Zadatak 001 (Tea, gimnazija)

Oprugu mase 400 g, konstante opiranja 10 N/m, povučemo 5 cm prema dolje i pustimo da titra. Izračunajte periodu titranja.

Rješenje 001

Perioda titranja ovisi samo o masi opruge i konstanti opiranja.

m = 400 g = 0.4 kg, k = 10 N/m, x = 5 cm, T = ?

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.4 \ kg}{10 \ \frac{N}{m}}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.4 \ kg \cdot m}{10 \ N}} = 1.26 \ s .$$

Perioda titranja je 1.26 s.

Vježba 001

Oprugu mase 900 g, konstante opiranja 10 N/m, povučemo 6 cm prema dolje i pustimo da titra. Izračunajte periodu titranja.

Rezultat: 1.88 s.

Zadatak 002 (Siniša, tehnička škola)

Oprugu mase 800 g, konstante 80 N/m, povučemo 3 cm iz položaja ravnoteže prema gore i pustimo da titra. Izračunajte:

1. periodu titranja
2. kružnu frekvenciju
3. fazni pomak
4. napišite jednadžbu titranja
5. gdje je opruga 1 s nakon početka titranja
6. kolika je brzina tijela 2 s nakon početka titranja.

Rješenje 002

m = 800 g = 0.8 kg, k = 80 N/m, A = 3 cm = 0.03 m, t_1 = 1 s, t_2 = 2 s, x = ?, v = ?

1.
Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Pomoću konstante elastičnosti k možemoizračunati periodu titranja:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0.8 \ kg}{80 \ \frac{N}{m}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0.8 \ kg \cdot m}{80 \ kg \cdot \frac{m}{s^2}}} = 2\pi \cdot \sqrt{0.01 \ s^2} = 2\pi \cdot 0.1 \ s = 2 \cdot 3.14 \cdot 0.1 \ s = 0.628 \ s .$$

2.
Kružnu frekvenciju možemo izračunati pomoću jednog od ova dva izraza:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Na primjer iz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi \ rad}{0.628 \ s} = \frac{2 \cdot 3.14 \ rad}{0.628 \ s} = \frac{6.28 \ rad}{0.628 \ s} = 10 \ \frac{rad}{s} = 10 \ \frac{1}{s}.$$

Obrati pozornost da se

$$\omega = 10 \ \frac{rad}{s}$$

još piše

$$\omega = 10 \ \frac{1}{s} = 10 \ s^{-1}.$$

3.
Budući da je opruga povučena prema gore iz položaja ravnoteže, pomak x jednak je amplitudi A, x = A = 0.03 m, pa iz jednadžbe pomaka za vrijeme t = 0 slijedi

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad 0.03 = 0.03 \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) \quad \Rightarrow \quad 0.03 = 0.03 \cdot \sin \varphi \; / : 0.03 \quad \Rightarrow \quad \sin \varphi = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 90°.$$

Analogno da je opruga povučena prema dolje iz položaja ravnoteže fazni pomak bio bi 270°.

4.
Jednadžba titranja opruge glasi:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

gdje je A amplituda, ω kružna frekvencija, t vrijeme i φ fazni pomak. U našem slučaju je:

$$x = 0.03 \text{ m} \cdot \sin\left(10 \frac{rad}{s} \cdot t + 90°\right).$$

Moramo paziti da se u jednadžbi pojavljuju radijani, $\omega = 10 \frac{rad}{s} = 10 \cdot 57^0 \frac{1}{s} = 570^0 \frac{1}{s}$ i stupnjevi, 90°. Zato radijane pretvaramo u stupnjeve.

Pamti:

$$\pi \text{ rad} = 180°.$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^0}{\pi} = \frac{180^0}{3.14} \approx 57^0.$$

Zato je

$$\omega = 10 \frac{rad}{s} = 10 \cdot 57^0 \frac{1}{s} = 570^0 \frac{1}{s}.$$

5.
Budući da je jednadžba titranja

$$x = 0.03 \text{ m} \cdot \sin\left(10 \frac{rad}{s} \cdot t + 90°\right)$$

ili u stupnjevima

$$x = 0.03 \text{ m} \cdot \sin\left(570^0 \frac{1}{s} \cdot t + 90°\right)$$

za vrijeme t_1 = 1 s bit će

$$x = 0.03 \text{ m} \cdot \sin\left(570^0 \frac{1}{s} \cdot 1 \text{ s} + 90°\right) \quad \Rightarrow \quad x = 0.03 \text{ m} \cdot \sin(570° + 90°) \quad \Rightarrow \quad x = 0.03 \text{ m} \cdot \sin 660° \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = -\,0.026 \text{ m}.$$

6.
Brzina pri harmoničkom titranju računa se po izrazu:

$$v = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

Za vrijeme t_2 = 2 s brzina će iznositi:

$$v = 10 \frac{rad}{s} \cdot 0.03 \text{ m} \cdot \cos\left(570^0 \frac{1}{s} \cdot 2 \text{ s} + 90°\right) \quad \Rightarrow \quad v = 10 \frac{rad}{s} \cdot 0.03 \text{ m} \cdot \cos(1140° + 90°) \quad \Rightarrow$$

$$v = 10 \frac{1}{s} \cdot 0.03 \text{ m} \cdot \cos 1230° \quad \Rightarrow \quad v = 0.3 \frac{m}{s} \cdot \cos 1230° \quad \Rightarrow \quad v = -\,0.26 \frac{m}{s}.$$

Vježba 002

Oprugu mase 100 g, konstante opiranja 10 N/m, povučemo 15 cm iz položaja ravnoteže prema gore i pustimo da titra. Izračunajte:

1. periodu titranja
2. kružnu frekvenciju
3. fazni pomak
4. napišite jednadžbu titranja
5. gdje je opruga 0.3 s nakon početka titranja

Rezultat:
1. T = 0.628 s
2. ω = 10 rad/s
3. φ = 90°
4. x = 15 cm · sin(10 · t + 90°)
5. x = 8.16 cm.

