

Zadatak 261 (Ante, srednja škola)

Mjesec obiđe Zemlju 13 puta u godini. Kolika je kutna brzina kojom Mjesec kruži oko Zemlje? Godina ima 365 dana.

Rješenje 261

$$n = 13, \quad \varphi = 2 \cdot \pi, \quad t = 365 \text{ d} = [365 \cdot 24 \cdot 3600] = 31536000 \text{ s}, \quad \omega = ?$$

Kutna brzina ω mjeri se u rad / s i određena je izrazom

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta t}.$$

Obično se uzima

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi, \quad \Delta t = t$$

pa je

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

$$\omega = \frac{n \cdot \varphi}{t} = \frac{13 \cdot 2 \cdot \pi}{31536000 \text{ s}} = 2.59 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



Vježba 261

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 262 (Matija, tehnička škola)

Biciklist vozi u krugu promjera 6 m tako da ga prijede za 4 s. Koliki mora biti najmanji koeficijent trenja na toj podlozi da se može tako voziti? (akceleracija slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 262

$$2 \cdot r = 6 \text{ m}, \quad T = 4 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad \mu = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi).

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta).

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek

počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Sila trenja djeluje kao centripetalna sila pa se biciklist može kružno voziti.

$$F_{tr} = F_{cp} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} / \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{r \cdot g}.$$

Dalje slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \\ \mu = \frac{v^2}{r \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow \mu = \frac{\left(\frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}\right)^2}{r \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi^2}{T^2 \cdot r \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi^2}{T^2 \cdot r \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{4 \cdot r \cdot \pi^2}{T^2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{4 \cdot r \cdot \pi^2}{g \cdot T^2} \Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi^2}{g \cdot T^2} = \frac{2 \cdot 6 \text{ m} \cdot \pi^2}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (4 \text{ s})^2} = 0.75.$$

Vježba 262

Biciklist vozi u krugu promjera 12 m tako da ga prijede za 4 s. Koliki mora biti najmanji koeficijent trenja na toj podlozi da se može tako voziti? (akceleracija slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.51.

Zadatak 263 (Nutrix, medicinska škola)

Djevojčica sjedi na rubu vrtuljka polumjera 4 m koji u 2 s napravi jedan okret. Kolika je centripetalna akceleracija djevojčice na vrtuljku?

Rješenje 263

$$r = 4 \text{ m}, \quad T = 2 \text{ s}, \quad a = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kod jednolikoga gibanja po kružnici brzina v je konstantna po iznosu, ali ne i po smjeru. Budući da postoji promjena brzine po smjeru, mora postojati akceleracija koju nazivamo centripetalnom akceleracijom. Ona iznosi:

$$a_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r,$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta).

$$a_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r = \frac{4 \cdot \pi^2}{(2 \text{ s})^2} \cdot 4 \text{ m} = 39.48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 263

Djevojčica sjedi na rubu vrtuljka polumjera 8 m koji u 2 s napravi jedan okret. Kolika je centripetalna akceleracija djevojčice na vrtuljku?

Rezultat: $78.96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Zadatak 264 (Iva, srednja škola)

Brzina kruženja Zemlje oko Sunca je 30 puta veća od brzine kruženja Mjeseca oko Zemlje. Mjesec obiđe Zemlju približno 13 puta u godini dana. Koliki je omjer udaljenosti Zemlje od Sunca (r_z) i udaljenosti Mjeseca od Zemlje (r_m)?

A. $r_z : r_m = 1 : 13$ B. $r_z : r_m = 13 : 1$ C. $r_z : r_m = 1 : 390$ D. $r_z : r_m = 390 : 1$

Rješenje 264

$$v_z = 30 \cdot v_m, \quad v_m = 13 \cdot v_z, \quad r_z : r_m = ?$$

Frekvencija ili učestalost ν je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi).

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina v iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je r polumjer kružnice, ν frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

$$\left. \begin{array}{l} v_z = 2 \cdot r_z \cdot \pi \cdot \nu_z \\ v_m = 2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot \nu_m \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{2 \cdot r_z \cdot \pi \cdot \nu_z}{2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot \nu_m} \Rightarrow \frac{30 \cdot v_m}{v_m} = \frac{2 \cdot r_z \cdot \pi \cdot \nu_z}{2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot 13 \cdot \nu_z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{30 \cdot v_m}{v_m} = \frac{2 \cdot r_z \cdot \pi \cdot \nu_z}{2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot 13 \cdot \nu_z} \Rightarrow \frac{30}{1} = \frac{r_z}{13 \cdot r_m} \Rightarrow \frac{r_z}{r_m} = \frac{30}{13} \Rightarrow \frac{r_z}{r_m} = \frac{30}{13} \cdot \frac{13}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r_z}{r_m} = \frac{390}{1} \Rightarrow r_z : r_m = 390 : 1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 264

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 265 (Maturant NN, medicinska škola)

Tijelo se giba jednoliko po kružnici polumjera r_1 . Koliki treba biti polumjer r_2 kružnice po kojoj bi se to isto tijelo, uz jednaku centripetalnu silu, gibalo s dvostruko manjim periodom?

