

### Zadatak 201 (Branko, strukovna škola)

Kružni kamen, polumjera 15 cm i mase 2 kg, vrti se 3600 okreta u minuti. Kolika mu je kinetička energija? S koje visine bi morao kotač pasti na zemlju da pri udaru o tlo ima jednaku kinetičku energiju? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 201

$$r = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \quad m = 2 \text{ kg}, \quad n = 3600, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$
$$E_k = ?, \quad h = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi):

$$v = \frac{n}{t},$$

gdje je  $n$  broj okreta,  $t$  vrijeme za koje su okreti učinjeni.

Kutna brzina  $\omega$  iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je  $v$  frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena).

Moment tromosti (ustrajnosti) kružne ploče mase  $m$  i polumjera  $r$ , s obzirom na os koja prolazi okomito njezinim središtem iznosi:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

gdje je  $I$  moment ustrajnosti (tromosti),  $\omega$  kutna brzina.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

#### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Odredimo li frekvenciju i kutnu brzinu kružnog kamena njegova kinetička energija iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ v = \frac{n}{t} \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \Rightarrow E_k = m \cdot r^2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 =$$

$$= 2 \text{ kg} \cdot (0.15 \text{ m})^2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{3600}{60 \text{ s}} \right)^2 = 1598.88 \text{ J}.$$

Budući da nema gubitaka energije, visina  $h$  na kojoj je gravitacijska potencijalna energija kamena jednaka njegovoj kinetičkoj energiji pri padu na zemlju iznosi:

$$E_{gp} = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{E_k}{m \cdot g} = \frac{1598.88 \text{ J}}{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 81.5 \text{ m}.$$

### Vježba 201

Kružni kamen, polumjera 150 mm i mase 200 dag vrti se 3600 okreta u minuti. Kolika mu je kinetička energija? S koje visine bi morao kotač pasti na zemlju da pri udaru o tlo ima jednaku kinetičku energiju? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $E_k = 1598.88 \text{ J}$ ,  $h = 81.5 \text{ m}$ .

### Zadatak 202 (Sanja, strukovna škola)

Tijelo se giba jednoliko po kružnici polumjera  $r$  brzinom iznosa  $v$ . Koliki je iznos brzine gibanja toga tijela po kružnici polumjera  $4 \cdot r$  ako na njega djeluje centripetalna sila istog iznosa?

A.  $\frac{v}{2}$       B.  $\frac{v}{4}$       C.  $2 \cdot v$       D.  $4 \cdot v$

### Rješenje 202

$$r_1 = r, \quad v_1 = v, \quad r_2 = 4 \cdot r, \quad F_{cp1} = F_{cp2}, \quad v_2 = ?$$

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $v$  obodna ili linearna brzina.

$$\left. \begin{array}{l} F_{cp1} = m \cdot \frac{v_1^2}{r_1} \\ F_{cp2} = m \cdot \frac{v_2^2}{r_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{cp1} = m \cdot \frac{v^2}{r} \\ F_{cp2} = m \cdot \frac{v_2^2}{4 \cdot r} \end{array} \right\} \Rightarrow [F_{cp1} = F_{cp2}] \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{v_2^2}{4 \cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{v_2^2}{4 \cdot r} \cdot \frac{4 \cdot r}{m} \Rightarrow v_2^2 = 4 \cdot v^2 \Rightarrow v_2^2 = 4 \cdot v^2 \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v_2 = \sqrt{4 \cdot v^2} \Rightarrow v_2 = 2 \cdot v.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 202

Tijelo se giba jednoliko po kružnici polumjera  $r$  brzinom iznosa  $v$ . Koliki je iznos brzine gibanja toga tijela po kružnici polumjera  $16 \cdot r$  ako na njega djeluje centripetalna sila istog iznosa?