Zadatak 003 (Maja, medicinska škola)

Kolika je perioda titranja matematičkog njihala duljine l ako se nalazi u dizalu:

1. koje stoji
2. koje se giba jednoliko prema gore
3. koje se giba jednoliko prema dolje
4. koje se giba prema gore ubrzanjem a
5. koje se giba prema dolje ubrzanjem a
6. koje se giba prema dolje ubrzanjem a = g
7. koje se giba prema dolje ubrzanjem a = 2g.

Rješenje 003

Perioda titranja matematičkog njihala duljine l računa se po formuli

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je g ubrzanje sile teže.

$$1.\ T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad 2.\ T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad 3.\ T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad 4.\ T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

$$5.\ T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g-a}} \qquad 6.\ T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g-a}}\ ,\ a = g\ \Rightarrow\ T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g-g}} = \infty.$$

To je bestežinsko stanje, njihalo ne titra, ostaje u položaju u kojem se nađe.

$$1.\quad 7.\ T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g-a}}\ ,\ a = 2g\ \Rightarrow\ T_{2g} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g-2g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{-l}{g}} = i \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = i \cdot T.$$

Broj i je imaginarna jedinica, i = $\sqrt{-1}$, T_{2g} = i · T, ista je perioda kao da dizalo stoji, ali titra oko gornjega vertikalnog položaja.

Vježba 003

Koliki je period titranja matematičkog njihala duljine 2 m ako se nalazi u dizalu koje se giba jednoliko prema gore? (g = 10 m/s^2)

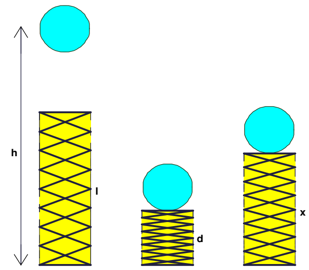
Rezultat: 2.81 s.

Zadatak 004 (Ines, gimnazija)

Spiralna opruga duga 20 cm pričvršćena je jednim svojim krajem na horizontalnu podlogu. S visine 30 cm od podloge spusti se na oprugu gruda mekane gline. Pri padu glina sabije oprugu na duljinu 5 cm. Koju će duljinu imati opruga s glinom na vrhu nakon što se smiri?

Rješenje 004

$l = 20\ cm = 0.20\ m, \quad h = 30\ cm = 0.30\ m, \quad d = 5\ cm = 0.05\ m, \quad x = ?$



Zbog zakona o očuvanju energije, promjena gravitacijske potencijalne energije gline bit će jednaka elastičnoj potencijalnoj energiji sabijene opruge:

$$\Delta E_{gp} = E_{ep}. \qquad (1)$$

Glina se spustila za 0.25 m:

$$\Delta h = h - d = 0.30\ m - 0.05\ m = 0.25\ m$$

i promijenila svoju gravitacijsku potencijalnu energiju za

$$\Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot 0.25 = 0.25 mg.$$

Budući da je opruga sabijena za 0.15 m:

$$s = l - d = 0.20\ m - 0.05\ m = 0.15\ m,$$

njezina elastična potencijalna energija iznosit će:

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (0.15)^2 = 0.01225 \cdot k.$$

Zbog (1) slijedi:

$$\Delta E_{gp} = E_{ep} \Rightarrow 0.25 mg = 0.01225 k \quad / : 0.25 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg = 0.049 k \qquad (2)$$

Nakon što se smiri, opruga će biti sabijena samo težinom gline:

$$F = G \Rightarrow ks = mg \Rightarrow [\text{zbog } (2)] \Rightarrow ks = 0.049 k \quad / : k \quad \Rightarrow s = 0.049\ m = 4.9\ cm.$$

Duljina opruge x bit će jednaka:

$$x = l - s = 20\ cm - 4.9\ cm = 15.1\ cm.$$

Vježba 004

Spiralna opruga duga 20 cm pričvršćena je jednim svojim krajem na horizontalnu podlogu. S visine 35 cm od podloge spusti se na oprugu gruda mekane gline. Pri padu glina sabije oprugu na duljinu 5 cm. Koju će duljinu imati opruga s glinom na vrhu nakon što se smiri?

Rezultat: 15.92 cm.

Zadatak 005 (Ana, gimnazija)

Kolica mase 60 kg, brzine 2 m/s, zaustave se sabijajući dugu oprugu za s = 20 cm. Odredite vrijeme zaustavljanja.

Rješenje 005

$m = 60\ kg, \quad v = 2\ m/s, \quad s = 20\ cm = 0.20\ m, \quad t = ?$

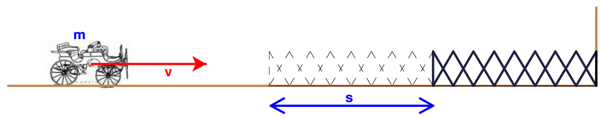
Titranje je gibanje kod kojega tijelo prolazi, gibajući se u dva suprotna smjera, stalno isti dio krivulje (najčešće kružnice) ili pravca. Položaj ravnoteže je položaj u kojem tijelo miruje. Kad tijelo titra, u tom je položaju najmanja potencijalna, a najveća kinetička energija. Zbroj tih dviju energija (zanemarivši gubitke) je stalan i jednak najvećoj potencijalnoj ili najvećoj kinetičkoj energiji. To je neprigušeno titranje:

$$E_k + E_p = E_{k\,max} = E_{p\,max}.$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · s ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Tada je perioda titranja:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ova formula upotrebljava se obično kod titranja mase m koje nastaje djelovanjem elastične sile opruge; k je konstanta opruge (a znači silu potrebnu za jedinično produljenje opruge). Općenito, k je faktor proporcionalnosti između sile i elongacije.