A. $r_2 = 0.25 \cdot r_1$ B. $r_2 = 0.5 \cdot r_1$ C. $r_2 = 2 \cdot r_1$ D. $r_2 = 4 \cdot r_1$

Rješenje 265

$$m, \quad r_1, \quad F_{cp}, \quad T_1 = T, \quad T_2 = 0.5 \cdot T, \quad r_2 = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r,$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

$$\left. \begin{array}{l} F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_2^2} \cdot r_2 \\ F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_1^2} \cdot r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_2^2} \cdot r_2 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_1^2} \cdot r_1 \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{(0.5 \cdot T)^2} \cdot r_2 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{0.25 \cdot T^2} \cdot r_2 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r_1 \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{0.25 \cdot T^2} \cdot r_2 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r_1 \cdot \frac{0.25 \cdot T^2}{m \cdot 4 \cdot \pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = 0.25 \cdot r_1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 265

Tijelo se giba jednoliko po kružnici polumjera r_1 . Koliki treba biti polumjer r_2 kružnice po kojoj bi se to isto tijelo, uz jednaku centripetalnu silu, gibalo s dvostruko većom periodom?

$$A. r_2 = 0.25 \cdot r_1 \quad B. r_2 = 0.5 \cdot r_1 \quad C. r_2 = 2 \cdot r_1 \quad D. r_2 = 4 \cdot r_1$$

Rezultat: D.

Zadatak 266 (Maturant, medicinska škola)

Perioda kruženja umjetnog satelita oko planeta iznosi T . Udaljenost satelita od središta planeta iznosi r . Na kolikoj udaljenosti od središta planeta kruži drugi satelit kojemu je perioda

kruženja $\frac{T}{8}$?

$$A. \frac{r}{8} \quad B. \frac{r}{4} \quad C. 4 \cdot r \quad D. 8 \cdot r$$

Rješenje 266

$$T_1 = T, \quad r_1 = r, \quad T_2 = T / 8, \quad r_2 = x = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r,$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r , među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Treći Keplerov zakon

Omjer kvadrata ophodnoga vremena i kuba srednje udaljenosti planeta od Sunca, tj. kuba velike poluosi eliptične planetne staze jednak je za sve planete Sunčeva sustava.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Neka je m masa umjetnog satelita koji kruži oko planeta mase M . Budući da sila gravitacije između satelita mase m i planeta mase M mora biti jednaka centripetalnoj sili, vrijedi sustav jednadžba.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r_1}{T_1^2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2} \\ \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r_2}{T_2^2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r_1}{T_1^2}}{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r_2}{T_2^2}} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r_1}{T_1^2}}{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r_2}{T_2^2}} &= \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2}} \Rightarrow \frac{r_1 \cdot T_2^2}{r_2 \cdot T_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{r \cdot \left(\frac{T}{8}\right)^2}{x \cdot T^2} = \frac{x^2}{r^2} \Rightarrow \frac{r \cdot T^2}{64} = \frac{x^2}{r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{r \cdot T^2}{64} &= \frac{x^2}{r^2} \Rightarrow \frac{r}{64 \cdot x} = \frac{x^2}{r^2} \Rightarrow \frac{x^2}{r^2} = \frac{r}{64 \cdot x} \Rightarrow \frac{x^2}{r^2} = \frac{r}{64 \cdot x} \cdot x \cdot r^2 \Rightarrow x^3 = \frac{r^3}{64} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 &= \frac{r^3}{64} \cdot \sqrt[3]{\quad} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{r^3}{64}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\left(\frac{r}{4}\right)^3} \Rightarrow x = \frac{r}{4}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

Treći Keplerov zakon

$$\begin{aligned} \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \cdot \frac{r_2^3 \cdot T_2^2}{r_1^3 \cdot T_1^2} \Rightarrow r_2^3 = \frac{r_1^3 \cdot T_2^2}{T_1^2} \Rightarrow r_2^3 = \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot r_1^3 \Rightarrow r_2^3 = r_1^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow r_2^3 = r_1^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\quad} \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{r_1^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2} \Rightarrow r_2 = r_1 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T}{8}\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T}{8}\right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} \Rightarrow r_2 = \frac{r}{4}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

Vježba 266

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 267 (Mihael, gimnazija)

Bubanj perilice za rublje koji se okreće brzinom od 900 okretaja u minuti jednoliko usporava na 300 okretaja u minuti u 50 okretaja. Odredite:

- kutnu akceleraciju
- vrijeme potrebno za tih 50 okretaja.

Rješenje 267

$$n_1 = 900, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad n_2 = 300, \quad N = 50, \quad \alpha = ?, \quad t = ?$$

Kutna brzina ω i broj okretaja n po sekundi povezani su u formuli:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t}.$$

Kutnu akceleraciju α definiramo kao brzinu promjene kutne brzine:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$$

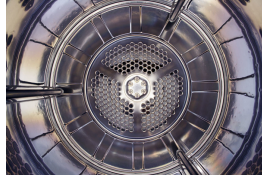
Kod jednoliko ubrzanog ili usporenog kružnog gibanja (rotacije) prijedeni kut φ računa se po formuli

$$\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t,$$

gdje je ω_1 početna kutna brzina, ω_2 konačna kutna brzina.