A.  $\frac{v}{2}$       B.  $\frac{v}{4}$       C.  $2 \cdot v$       D.  $4 \cdot v$

**Rezultat:** D.

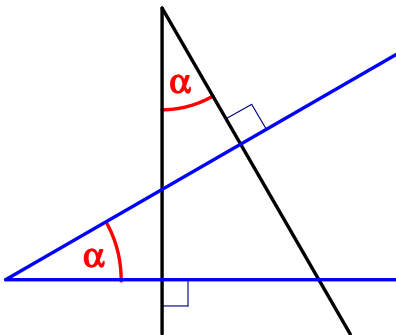
### Zadatak 203 (Dalibor, srednja škola)

Koliki mora biti nagib zavoja ceste polumjera 180 m da bi se, ne računajući trenje, zavoj moglo prolaziti brzinom 70 km/h? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 203

$$r = 180 \text{ m}, \quad v = 70 \text{ km/h} = [70 : 3.6] = 19.44 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?$$

Kutovi s međusobno okomitim kracima su sukladni.



Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Tangens** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

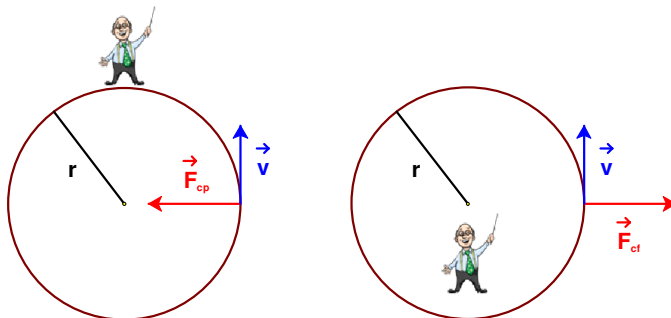
gdje je  $G$  težna sila,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Centripetalna sila uzrokuje jednoliko kružno gibanje tijela, a djeluje okomito na smjer brzine gibanja prema središtu kružne staze. Promatrano sa stajališta ubrzanog sustava na tijelo koje se vrti zajedno s njim, djeluje jednaka sila, ali suprotnog smjera od smjera sile koja izvodi vrtnju. To je centrifugalna sila (inercijska sila). Inercijske sile su prividne sile koje se pojavljuju u akceleriranim sustavima i nisu posljedica međudjelovanja tijela. Njihov smjer je uvijek suprotan smjeru akceleracije sustava.

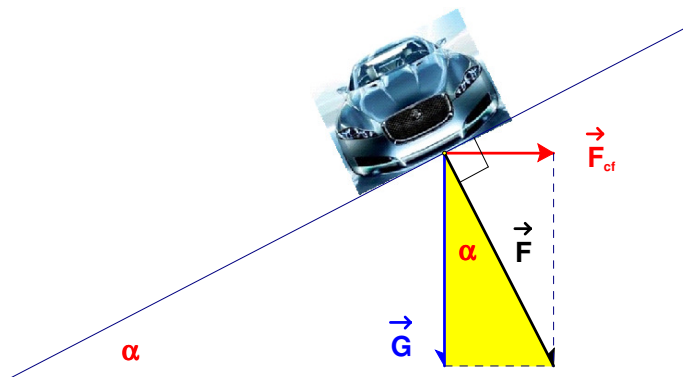
Motritelj u sustavu koji jednoliko kruži zapaža inercijsku silu koju zovemo centrifugalna sila. Njezin smjer je suprotan centripetalnoj sili, tj. djeluje od središta kružnice, ali te dvije sile nikad ne zapažamo zajedno jer se pojavljuju u različitim sustavima. Izraz za centrifugalnu silu isti je kao i za centripetalnu silu.

$$F_{cf} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $r$  polumjer kružnice po kojoj se tijelo giba,  $v$  obodna ili linearna brzina.



Računamo nagib zavoja ceste polumjera  $r$  da bi se, ne računajući trenje, zavoju moglo prolaziti brzinom  $v$ .



Uočimo da je rezultantna sila  $F$  težine  $G$  i centrifugalne sile  $F_{cf}$  okomita na podlogu kosine. Iz pravokutnog trokuta čije su katete  $G$  i  $F_{cf}$  pomoću funkcije tangens dobije se veličina kuta  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{F_{cf}}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{v^2}{r}}{g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{v^2}{r}}{\frac{g}{1}} \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha &= \frac{v^2}{r \cdot g} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{v^2}{r \cdot g} \right) \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\left( 19,44 \frac{m}{s} \right)^2}{180 m \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}} \right) \Rightarrow \alpha = 12,08^\circ. \end{aligned}$$

### Vježba 203

Koliki mora biti nagib zavoja ceste polumjera 0.18 km da bi se, ne računajući trenje, zavoj moglo prolaziti brzinom 70 km / h? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:** 12.08°.