Kod sabijanja opruge kinetička energija kolica prelazi u potencijalnu energiju opruge:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \quad / \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad m \cdot v^2 = k \cdot s^2 \quad / : s^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m \cdot v^2}{s^2} = \frac{60\ kg \cdot \left(2\ \frac{m}{s}\right)^2}{(0.2\ m)^2} =$$

$$= 6000\ \frac{kg\ \frac{m^2}{s^2}}{m^2} = 6 \cdot 10^3\ \frac{kg\ \frac{m}{s^2}}{m} = 6 \cdot 10^3\ \frac{N}{m}.$$

Našli smo konstantu opruge. Kada bi kolica mase m bila pričvršćena na oprugu titrala bi s periodom

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Budući da sabijanje opruge traje **četvrtinu periode**, vrijeme zaustavljanja je:

$$t = \frac{1}{4} \cdot T = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{60\ kg}{6000\ \frac{N}{m}}} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{1\ kg \cdot m}{100\ kg\ \frac{m}{s^2}}} = 0.157\ s.$$

Vježba 005

Kolica mase 60 kg, brzine 1 m/s, zaustave se sabijajući dugu oprugu za s = 10 cm. Odredite vrijeme zaustavljanja.

Rezultat: 0.157 s.

Zadatak 006 (Xena, gimnazija)

Napiši jednadžbu harmoničkog titranja materijalne točke ako je početni fazni kut:

a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) π d) $\frac{3\pi}{2}$ e) 2π.

Amplituda titranja je 5 cm, a perioda titranja 8 sekundi. Prikaži grafički sva navedena titranja.

Rješenje 006

Pomak, **elongacija** ili udaljenost x od položaja ravnoteže materijalne točke koja harmonički titra, mijenja se s vremenom prema

$$x = A \cdot \sin \frac{2\pi \cdot t}{T},$$

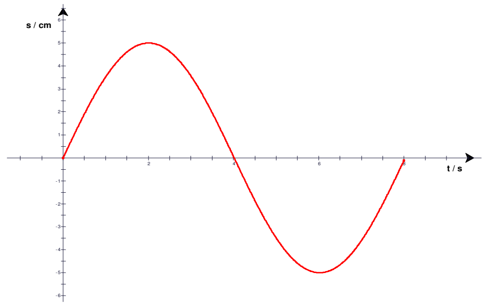
gdje je x elongacija, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku, A amplituda, tj. maksimalna elongacija i T vrijeme jednog titraja ili perioda. Ako materijalna točka ne počinje titrati iz položaja ravnoteže, elongacija x mijenja se s vremenom

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \varphi\right),$$

gdje je φ početni fazni kut.

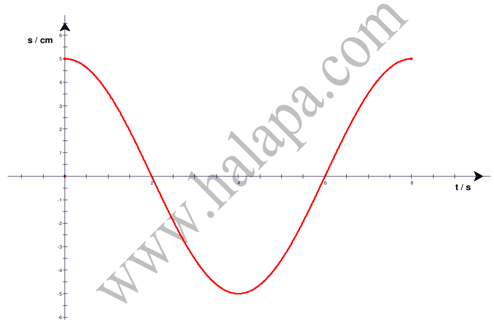
a) $\varphi = 0$, A = 5 cm, T = 8 s, x = ?

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \varphi\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{8\ s} + 0\right) = 5\ cm \cdot \sin\frac{\pi \cdot t}{4\ s}.$$



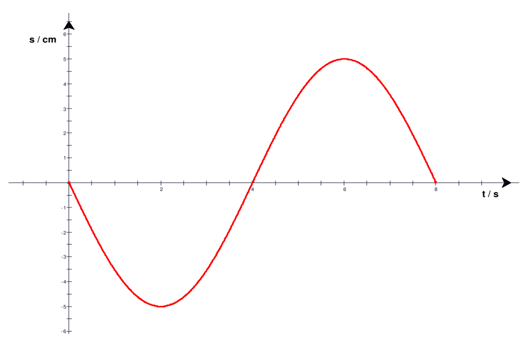
b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, A = 5 cm, T = 8 s, x = ?

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \varphi\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{8\ s} + \frac{\pi}{2}\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4\ s} + \frac{\pi}{2}\right).$$



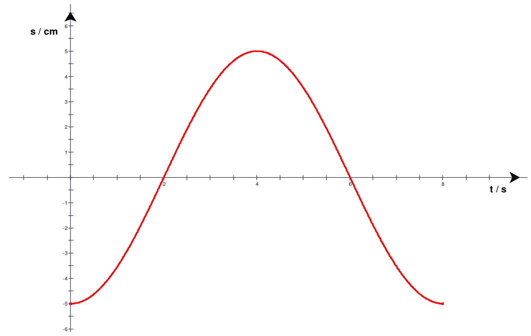
c) $\varphi = \pi$, A = 5 cm, T = 8 s, x = ?

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \varphi\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{8\ s} + \pi\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4\ s} + \pi\right).$$



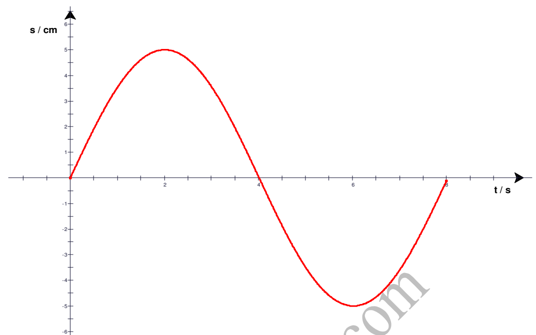
d) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, A = 5 cm, T = 8 s, x = ?