Prijedeni kut φ i ukupni broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$



a)

Iz formula za kut φ odredimo N .

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \\ \varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow N = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4 \cdot \pi} \cdot t.$$

Iz sustava jednadžba dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} N = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4 \cdot \pi} \cdot t \\ \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow N \cdot \alpha = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4 \cdot \pi} \cdot t \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N \cdot \alpha = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4 \cdot \pi} \cdot t \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \Rightarrow N \cdot \alpha = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4 \cdot \pi} \Rightarrow N \cdot \alpha = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4 \cdot \pi \cdot N}.$$

Izračunajmo kutne brzine ω_1 i ω_2 .

- $\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n_1}{t} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{900}{60 \text{ s}} = 30 \cdot \pi \frac{1}{\text{s}}$
- $\omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n_2}{t} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{300}{60 \text{ s}} = 10 \cdot \pi \frac{1}{\text{s}}$

Sada je:

$$\alpha = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4 \cdot \pi \cdot N} = \frac{\left(10 \cdot \pi \frac{1}{\text{s}}\right)^2 - \left(30 \cdot \pi \frac{1}{\text{s}}\right)^2}{4 \cdot \pi \cdot 50} = -4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

b)

Vrijeme t iznosi:

$$N = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4 \cdot \pi} \cdot t \Rightarrow \frac{\omega_1 + \omega_2}{4 \cdot \pi} \cdot t = N \Rightarrow \frac{\omega_1 + \omega_2}{4 \cdot \pi} \cdot t = N \cdot \frac{4 \cdot \pi}{\omega_1 + \omega_2} \Rightarrow t = \frac{4 \cdot \pi \cdot N}{\omega_1 + \omega_2}$$

$$= \begin{bmatrix} N = 50 \\ \omega_1 = 30 \cdot \pi \frac{1}{s} \\ \omega_2 = 10 \cdot \pi \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 50}{30 \cdot \pi \frac{1}{s} + 10 \cdot \pi \frac{1}{s}} = \text{[calculator icon]} = 5 \text{ s.}$$

Vježba 267

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 268 (Miroslav, obrtnička škola)

Na slici su prikazane kružne staze dvaju tijela. Perioda kruženja tijela mase m po kružnici polumjera r iznosi T . Na tijelo pritom djeluje ukupna sila F . Kolika je ukupna sila potrebna da bi to tijelo kružilo jednakom periodom T po kružnici radijusa $2 \cdot r$?



- A. $\frac{F}{4}$ B. $\frac{F}{2}$ C. $2 \cdot F$ D. $4 \cdot F$

Rješenje 268

$r, m, 2 \cdot r$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r,$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

1. inačica

$$\left. \begin{aligned} F &= m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \\ F_1 &= m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot r}{T^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{F_1}{F} = \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot r}{T^2}}{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}} \Rightarrow \frac{F_1}{F} = \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot r}{T^2}}{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F} = 2 \Rightarrow \frac{F_1}{F} = 2 \cdot F \Rightarrow F_1 = 2 \cdot F.$$

Odgovor je pod C.

2. inačica

Pogledajmo formulu

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r,$$

Ako su m i T stalne veličine, onda je sila F razmjerna (proporcionalna) sa polumjerom r .

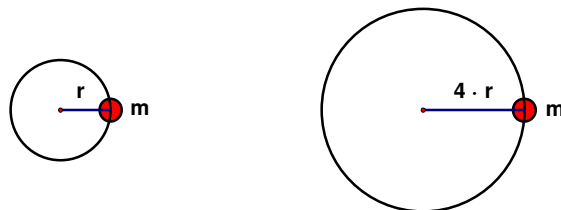
$$F \sim r.$$

Poveća li se polumjer r tri puta sila F bit će tri puta veća. Smanji li se polumjer r četiri puta sila F bit će četiri puta manja. U zadatku je polumjer dva puta veći pa je sila dva puta veća.

Odgovor je pod C.

Vježba 268

Na slici su prikazane kružne staze dvaju tijela. Perioda kruženja tijela mase m po kružnici polumjera r iznosi T . Na tijelo pritom djeluje ukupna sila F . Kolika je ukupna sila potrebna da bi to tijelo kružilo jednakom periodom T po kružnici radijusa $4 \cdot r$?



- A. $\frac{F}{4}$ B. $\frac{F}{2}$ C. $2 \cdot F$ D. $4 \cdot F$

Rezultat: D.

Zadatak 269 (Dox, strukovna škola)

Odredi kutnu brzinu rotacije Zemlje oko svoje osi kao i njezinu obodnu brzinu obzirom na ekvator znajući da je polumjer Zemlje 6377.397 km.

Rješenje 269

$$T = 24 \text{ h} = [24 \cdot 3600] = 86400 \text{ s}, \quad r = 6377.397 \text{ km} = 6.3774 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \omega = ?, \quad v = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega.$$

Kutna brzina ω iznosi:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T},$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta).

