cdot t - 0.628 \cdot x)$ ,  $Y_0 = ?$ ,  $\nu = ?$ ,  $v = ?$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Vrijede formule:

$$\lambda = v \cdot T, \quad \lambda = \frac{v}{\nu}, \quad \nu = \frac{1}{T},$$

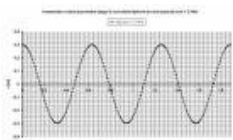
gdje je  $\lambda$  valna duljina,  $v$  brzina širenja vala,  $T$  perioda titranja,  $\nu$  frekvencija titranja.

Elongaciju  $y$  koje god točke koja se nalazi na udaljenosti  $x$  od izvora vala u bilo koje vrijeme  $t$  možemo naći iz jednadžbe vala:

$$y = Y_0 \cdot \sin 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = Y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right),$$

gdje je  $Y_0$  amplituda vala,  $t$  vrijeme,  $T$  period titranja,  $\lambda$  valna duljina,  $x$  udaljenost promatrane točke od izvora vala.

$$\left. \begin{array}{l} y = Y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{x}{\text{cm}}\right) \\ y = 2 \text{ cm} \cdot \sin(12.57 \cdot t - 0.628 \cdot x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Y_0 = 2 \text{ cm} \text{ amplituda} \\ \frac{2\pi}{T} = 12.57, \quad \frac{2\pi}{\lambda} = 0.628 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T = \frac{2\pi}{12.57} = 0.5 \text{ s} \\ \lambda = \frac{2\pi}{0.628} = 10 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5 \text{ s}} = 2 \text{ Hz} \text{ frekvencija} \\ v = \lambda \cdot \nu = 10 \text{ cm} \cdot 2 \frac{1}{\text{s}} = 20 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \text{ brzina širenja vala} \end{array} \right\}.$$

### Vježba 037

Koliki su amplituda, frekvencija i brzina širenja vala, ako je

$$y(x, t) = 3 \text{ cm} \cdot \sin\left(12.57 \cdot t - 0.628 \cdot \frac{x}{\text{cm}}\right)?$$

**Rezultat:**  $Y_0 = 3 \text{ cm}$  amplituda,  $\nu = 2 \text{ Hz}$  frekvencija,  $v = 20 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  brzina širenja vala.

### Zadatak 038 (Maturant, gimnazija)

Kada se na oprugu konstante  $k_1$  objesi uteg mase 300 g i na oprugu konstante  $k_2$  uteg mase 500 g, tada su periode titranja obje opruge jednake. Koliki mora biti omjer masa tijela obješenih na opruge konstanti  $k_1$  i  $k_2$ , da bi tijelo na opruzi konstante  $k_1$  titralo dvostruko većom periodom od periode tijela na opruzi konstante  $k_2$ ?

#### Rješenje 038

$$k_1, \quad m_1 = 300 \text{ g}, \quad k_2, \quad m_2 = 500 \text{ g}, \quad M_1 : M_2 = ?$$

Perioda titranja opruge je

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdje je  $m$  masa tijela, a  $k$  konstanta elastičnosti opruge.

Budući da su periode titranja obje opruge jednake, slijedi:

$$\begin{aligned} T_1 = T_2 &\Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \quad / 2 \Rightarrow \frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{k_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_1 \cdot k_2 = m_2 \cdot k_1 \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{300 \text{ g}}{500 \text{ g}} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = 0.6 \Rightarrow k_1 = 0.6 \cdot k_2. \end{aligned}$$

Tražimo omjer masa  $M_1$  i  $M_2$  kada tijelo na opruzi konstante  $k_1$  titra dvostruko većom periodom od periode tijela na opruzi konstante  $k_2$ :

$$\begin{aligned} T_1 = 2 \cdot T_2 &\Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M_1}{k_1}} = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M_2}{k_2}} \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \sqrt{\frac{M_1}{k_1}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{M_2}{k_2}} \quad / 2 \Rightarrow \frac{M_1}{k_1} = 4 \cdot \frac{M_2}{k_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = 4 \cdot \frac{k_1}{k_2} \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = 4 \cdot \frac{0.6 \cdot k_2}{k_2} \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = 2.4. \end{aligned}$$

### Vježba 038

Kada se na oprugu konstante  $k_1$  objesi uteg mase 300 g i na oprugu konstante  $k_2$  uteg mase 500 g, tada su periode titranja obje opruge jednake. Koliki mora biti omjer masa tijela obješenih na opruge konstanti  $k_1$  i  $k_2$ , da bi tijelo na opruzi konstante  $k_1$  titralo trostruko većom periodom od periode tijela na opruzi konstante  $k_2$ ?

**Rezultat:** 5.4.

### Zadatak 039 (Maturant, gimnazija)

Kada se elastična opruga optereti utegom mase  $m$ , istegne se za  $x = 3 \text{ cm}$ . Kolika je perioda titranja opruge sa utegom? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 039

$$x = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T = ?$$

Perioda titranja opruge je

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdje je  $m$  masa tijela, a  $k$  konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu):

$$k = \frac{F}{x} \Rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x}.$$

Zato je:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{x}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.03 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.35 \text{ s.}$$

### Vježba 039

Kada se elastična opruga optereti utegom mase m, istegne se za  $x = 12 \text{ cm}$ . Kolika je perioda titranja opruge sa utegom? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.69 s.

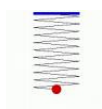
### Zadatak 040 (Željko, tehnička škola)

Ako se na oprugu objesi i zatitra neki uteg, titrajno vrijeme (perioda) je jednako 0.81 s. Za koliko će produžiti nerastegnutu oprugu uteg dvostruke mase? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 040

$$T = 0.81 \text{ s}, \quad m, \quad m_1 = 2 \cdot m, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad x_1 = ?$$

Perioda titranja elastične opruge je



$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}},$$

gdje je m masa tijela, a k konstanta elastičnosti opruge (sila koja oprugu istegne za jediničnu duljinu).

Budući da sila teža samo pomiče položaj ravnoteže i ne utječe na frekvenciju (ako nema titranja masa se nalazi u ravnotežnom položaju), elastična sila opruge u ravnoteži je sa silom težom:

$$k \cdot x = m \cdot g \Rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k}.$$

Iz formule za periodu dobije se omjer m i k:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k} \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2}.$$

Produženje opruge, kada je uteg dvostruke mase, iznosi:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{m_1 \cdot g}{k} &\Rightarrow x_1 = \frac{2 \cdot m \cdot g}{k} \Rightarrow x_1 = 2 \cdot g \cdot \frac{m}{k} \Rightarrow x_1 = 2 \cdot g \cdot \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow x_1 = g \cdot \frac{T^2}{2 \cdot \pi^2} = \\ &\Rightarrow 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{(0.81 \text{ s})^2}{2 \cdot \pi^2} = 0.326 \text{ m} = 32.6 \text{ cm.} \end{aligned}$$

### Vježba 040

Ako se na oprugu objesi i zatitra neki uteg, titrajno vrijeme (perioda) je jednako 0.5 s. Za koliko će produžiti nerastegnutu oprugu uteg dvostruke mase? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 12.4 cm