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \varphi\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{8\ s} + \frac{3\pi}{2}\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4\ s} + \frac{3\pi}{2}\right).$$



c) $\varphi = 2\pi$, A = 5 cm, T = 8 s, x = ?

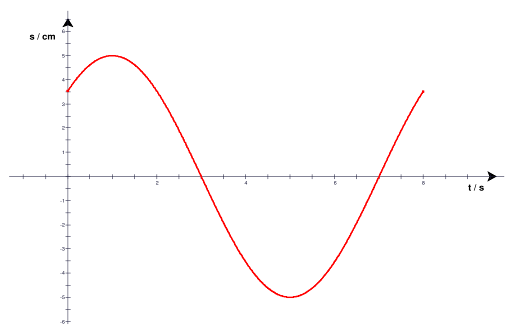
$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \varphi\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{8\ s} + 2\pi\right) = \left[\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha\right] = 5\ cm \cdot \sin\frac{\pi \cdot t}{4\ s}.$$



Vježba 006

Napiši jednadžbu harmoničkog titranja materijalne točke ako je početni fazni kut $\frac{\pi}{4}$. Amplituda titranja je 5 cm, a perioda titranja 8 sekundi. Prikaži grafički navedeno titranje.

Rezultat: $$x = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \varphi\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{8\ s} + \frac{\pi}{4}\right) = 5\ cm \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4\ s} + \frac{\pi}{4}\right).$$



Zadatak 007 (Tajanstvena vozačica, gimnazija)

Kolika je duljina niti njihala ako mu je frekvencija 4 Hz?

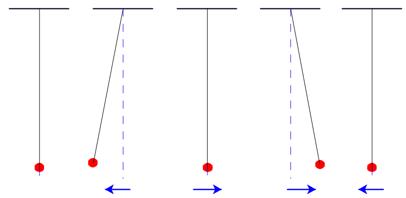
Rješenje 007

$\nu = 4\ Hz = 4\ s^{-1}$, $g = 9.81\ m/s^2$, $l = ?$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.



Budući da između frekvencije ν i periode T postoji veza, možemo pisati

$$\nu \cdot T = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \nu = \dfrac{1}{T} \\[2ex] T = \dfrac{1}{\nu}. \end{cases}$$

Perioda je:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{4\ Hz} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^{-1}} = 0.25\ s.$$

Iz formule za periodu izračunamo duljinu l:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \;/^{2} \;\Rightarrow\; T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \;/ \cdot g \;\Rightarrow\; g \cdot T^2 = 4\pi^2 \cdot l \;/ : 4\pi^2 \;\Rightarrow\; l = \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; l = g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = \left[\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = g \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(\frac{0.25\ s}{2 \cdot 3.14}\right)^2 = 0.0155\ m = 1.55\ cm.$$

Vježba 007

Kolika je duljina niti njihala ako mu je frekvencija 8 Hz?

Rezultat: 0.00389 m

Zadatak 008 (Tajanstvena vozačica, gimnazija)

Odredi konstantu opruge ako je na nju obješen uteg mase 100 g koji učini 10 titraja u 2 sekunde.

Rješenje 008

m = 100 g = [100 : 1000] = 0.1 kg, n = 10, t = 2 s, g = 9.81 m/s^2, k = ?

Frekvencija je broj ophoda (ili titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi)**.** Iz frekvencije lako nađemo period:

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{10}{2\ s} = 5\ s^{-1} = 5\ Hz \;\Rightarrow\; T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{5\ Hz} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{s^{-1}} = 0.2\ s.$$

Perioda titranja je:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \;\Rightarrow\; T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \;/^{2} \;\Rightarrow\; T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \;/ \cdot k \;\Rightarrow\; k \cdot T^2 = 4\pi^2 \cdot m \;/ : T^2 \;\Rightarrow\; k = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; k = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = \left[\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0.1\ kg \cdot \left(\frac{2 \cdot 3.14}{0.2\ s}\right)^2 = 98.60\,\frac{kg}{s^2} = 98.60\,\frac{N}{m}.$$

Vježba 008

Odredi konstantu opruge ako je na nju obješen uteg mase 200 g koji učini 10 titraja u 2 sekunde.

Rezultat: $197.19\,\dfrac{N}{m}.$

Zadatak 009 (Tajanstvena vozačica, gimnazija)

Kada se na oprugu objesi uteg mase 0.5 kg tada sustav titra s periodom 2 s. Koliku masu treba dodati da bi se perioda titranja povećala 3 puta?

Rješenje 009

$m_1 = 0.5$ kg, $T_1 = 2$ s, $m_2 = ?$, $\Delta m = ?$

Budući da je prema uvjetu zadatka $T_2 = 3 \cdot T_1$, slijedi:

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}, \quad T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}} = 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \; / : 2\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{k}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \; /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_2}{k} = 9 \cdot \frac{m_1}{k} \; / \cdot k \Rightarrow m_2 = 9 \cdot m_1 = 9 \cdot 0.5 \; kg = 4.5 \; kg.$$

Dodati treba:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 4.5 \text{ kg} - 0.5 \text{ kg} = 4 \text{ kg}.$$

Vježba 009

Kada se na oprugu objesi uteg mase 0.5 kg tada sustav titra s periodom 2 s. Koliku masu treba dodati da bi se perioda titranja povećala 4 puta?

Rezultat: $\Delta m = 7.5$ kg.