Ekvator je zamišljena crta na površini nebeskog tijela koja je jednako udaljena od obaju polova. On dijeli površinu na sjevernu i južnu polutku.

Kutna brzina:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{86400 \text{ s}} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad / s}.$$

Obodna brzina:

$$v = r \cdot \omega \Rightarrow v = r \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} = 6.3774 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{86400 \text{ s}} = 463.78 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 269

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 270 (Marija, gimnazija)

Mali i veliki kotač povezani su remenom. Mali kotač ima polumjer 30 cm, a veliki 120 cm.

- Ako je kutna brzina malog kotača 12 rad / s , kolika je kutna brzina velikog kotača?
- Kolika je brzina remena?
- Odredite omjer kutnih brzina malog i velikog kotača.

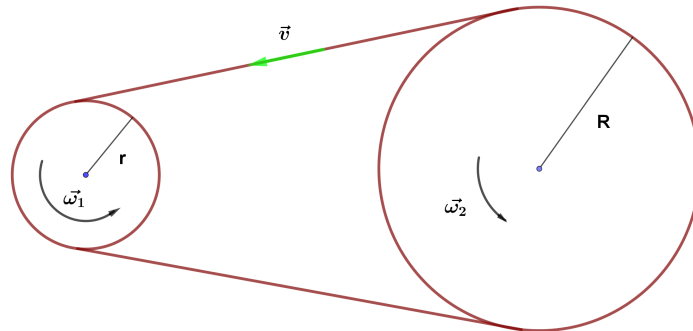
Rješenje 270

$$r = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}, \quad R = 120 \text{ cm} = 1.2 \text{ m}, \quad \omega_1 = 12 \text{ rad / s}, \quad \omega_2 = ?, \quad v = ?,$$

$$\omega_1 : \omega_2 = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega.$$



a)

Obodne brzine kotača i remena su jednake pa vrijedi

$$r \cdot \omega_1 = R \cdot \omega_2 \Rightarrow R \cdot \omega_2 = r \cdot \omega_1 \Rightarrow R \cdot \omega_2 = r \cdot \omega_1 \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow \omega_2 = \frac{r}{R} \cdot \omega_1 = \frac{0.3 \text{ m}}{1.2 \text{ m}} \cdot 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

b)

Brzina remena iznosi:

$$v = r \cdot \omega_1 = 0.3 \text{ m} \cdot 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ili} \quad v = R \cdot \omega_2 = 1.2 \text{ m} \cdot 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c)

Omjer kutnih brzina je:

$$\begin{aligned} r \cdot \omega_1 &= R \cdot \omega_2 \Rightarrow r \cdot \omega_1 = R \cdot \omega_2 \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1.2 \text{ m}}{0.3 \text{ m}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1.2 \text{ m}}{0.3 \text{ m}} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{4}{1} \Rightarrow \omega_1 : \omega_2 = 4 : 1. \end{aligned}$$

Vježba 270

Mali i veliki kotač povezani su remenom. Mali kotač ima polumjer 20 cm, a veliki 80 cm. Odredite omjer kutnih brzina malog i velikog kotača.

Rezultat: 4 : 1.

Zadatak 271 (Melita, gimnazija)

Konac duljine 40 cm prekinut će se ako njegova napetost premaši 2 N. Za njegov kraj vežemo tijelo mase 50 g i rotiramo u vertikalnoj ravnini. Koliki maksimalan broj okretaja u sekundi dopušta čvrstoća konca? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

$$A. 2.76 \text{ s}^{-1} \quad B. 1.63 \text{ s}^{-1} \quad C. 0.92 \text{ s}^{-1} \quad D. 1.12 \text{ s}^{-1} \quad E. 1.38 \text{ s}^{-1}$$

Rješenje 271

$$r = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}, \quad F = 2 \text{ N}, \quad m = 50 \text{ g} = 0.05 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad f = ?$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža $G = m \cdot g$ koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka

gravitacijskoj sili.

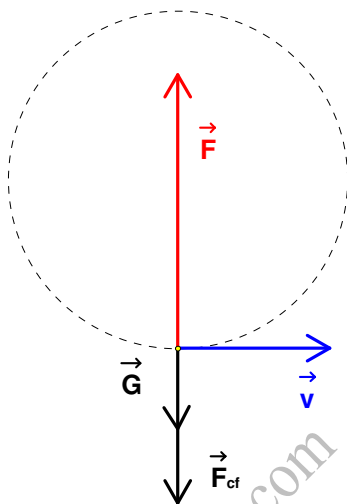
Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2,$$

gdje je f frekvencija (broj okreta u jedinici vremena). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice. U sustavu koji se giba po kružnici pojavljuje se centrifugalna sila po iznosu jednaka

$$F_{cf} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2,$$

a u smjeru od središta kružnice.