### Zadatak 204 (Petra, gimnazija)

Čestica kruži po stazi polumjera 0.1 m brzinom  $9.6 \cdot 10^4 \text{ m / s}$ . Kolika je frekvencija kruženja čestice?

### Rješenje 204

$$r = 0.1 \text{ m}, \quad v = 9.6 \cdot 10^4 \text{ m / s}, \quad \nu = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost  $\nu$  je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi).

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice,  $\nu$  frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

$$\begin{aligned} v &= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu = v \Rightarrow 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu = v / \cdot \frac{1}{2 \cdot r \cdot \pi} \Rightarrow \nu = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \pi} = \\ &= \frac{9.6 \cdot 10^4 \frac{m}{s}}{2 \cdot 0.1 m \cdot \pi} = 1.53 \cdot 10^5 \frac{1}{s} = 1.53 \cdot 10^5 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

### Vježba 204

Čestica kruži po stazi polumjera 0.2 m brzinom  $19.2 \cdot 10^4 \text{ m / s}$ . Kolika je frekvencija kruženja čestice?

**Rezultat:**  $1.53 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ .

### Zadatak 205 (Mirko, tehnička škola)

Elektron ulijeće u homogeno magnetno polje okomito na silnice polja. Što se događa s brzinom elektrona dok se giba u magnetnome polju?

- A. Brzini se mijenjaju smjer i iznos.
- B. Brzini se ne mijenjaju ni smjer niti iznos.
- C. Brzini se mijenja smjer, a po iznosu je stalna.
- D. Brzina je po smjeru stalna, a mijenja joj se iznos.

### Rješenje 205

$$r = 0.1 \text{ m}, \quad v = 9.6 \cdot 10^4 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

### Lorentzova sila

Ako se u magnetnom polju giba čestica naboja  $Q$  brzinom  $v$ , onda polje djeluje na nju silom

$$F_L = B \cdot v \cdot Q \cdot \sin \alpha,$$

gdje je  $\alpha$  kut između smjera magnetnog polja i smjera gibanja čestice.

Ako je  $\alpha = 90^\circ$ , tada se čestica giba po kružnici polumjera  $r$  jer je sila  $F$  stalno okomita na smjer brzine  $v$ .

$$F_L = B \cdot v \cdot Q.$$

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

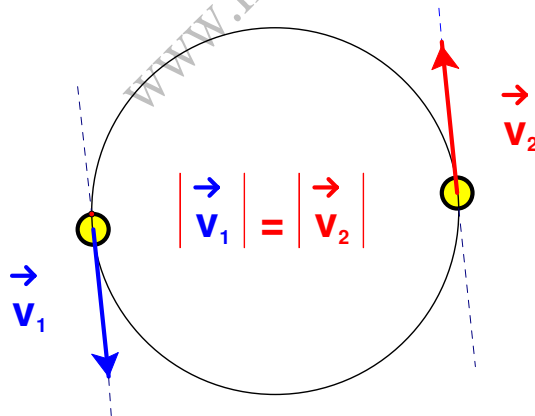
$$F_{CP} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $v$  obodna ili linearna brzina.

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kod jednolikoga gibanja po kružnici brzina  $v$  stalna po iznosu, ali ne i po smjeru.

Ovdje Lorentzova sila ima ulogu centripetalne sile jer prisiljava elektron da se giba po kružnoj stazi pa mu je brzina stalna po iznosu, ali ne i po smjeru.

Odgovor je pod C.



### Vježba 205

Čestica naboja  $Q$  ulijeće u homogeno magnetno polje okomito na silnice polja. Što se događa s brzinom čestice dok se giba u magnetnom polju?

- A. Brzini se mijenjaju smjer i iznos.
- B. Brzini se ne mijenjaju ni smjer niti iznos.
- C. Brzini se mijenja smjer, a po iznosu je stalna.
- D. Brzina je po smjeru stalna, a mijenja joj se iznos.