Zadatak 010 (Tajanstvena vozačica, gimnazija)

Njihalo ima duljinu 50 cm i periodu T_1, a drugo njihalo duljinu 70 cm i periodu T_2. Ne računajući T_1 i T_2 odredi duljinu njihala koje ima periodu $T_1 + T_2$.

Rješenje 010

$l_1 = 50$ cm, $l_2 = 70$ cm, $l = ?$

Iz formula za periode:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}, \quad T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}},$$

postavimo uvjet:

$$T = T_1 + T_2 \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} + 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \; / : 2\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{l_1}{g}} + \sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right] \Rightarrow \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{l_2}}{\sqrt{g}} \; / \cdot \sqrt{g} \Rightarrow \sqrt{l} = \sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} \Rightarrow \sqrt{l} = \sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} \; /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \right] \Rightarrow l = l_1 + 2 \cdot \sqrt{l_1 \cdot l_2} + l_2 =$$

$$= 50 \; cm + 2 \cdot \sqrt{50 \; cm \cdot 70 \; cm} + 70 \; cm = 238.32 \; cm.$$

Vježba 010

Njihalo ima duljinu 30 cm i periodu T_1, a drugo njihalo duljinu 120 cm i periodu T_2. Ne računajući T_1 i T_2 odredi duljinu njihala koje ima periodu $T_1 + T_2$.

Rezultat: 270 cm.

Zadatak 011 (Tajanstvena vozačica, gimnazija)

Kako se odnose periode ako duljinu njihala povećamo 2%?

Rješenje 011

$l_1 = l$, $l_2 = l + 2\% \cdot l = l + 0.02 \cdot l = 1.02 \, l$, $\frac{T_2}{T_1} = ?$

Gledamo omjer perioda:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\cdot\sqrt{\frac{l_2}{g}}}{2\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}}=\frac{\sqrt{\frac{l_2}{g}}}{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}=\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\right]=\sqrt{\frac{\frac{l_2}{g}}{\frac{l_1}{g}}}=\sqrt{\frac{l_2}{l_1}}=\sqrt{\frac{1.02\cdot l}{l}}=\sqrt{1.02}=1.0099504\approx 1.01.$$

Znači da je:

$$T_2 = 1.01 \cdot T_1.$$

Vježba 011

Kako se odnose periode ako duljinu njihala povećamo 6%?

Rezultat: $T_2 = 1.03 \cdot T_1$.

Zadatak 012 (Tajanstvena vozačica, gimnazija)

Amplituda titranja je 6 m, a perioda 0.5 s. Početna faza je 7/36. Napiši jednadžbu titranja i odredi elongaciju 3.4 sekunde nakon početka titranja.

Rješenje 012

$A = 6$ m, $T = 0.5$ s, $\varphi = 7/36$, $t = 3.4$ s, $x(t) = ?$

Jednadžba titranja je

$$x(t)=A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t+\varphi\right)\quad \text{ili}\quad x(t)=A\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right),\ \ \omega=\frac{2\pi}{T}.$$

Sada jednadžba titranja glasi:

$$x(t)=A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t+\varphi\right)=6\ m\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{0.5\ s}\cdot t+\frac{7}{36}\right)=6\ m\cdot\sin\left(4\pi\ s^{-1}\cdot t+\frac{7}{36}\right).$$

Elongacija za t = 3.4 s iznosi:

$$x(t)=6\ m\cdot\sin\left(4\pi\ s^{-1}\cdot 3.4\ s+\frac{7}{36}\right)=6\ m\cdot\sin\left(4\cdot 3.14\ s^{-1}\cdot 3.4\ s+\frac{7}{36}\right)=6\ m\cdot\sin\left(42.704+\frac{7}{36}\right)=$$

= [džepno računalo postaviti u stanje rada (mod): **RAD** (radijani)] = – 5. 30 m.

Vježba 012

Amplituda titranja je 4 m, a perioda 0.5 s. Početna faza je 7/36. Napiši jednadžbu titranja i odredi elongaciju 3.4 sekunde nakon početka titranja.

Rezultat: – 3. 54 m.

Zadatak 013 (Tajanstvena vozačica, gimnazija)

Dva jednostavna njihala čija je razlika duljina 22 cm zanjihana su istodobno. Za isto vrijeme jedno učini 30 titraja, drugo 36 titraja. Odredi duljine njihala.

Rješenje 013

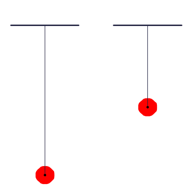
Kraće njihalo brže titra (ima manju periodu). To se vidi iz formule

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$$

jer je perioda upravo razmjerna s drugim korijenom duljine njihala

$$T\sim\sqrt{l}.$$

$l_1 = l + 22$, $l_2 = l$, $t_1 = t_2$, $n_1 = 30$, $n_2 = 36$, $l = ?$



Budući da se frekvencija ν može izraziti na dva načina:

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{n}{t} \\ \nu = \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

slijedi

$$\frac{n}{t} = \frac{1}{T} \Rightarrow t = n \cdot T.$$

Zbog uvjeta zadatka:

$$t_1 = t_2 \Rightarrow n_1 \cdot T_1 = n_2 \cdot T_2 \Rightarrow 30 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 36 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \; / : 2\pi \Rightarrow 30 \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 36 \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 \cdot \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{g}} = 36 \cdot \frac{\sqrt{l_2}}{\sqrt{g}} \; / \cdot \frac{\sqrt{g}}{6} \Rightarrow 5 \cdot \sqrt{l_1} = 6 \cdot \sqrt{l_2} \; /^2 \Rightarrow 25 \cdot l_1 = 36 \cdot l_2 \Rightarrow 25 \cdot (l + 22) = 36 \cdot l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25l + 550 = 36l \Rightarrow 11l = 550 \; / : 11 \Rightarrow l = 50 \; cm.$$

Duljine njihala su:

$$l_1 = l + 22 \text{ cm} = 50 \text{ cm} + 22 \text{ cm} = 72 \text{ cm}, \quad l_2 = l = 50 \text{ cm}.$$

Vježba 013

Dva jednostavna njihala čija je razlika duljina 22 cm zanjihana su istodobno. Za isto vrijeme jedno učini 15 titraja, drugo 18 titraja. Odredi duljine njihala.