Napetost konca F je po iznosu jednaka zbroju sile teže G i centrifugalne sile F_{cf} .

$$\begin{aligned} G + F_{cf} &= F \Rightarrow F_{cf} = F - G \Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2 = F - m \cdot g \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2 &= F - m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow f^2 = \frac{F - m \cdot g}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow \\ \Rightarrow f^2 &= \frac{F - m \cdot g}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{F - m \cdot g}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r}} \Rightarrow f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{F - m \cdot g}{m \cdot r}} \Rightarrow \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \text{ N} - 0.05 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0.05 \text{ kg} \cdot 0.4 \text{ m}}} = 1.38 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod E.

Vježba 271

Konac duljine 40 cm prekinut će se ako njegova napetost premaši 4 N. Za njegov kraj vežemo tijelo mase 100 g i rotiramo u vertikalnoj ravnini. Koliki maksimalan broj okretaja u sekundi dopušta čvrstoća konca? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

A. 2.76 s^{-1} B. 1.63 s^{-1} C. 0.92 s^{-1} D. 1.12 s^{-1} E. 1.38 s^{-1}

Rezultat: E.

Zadatak 272 (Dada, maturantica medicinske škole)

Dva kamena jednakih masa kruže u horizontalnoj ravnini po kružnicama različitih polumjera R_1 i R_2 . Pritom je $R_2 = 2 \cdot R_1$. Ophodno vrijeme (perioda) oba kamena je isto. Kakav je odnos sila napetosti užeta F u drugom i prvom slučaju?

A. $F_2 = \frac{1}{4} \cdot F_1$ B. $F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1$ C. $F_2 = F_1$ D. $F_2 = 2 \cdot F_1$

Rješenje 272

$$m_1 = m_2 = m, \quad R_2 = 2 \cdot R_1, \quad T_1 = T_2 = T, \quad F_2 : F_1 = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r,$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R_1 \\ F_2 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R_1 \\ F_2 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot 2 \cdot R_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot 2 \cdot R_1}{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R_1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot 2 \cdot R_1}{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 2 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 2 \cdot F_1 \Rightarrow F_2 = 2 \cdot F_1.$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

$$F_2 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R_2 \Rightarrow F_2 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot 2 \cdot R_1 \Rightarrow F_2 = 2 \cdot \left(m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R_1 \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[F_1 = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R_1 \right] \Rightarrow F_2 = 2 \cdot F_1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 272

Dva kamena jednakih masa kruže u horizontalnoj ravnini po kružnicama različitih polumjera R_1 i R_2 . Pritom je $R_2 = R_1$. Ophodno vrijeme (perioda) oba kamena je isto. Kakav je odnos sila napetosti užeta F u drugom i prvom slučaju?

$$A. F_2 = \frac{1}{4} \cdot F_1 \quad B. F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1 \quad C. F_2 = F_1 \quad D. F_2 = 2 \cdot F_1$$

Rezultat: C.

Zadatak 273 (Dada, maturantica medicinske škole)

Dva kamena jednakih masa kruže u horizontalnoj ravnini po kružnicama različitih polumjera R_1 i R_2 . Pritom je $R_2 = 2 \cdot R_1$. Obodna brzina oba kamena je jednaka. Kakav je odnos sila napetosti užeta F u drugom i prvom slučaju?

$$A. F_2 = \frac{1}{4} \cdot F_1 \quad B. F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1 \quad C. F_2 = F_1 \quad D. F_2 = 2 \cdot F_1$$

Rješenje 273

$$m_1 = m_2 = m, \quad R_2 = 2 \cdot R_1, \quad v_1 = v_2 = v, \quad F_2 : F_1 = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.

1. inačica

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= m \cdot \frac{v^2}{R_1} \\ F_2 &= m \cdot \frac{v^2}{R_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_1 &= m \cdot \frac{v^2}{R_1} \\ F_2 &= m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot R_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot R_1}}{m \cdot \frac{v^2}{R_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot R_1}}{m \cdot \frac{v^2}{R_1}} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{2} \cdot F_1 \Rightarrow F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1.$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

$$F_2 = m \cdot \frac{v^2}{R_2} \Rightarrow F_2 = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot R_1} \Rightarrow F_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(m \cdot \frac{v^2}{R_1} \right) \Rightarrow \left[F_1 = m \cdot \frac{v^2}{R_1} \right] \Rightarrow F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 273

Dva kamena jednakih masa kruže u horizontalnoj ravnini po kružnicama različitih polumjera R_1 i R_2 . Pritom je $R_2 = R_1$. Obodna brzina oba kamena je jednaka. Kakav je odnos sila napetosti užeta F u drugom i prvom slučaju?

A. $F_2 = \frac{1}{4} \cdot F_1$ B. $F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1$ C. $F_2 = F_1$ D. $F_2 = 2 \cdot F_1$

Rezultat: C.

Zadatak 274 (Darko, maturant)

Elektromotor ima promjer remenice 12 cm i vrti se brzinom 2900 o / min. Koliki put prijeđe točka na remenu za 1 min?

A. 850.45 m B. 1200.63 m C. 1093.27 m D. 1193.72 m

Rješenje 274

$$2 \cdot r = 12 \text{ cm} \Rightarrow r = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}, \quad \omega = 2900 \frac{\text{o}}{\text{min}} = 2900 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60 \text{ s}} = \frac{290 \cdot \pi}{3 \text{ s}},$$

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad s = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

$$\left. \begin{aligned} v &= r \cdot \omega \\ s &= v \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = r \cdot \omega \cdot t = 0.06 \text{ m} \cdot \frac{290 \cdot \pi}{3 \text{ s}} \cdot 60 \text{ s} = 1093.27 \text{ m}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 274

Elektromotor ima promjer remenice 6 cm i vrti se brzinom 2900 o / min. Koliki put prijeđe točka na remenu za 2 min?

A. 850.45 m B. 1200.63 m C. 1093.27 m D. 1193.72 m

Rezultat: C.

Zadatak 275 (Darko, maturant)

Polumjer kotača automobila iznosi 35.6 cm. Koliko se puta u minuti okrene kotač pri brzini 90 km / h?

A. $760.5 \frac{1}{\text{min}}$ B. $570.8 \frac{1}{\text{min}}$ C. $470.8 \frac{1}{\text{min}}$ D. $670.8 \frac{1}{\text{min}}$

Rješenje 275

$$r = 35.6 \text{ cm} = 0.356 \text{ m}, \quad v = 90 \text{ km / h} = [90 : 3.6] = 25 \text{ m / s}, \quad f = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost v je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi).

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot f,$$

gdje je r polumjer kružnice, f frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

$$\begin{aligned} v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot f &\Rightarrow 2 \cdot r \cdot \pi \cdot f = v \Rightarrow 2 \cdot r \cdot \pi \cdot f = v / \frac{1}{2 \cdot r \cdot \pi} \Rightarrow f = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \pi} = \\ &= \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0.356 \text{ m} \cdot \pi} = 11.18 \frac{1}{\text{s}} = [11.18 \cdot 60] = 670.8 \frac{1}{\text{min}}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

Vježba 275

Polumjer kotača vozila iznosi 71.2 cm. Koliko se puta u minuti okrene kotač pri brzini 180 km / h?

A. $760.5 \frac{1}{\text{min}}$ B. $570.8 \frac{1}{\text{min}}$ C. $470.8 \frac{1}{\text{min}}$ D. $670.8 \frac{1}{\text{min}}$

Rezultat: D.

Zadatak 276 (Filip, tehnička škola)

Čaša puna vode obješena je na jednom kraju niti dugačke 70 cm. Drugi kraj niti držimo u ruci i čašu vitlamo po vertikalnoj kružnici. Koji je minimalni broj okreta u sekundi pri kojem voda neće pasti iz čaše kad stigne u najvišu točku svoje staze? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 276

$$r = 70 \text{ cm} = 0.7 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad f = ?$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža $G = m \cdot g$ koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2,$$

gdje je f frekvencija (broj okreta u jedinici vremena). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice. U sustavu koji se giba po kružnici pojavljuje se centrifugalna sila po iznosu jednaka

$$F_{cf} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2,$$

a u smjeru od središta kružnice.

Kada je brzina dovoljno velika voda ne ispada iz čaše jer je tada centrifugalna sila jednaka težini.

$$F_{cf} = G \Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2 = m \cdot g \Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2 = m \cdot g \cdot \frac{1}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2 = \frac{m \cdot g}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow f^2 = \frac{m \cdot g}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow f^2 = \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow f^2 = \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \sqrt{\frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r}} \Rightarrow f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{m}{s^2}}{0.7 m}} = 0.6 \frac{1}{s}.$$

Vježba 276

Čaša puna vode obješena je na jednom kraju niti dugačke 50 cm. Drugi kraj niti držimo u ruci i čašu vitlamo po vertikalnoj kružnici. Koji je minimalni broj okreta u sekundi pri kojem voda neće pasti iz čaše kad stigne u najvišu točku svoje staze? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.7 s^{-1} .

Zadatak 277 (Agent001, средно училиште)

Колку пати побрзо треба да се врти Земјата околу својата замислена оска за на екваторот да се најдеме во безтежинска состојба? (радиусот на Земјата $r = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$, бесплатно забрзување на падот $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, времето на една револуција на Земјата околу една оска $T = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$)

Rješenje 277

$$r = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T = 86400 \text{ s}, \quad \frac{f_1}{f} = ?$$

Frekvencija f je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije f i periode T postoji sveza:

$$T \cdot f = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{T}.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža $G = m \cdot g$ koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2,$$

gdje je f frekvencija (broj okreta u jedinici vremena). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice. U sustavu koji se giba po kružnici pojavljuje se centrifugalna sila po iznosu jednaka

$$F_{cf} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f^2,$$

a u smjeru od središta kružnice.

Budući da se Zemlja za 24 h jednom okrene oko svoje osi, njezina frekvencija je

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{86400 \text{ s}} = 1.16 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}.$$

Računamo novu frekvenciju f_1 .