Rezultat: $l_1 = 72$ cm, $l_2 = l = 50$ cm.

Zadatak 014 (Tajanstvena vozačica, gimnazija)

Sat s matematičkim njihalom zaostaje 3 minute na dan. Za koliko postotaka treba smanjiti duljinu njihala da sat ide točno?

Rješenje 014

Kad je sat točan, perioda njihala je T = 1 s. Duljina njihala koja odgovara toj periodi je

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \; /^2 \Rightarrow T_1^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l_1}{g} \; / \cdot g \Rightarrow g \cdot T_1^2 = 4\pi^2 \cdot l_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1 = g \cdot \frac{T_1^2}{4\pi^2} = g \cdot \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2.$$

Tijekom dana (tijekom 24 sata) sat zaostaje 3 minute $\left[3 \text{ min} = \frac{3}{60} \; h = 0.05 \; h\right]$. Znači da njihalo u danu,

(24 · 60 · 60 = 86 400 s),

učini (24 – 0.05) · 60 · 60 = 86 220 titraja. Prema tome perioda njihala je tada

$$T_2 = \frac{24}{24 - 0.05} = \frac{24}{23.95} \; s,$$

a duljina l_2 koja odgovara toj periodi je

$$l_2 = g \cdot \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2.$$

Nađimo koliki je omjer duljina l_1 i l_2 njihala, to jest

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{g\cdot\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2}{g\cdot\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2}=\frac{\frac{T_1^2}{4\pi^2}}{\frac{T_2^2}{4\pi^2}}=\frac{T_1^2}{T_2^2}=\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=\left(\frac{1\ s}{\frac{24}{23.95}\ s}\right)^2=\left(\frac{23.95}{24}\right)^2=0.9958.$$

U postotku to je:

$$\frac{l_1}{l_2}\cdot 100\%=0.9958\cdot 100\%=99.58\%.$$

Duljinu niti njihala treba skratiti 0.42% (100% – 99.58% = 0.42%).

Vježba 014

Sat s matematičkim njihalom zaostaje 1 sat na dan. Za koliko postotaka treba smanjiti duljinu njihala da bi sat išao točno?

Rezultat: 8.16%.

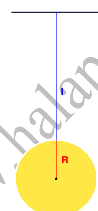
Zadatak 015 (Tajanstvena vozačica, gimnazija)

Metalna kugla polumjera 30 cm visi na konopcu duljine 1 m. Odredi periodu titranja ovog sustava.

Rješenje 015

R = 30 cm = [30 : 100] = 0.3 m, l = 1 m, T = ?

Draga vozačice, zadatak ovog tipa može se "voziti" , tj. riješiti na dva načina.



1.inačica

Pretpostavimo da je to matematičko njihalo (pretpostavka vrijedi samo ako je R << l, tj. polumjer kugle je puno manji u odnosu na duljinu niti. Tada perioda iznosi:

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2.inačica

Zadano njihalo je fizičko njihalo pa je perioda:

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{m\cdot g\cdot L}},$$

gdje je I moment tromosti, m masa i L udaljenost osi od središta mase (težišta) njihala. U ovom slučaju je L = l + R.

Moment tromosti materijalne točke mase m na udaljenosti r od osi rotacije je

$$I=m\cdot r^2.$$

U danom zadatku to iznosi

$$I=m\cdot(l+R)^2.$$

Moment tromosti kugle polumjera R s obzirom na os koja prolazi središtem je

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2.$$

Ukupni moment tromosti zadanog sustava je

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 + m \cdot (l + R)^2.$$

Sada je perioda fizičkog njihala jednaka:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 + m \cdot (l + R)^2}{m \cdot g \cdot (l + R)}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 + m \cdot (l + R)^2 \quad / \cdot 5}{m \cdot g \cdot (l + R) \quad / \cdot 5}} =$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot R^2 + 5 \cdot m \cdot (l + R)^2 \quad / : m}{5 \cdot m \cdot g \cdot (l + R) \quad / : m}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot R^2 + 5 \cdot (l + R)^2}{5 \cdot g \cdot (l + R)}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0.3^2 + 5 \cdot (1 + 0.3)^2}{5 \cdot 9.81 \cdot (1 + 0.3)}} =$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0.18 + 8.45}{63.765}} = 2.31 \ s.$$

Vježba 015

Metalna kugla polumjera 20 cm visi na konopcu duljine 1 m. Odredi periodu titranja ovog sustava.

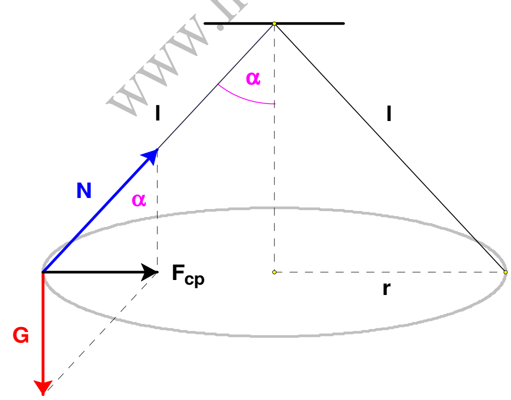
Rezultat: 2.21 s.

Zadatak 016 (Marko, gimnazija)

Uteg učvršćen na niti duljine 75 cm kruži jednoliko u vodoravnoj ravnini. Kolika će biti perioda okretanja ako je nit otklonjena od vertikale za 30°?

Rješenje 016

l = 75 cm = [75 : 100] = 0.75 m, α = 30°, g = 9.81 m/s², T = ?



Iz slike se vidi da na uteg djeluju dvije sile: sila teža G i napetost niti N (sila kojom nit drži uteg). Budući da se uteg giba po kružnici, rezultanta ima smjer prema središtu kružnice polumjera r (centripetalna sila!).

$$\left. F_{cp} = m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}, \quad G = m \cdot g, \quad r = l \cdot \sin\alpha \right\} \Rightarrow F_{cp} = G \cdot tg\,\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} = m \cdot g \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad / : m \Rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot l \cdot \sin\alpha}{T^2} = g \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad / : \sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2} = \frac{g}{\cos\alpha} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot l \cdot \cos\alpha}{g} \quad / \sqrt{\ } \Rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l \cdot \cos\alpha}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0.75 \ m \cdot \cos 30^0}{9.81 \ \frac{m}{s^2}}} = 1.62 \ s.$$

Vježba 016

Uteg učvršćen na niti duljine 75 cm kruži jednoliko u vodoravnoj ravnini. Kolika će biti perioda okretanja ako je nit otklonjena od vertikale za 25°?

Rezultat: 1.65 s.

Zadatak 017 (Gabi, gimnazija)

Razmak između prvog i četvrtog čvora stojnog vala je 30 cm. Kolika je valna duljina?

Rješenje 017

d = 30 cm, λ = ?

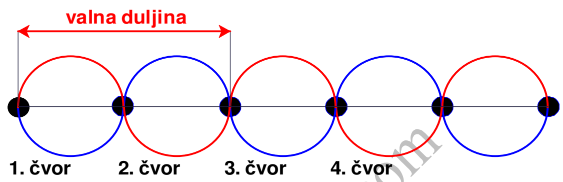
Stojni val je osobit slučaj interferencije dvaju valova koji se u istom sredstvu šire suprotnim smjerovima, a jednakih su duljina, amplituda i podudaraju se u fazama.

Čvorovi stojnog vala su točke koje ne titraju (neprestano miruju).

Trbusi stojnog vala su točke koje titraju najvećim amplitudama.

Udaljenost od čvora (točka koja ne titra) do trbuha (točka koja titra maksimalnom ampitudom) vala jednaka je: $\frac{\lambda}{4}$.

Razmak između čvorova je: $\frac{\lambda}{2}$.



Budući da je razmak između prvog i četvrtog čvora stojnog vala 30 cm, vrijedi:

$$3 \cdot \frac{\lambda}{2} = d \Rightarrow 3 \cdot \frac{\lambda}{2} = 30 \,/\cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \lambda = 20\ cm.$$

Vježba 017

Razmak između drugog i petog čvora stojnog vala je 30 cm. Kolika je valna duljina?

Rezultat: $\lambda = 20\ cm.$

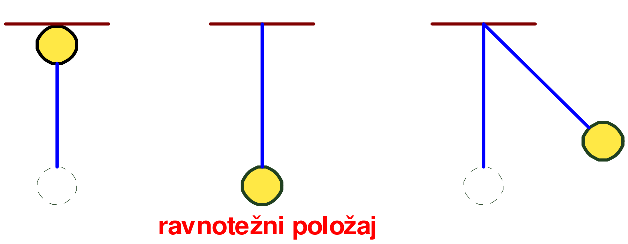
Zadatak 018 (Ana, gimnazija)

U prvom slučaju kuglica matematičkog njihala podigne se do objesišta i pusti da slobodno pada. U drugom slučaju kuglica se otkloni za mali kut iz ravnotežnog položaja i ispusti da titra. Koliko iznosi omjer vremena u kojem kuglica stigne u točku ravnotežnog položaja u prvom i drugom slučaju?

Rješenje 018

$$\frac{t_1}{t_2} = ?$$

Kada se kuglica podigne do objesišta i pusti da slobodno pada vrijeme pada iznosi:



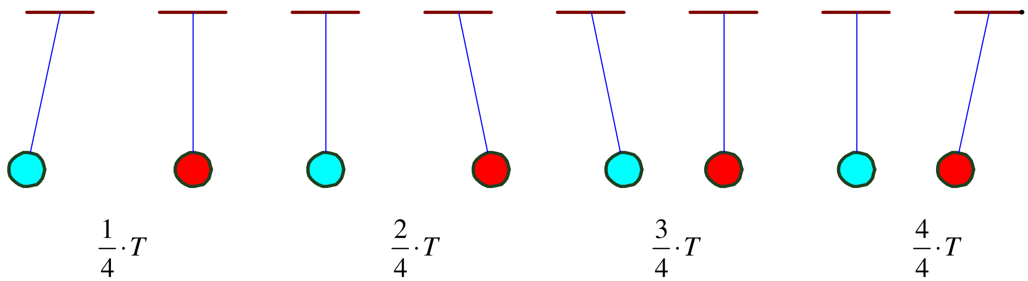
$$l = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{g}}.$$

U drugom slučaju kuglica se otkloni za mali kut iz ravnotežnog položaja i ispusti da titra. Period titranja matematičkog njihala duljine l je:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je g ubrzanje sile teže. Kad se kuglica otkloni iz ravnotežnog položaja, vrijeme potrebno da stigne u točku ravnotežnog položaja je:

$$t_2 = \frac{1}{4} \cdot T = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Omjer vremena iznosi:

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{\sqrt{\frac{2\cdot l}{g}}}{\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}}=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\frac{2\cdot l}{g}}{\frac{l}{g}}}=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{2}=0.90.$$

Vježba 018

U prvom slučaju kuglica matematičkog njihala podigne se do polovice objesišta i pusti da slobodno pada. U drugom slučaju kuglica se otkloni za mali kut iz ravnotežnog položaja i ispusti da titra. Koliko iznosi omjer vremena u kojem kuglica stigne u točku ravnotežnog položaja u prvom i drugom slučaju?