Da bismo na ekvatoru osjećali bestežinsko stanje mora biti:

$$F_{cf} = G \Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f_1^2 = m \cdot g \Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot f_1^2 = m \cdot g \cdot \frac{1}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1^2 = \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow f_1^2 = \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow f_1 = \sqrt{\frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r}} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{m}{s^2}}{6.38 \cdot 10^6 m}} = 1.97 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}.$$

Gledamo omjer:

$$\frac{f_1}{f} = \frac{1.97 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}}{1.16 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}} \Rightarrow \frac{f_1}{f} = 17.$$

Земљата треба да се сврти 17 пати побрзо.



Vježba 277

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 278 (Tibor, maturant)

Koliki rad W je obavio zamašnjak momenta tromosti $6.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ako mu se broj okretaja smanjio od 3500 okretaja / min na 1500 okretaja / min?

A. $W = 3.3 \cdot 10^5 \text{ J}$ B. $W = 4.7 \cdot 10^5 \text{ J}$ C. $W = 17.1 \cdot 10^5 \text{ J}$ D. $W = 2.1 \cdot 10^5 \text{ J}$

Rješenje 278

$$I = 6.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad \omega_1 = 3500 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 3500 \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 3500 \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{350 \cdot \pi \text{ rad}}{3 \text{ s}},$$

$$\omega_2 = 1500 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 1500 \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 1500 \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 50 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad W = ?$$

Prijeđeni kut φ i ukupni broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$

Vrtnja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Vrtnju opisuje prijeđeni kut φ , kutna brzina ω , kutna akceleracija α .

Kutna brzina ω i broj okretaja N u vremenu t povezani su u formuli

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot N}{t}.$$

Kinetička je energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment tromosti tijela.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Rad koji kotač zamašnjak izvrši u vremenskom intervalu u kojem mu kutna brzina padne od ω_1 na ω_2

jednak je razlici kinetičke energije rotacije pri tim kutnim brzinama.

$$W = E_{k1} - E_{k2} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \left(\left(\frac{350 \cdot \pi}{3} \frac{1}{\text{s}} \right)^2 - \left(50 \cdot \pi \frac{1}{\text{s}} \right)^2 \right) = 331728.37 \text{ J} \approx 3.3 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 278

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 279 (Ajla, srednja škola)

Na njihaljci su otac i sin. Masa oca je 85 kg, a dječaka 32 kg. Ako je dječak na kraju njihaljke i na udaljenosti 150 cm od oslonca na kolikoj udaljenosti treba sjediti otac da bi se mogli uspješno njihati?

Rješenje 279

$$m_1 = 85 \text{ kg}, \quad m_2 = 32 \text{ kg}, \quad d_2 = 150 \text{ cm} = 1.5 \text{ m}, \quad d_1 = ?$$

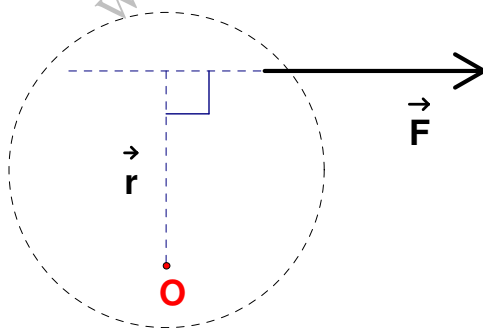
Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža $G = m \cdot g$ koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.

Moment M sile F u odnosu prema osi O (na slici to je točka O) jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi.

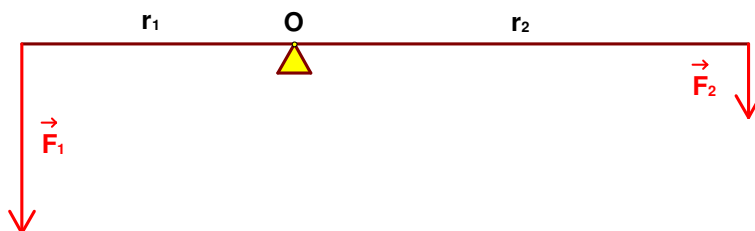
$$M = r \cdot F.$$



Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje zakreću tijelo u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.

Dvostrana poluga u ravnoteži je kad je

$$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2.$$



Budući da se u zadatku ne spominje masa njihaljke, na nju onda djeluju dvije sile:

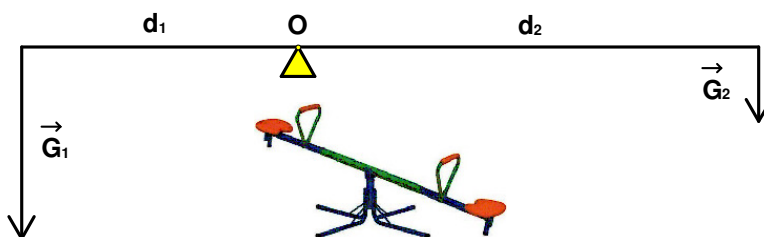
- težina oca

$$G_1 = m_1 \cdot g$$

- težina sina

$$G_2 = m_2 \cdot g.$$

Ravnoteža će biti ako je $M_1 = M_2$.