Rezultat: 0.64.

Zadatak 019 (Mirta, gimnazija)

Sat s matematičkim njihalom ide naprijed 3 minute na dan. Za koliko postotaka treba produljiti duljinu njihala da sat ide točno?

Rješenje 019

Kad je sat točan, perioda njihala je T = 1 s. Duljina njihala koja odgovara toj periodi je

$$T_1=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}\ /^2\ \Rightarrow\ T_1^2=4\pi^2\cdot\frac{l_1}{g}\ /\cdot g\ \Rightarrow\ g\cdot T_1^2=4\pi^2\cdot l_1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ l_1=g\cdot\frac{T_1^2}{4\pi^2}=g\cdot\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2.$$

Tijekom dana (tijekom 24 sata) sat ide naprijed 3 minute $\left[3\ \min=\frac{3}{60}\ h=0.05\ h\right]$. Znači da njihalo u danu,

(24 · 60 · 60 = 86 400 s),

učini (24 + 0.05) · 60 · 60 = 86 58 titraja. Prema tome perioda njihala je tada

$$T_2=\frac{24}{24+0.05}=\frac{24}{24.05}\ s,$$

a duljina l_2 koja odgovara tom periodu jest

$$l_2=g\cdot\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2.$$

Nađimo koliki je omjer duljina l_1 i l_2 njihala, to jest

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{g\cdot\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2}{g\cdot\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2}=\frac{\frac{T_1^2}{4\pi^2}}{\frac{T_2^2}{4\pi^2}}=\frac{T_1^2}{T_2^2}=\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=\left(\frac{1\ s}{\frac{24}{24.05}\ s}\right)^2=\left(\frac{24.05}{24}\right)^2=1.00417.$$

U postotku to je:

$$\frac{l_1}{l_2}\cdot 100\%=1.00417\cdot 100\%=100.417\%.$$

Duljinu niti njihala treba produljiti 0.417% (100.417% – 100% = 0.417%).

Vježba 019

Sat s matematičkim njihalom ide naprijed 1 sat na dan. Za koliko postotaka treba produljiti duljinu njihala da sat ide točno?

Rezultat: 8.51%.

Zadatak 020 (Mirta, gimnazija)

Kuglica jednostavnog njihala duljine l izvedena je iz ravnotežnog položaja u točku A, a zatim puštena. Ispod objesišta njihala postavljen je tanak štap na udaljenosti $\frac{1}{2}\cdot l$ okomito na ravninu titranja. Kolika je duljina njihala ako kuglica napravi 2 puna titraja za 3 sekunde?

Rješenje 020

$$l_1=l,\quad l_2=\frac{1}{2}\cdot l,\quad n=2,\quad t=3\ s,\quad g=9.81\ \frac{m}{s^2},\quad l=?$$

Pretpostavimo da su amplitude njihala male, a trenje zanemarimo.

Njihalo napravi polovicu titraja sa dužinom l_1 za vrijeme poluperiode $\frac{1}{2}\cdot T_1$. Drugu polovicu titraja njihalo napravi sa dužinom l_2 za vrijeme poluperiode $\frac{1}{2}\cdot T_2$. Vrijednosti tih poluperioda su:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot T_1=\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}=\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}},\\ \frac{1}{2}\cdot T_2=\pi\cdot\sqrt{\frac{l_2}{g}}=\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot l}{g}}=\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{2\cdot g}}.\end{array}\right.$$

Ukupna perioda njihala je:

$$T=\frac{1}{2}\cdot T_1+\frac{1}{2}\cdot T_2=\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}+\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{2\cdot g}}=\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

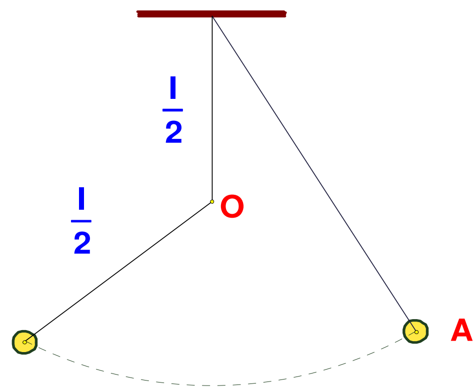
Iz zadanih podataka dobije se perioda T:

$$\left.\begin{array}{l}n=2\\ t=3\ s\end{array}\right\}\Rightarrow T=\frac{t}{n}=\frac{3\ s}{2}=1.5\ s.$$

Sada je duljina njihala jednaka:

$$T=\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ /^2\ \Rightarrow\ T^2=\pi^2\cdot\frac{l}{g}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\ /\cdot g\ \Rightarrow\ g\cdot T^2=\pi^2\cdot l\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \frac{g \cdot T^2}{\pi^2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = g \cdot \left[\frac{T}{\pi \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \right]^2 = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left[\frac{1.5\ s}{\pi \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \right]^2 = 0.77\ m = 77\ cm.$$



Vježba 020

Kuglica jednostavnog njihala duljine l izvedena je iz ravnotežnog položaja u točku A, a zatim puštena. Ispod objesišta njihala postavljen je tanak štap na udaljenosti $\frac{1}{2} \cdot l$ okomito na ravninu titranja. Kolika je duljina njihala ako kuglica napravi 2 puna titraja za 4 sekunde?

Rezultat: 1.37 m.