$$M_1 = M_2 \Rightarrow d_1 \cdot G_1 = d_2 \cdot G_2 \Rightarrow d_1 \cdot m_1 \cdot g = d_2 \cdot m_2 \cdot g \Rightarrow d_1 \cdot m_1 \cdot g = d_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \frac{1}{m_1 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 = d_2 \cdot \frac{m_2}{m_1} = 1.5 \text{ m} \cdot \frac{32 \text{ kg}}{85 \text{ kg}} = 0.565 \text{ m} = 56.5 \text{ cm}.$$

Otac treba sjediti na udaljenosti 56.5 cm od oslonca. Razmak između oca i sina je

$$150 \text{ cm} + 56.5 \text{ cm} = 206.5 \text{ cm}. \text{ (znači nema frke od koronavirusa)}$$

Vježba 279

Na njihaljci su otac i sin. Masa oca je 80 kg, a dječaka 40 kg. Ako je dječak na kraju njihaljke i na udaljenosti 120 cm od oslonca na kolikoj udaljenosti treba sjediti otac da bi se mogli uspješno njihati?

Rezultat: 60 cm.

Zadatak 280 (Marta, srednja škola)

Kotač se okreće stalnom kutnom brzinom $4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. U jednom trenutku počinje jednoliko usporavati i napravi 20 okretaja do zaustavljanja. Odredite kutnu akceleraciju i vrijeme zaustavljanja.

Rješenje 280

$$\omega_0 = 4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad N = 20 \text{ okr}, \quad \alpha = ?, \quad t = ?$$

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = \text{puni kut}.$$

Vrtnja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Vrtnju opisuje prijedeni kut φ , kutna brzina ω , kutna akceleracija α .

Prijedeni kut φ i ukupan broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$

Trenutačna kutna brzina ω kod jednoliko usporene vrtnje (rotacije) dana je izrazom

$$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t,$$

gdje je ω_0 početna kutna brzina, α kutna akceleracija, t vrijeme vrtnje (rotacije).

Za opisani kut φ kod jednoliko usporene rotacije s početnom kutnom brzinom ω_0 i konačnom ω vrijedi formula

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot (\omega_0 + \omega) \cdot t.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
put	s	kut	φ
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko usporeno gibanje			
Početna brzina v_0		Početna kutna brzina ω_0	
$v = v_0 - a \cdot t$		$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t$	
$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s$		$\omega^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$	
$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$		$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t$	
$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$		$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$	

Do trenutka zaustavljanja kotač se okrenuo 20 puta. U tom slučaju opisan je kut

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 40 \cdot \pi \text{ rad.}$$

Budući da kotač usporava, nakon određenog vremena zaustavit će se pa vrijedi:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \Rightarrow \left[\omega = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \Rightarrow 0 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \Rightarrow 2 \cdot \alpha \cdot \varphi = \omega_0^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot \alpha \cdot \varphi = \omega_0^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \varphi} \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0^2}{2 \cdot \varphi} = \frac{\left(4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 40 \cdot \pi \text{ rad}} = 0.2 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Zapamtimo kada kotač usporava akceleracija je negativna.

Vrijeme zaustavljanja možemo izračunati na više načina.

1. inačica

Poslije vremena t kotač stane pa je njegova kutna brzina jednaka nuli.

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 - \alpha \cdot t \Rightarrow \left[\omega = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \Rightarrow 0 = \omega_0 - \alpha \cdot t \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_0 \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_0 \cdot \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{0.2 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} = 20 \text{ s.} \end{aligned}$$

2. inačica

Poslije vremena t kotač stane pa je njegova kutna brzina jednaka nuli.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t \Rightarrow \left[\omega = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \Rightarrow \varphi = \frac{\omega_0}{2} \cdot t \Rightarrow \frac{\omega_0}{2} \cdot t = \varphi \Rightarrow \frac{\omega_0}{2} \cdot t = \varphi \cdot \frac{2}{\omega_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{2 \cdot \varphi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 40 \cdot \pi \text{ rad}}{4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 20 \text{ s.} \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow \varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \varphi = 2 \cdot \omega_0 \cdot t - \alpha \cdot t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha \cdot t^2 - 2 \cdot \omega_0 \cdot t + 2 \cdot \varphi = 0 \Rightarrow 0.2 \cdot \pi \cdot t^2 - 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot t + 2 \cdot 40 \cdot \pi = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0.2 \cdot \pi \cdot t^2 - 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot t + 2 \cdot 40 \cdot \pi = 0 \cdot \frac{1}{0.2 \cdot \pi} \Rightarrow t^2 - 40 \cdot t + 400 = 0 \Rightarrow (t - 20)^2 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t - 20 = 0 \Rightarrow t = 20 \text{ s.}$$

4. inačica

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = \varphi \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = \varphi \cdot \frac{2}{\alpha} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot \varphi}{\alpha} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot \varphi}{\alpha} \sqrt{} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot \varphi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot \pi \text{ rad}}{0.2 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}} = 20 \text{ s.} \end{aligned}$$

Vježba 280

Odmor!

Rezultat: ...

www.halapa.com