**Rezultat:** C.

### Zadatak 206 (Nataly, gimnazija)

Uz pretpostavku da se Mjesec giba oko Zemlje po kružnici izračunajte:

- kutnu brzinu
  - obodnu brzinu
  - centripetalnu akceleraciju Mjeseca.
- (ophodno vrijeme Mjeseca oko Zemlje  $T = 27.32$  dana, srednja udaljenost središta Zemlje i Mjeseca  $r = 3.84 \cdot 10^8$  m)

### Rješenje 206

$$T = 27.32 \text{ dana} = [27.32 \cdot 24 \cdot 3600] = 2.36 \cdot 10^6 \text{ s}, \quad r = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}, \quad \omega = ?, \quad v = ?, \quad a_{cp} = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice,  $T$  perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta).

Kutna brzina  $\omega$  iznosi:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T},$$

gdje je  $T$  perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta).

Pri kružnom gibanju brzina stalno mijenja smjer. Promjenu smjera brzine uzrokuje centripetalna sila. Ona tijelu daje centripetalnu (radijalnu) akceleraciju usmjerenu prema središtu kružnice.

$$a_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r,$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice,  $T$  perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta).

a) Budući da je zadano ophodno vrijeme  $T$  kutna brzina  $\omega$  iznosi:

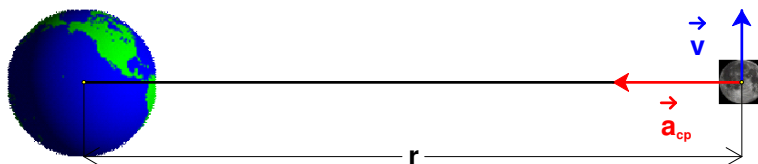
$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{2.36 \cdot 10^6 \text{ s}} = 2.66 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

b) Obodna brzina  $v$  kojom se Mjesec giba oko Zemlje je:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot 3.84 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \pi}{2.36 \cdot 10^6 \text{ s}} = 1022.35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Centripetalna (radijalna) akceleracija Mjeseca ima vrijednost:

$$a_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r \Rightarrow a_{cp} = \left( \frac{2 \cdot \pi}{T} \right)^2 \cdot r = \left( \frac{2 \cdot \pi}{2.36 \cdot 10^6 \text{ s}} \right)^2 \cdot 3.84 \cdot 10^8 \text{ m} = 2.72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



### Vježba 206

Uz pretpostavku da se Mjesec giba oko Zemlje po kružnici izračunajte centripetalnu akceleraciju Mjeseca. (ophodno vrijeme Mjeseca oko Zemlje  $T = 27.32$  dana, srednja udaljenost središta Zemlje i Mjeseca  $r = 3.84 \cdot 10^5$  km)

**Rezultat:**  $2.72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

### Zadatak 207 (Nataly, gimnazija)

Izračunajte obodnu brzinu i radijalnu akceleraciju u gibanju Zemlje oko Sunca. (ophodno vrijeme Zemlje oko Sunca  $T = 365.25$  dana, srednja udaljenost središta Zemlje i Sunca  $r = 1.49 \cdot 10^{11}$  m)

#### Rješenje 207

$$T = 365.25 \text{ dana} = [365.25 \cdot 24 \cdot 3600] = 3.16 \cdot 10^7 \text{ s}, \quad r = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad v = ?, \quad a_{cp} = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice,  $T$  perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Pri kružnom gibanju brzina stalno mijenja smjer. Promjenu smjera brzine uzrokuje centripetalna sila. Ona tijelu daje centripetalnu (radijalnu) akceleraciju usmjerenu prema središtu kružnice.

$$a_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r,$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice,  $T$  perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Uz pretpostavku da se Zemlja giba oko Sunca po kružnoj stazi njezina obodna brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot \pi}{3.16 \cdot 10^7 \text{ s}} = 29626.41 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29.626241 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Za radijalnu (centripetalnu) akceleraciju Zemlje kada se giba oko Sunca vrijedi:

$$a_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r \Rightarrow a_{cp} = \left( \frac{2 \cdot \pi}{T} \right)^2 \cdot r = \left( \frac{2 \cdot \pi}{3.16 \cdot 10^7 \text{ s}} \right)^2 \cdot 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m} = 5.89 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

#### Vježba 207

Izračunajte obodnu brzinu i radijalnu akceleraciju u gibanju Zemlje oko Sunca. (ophodno vrijeme Zemlje oko Sunca  $T = 365.25$  dana, srednja udaljenost središta Zemlje i Sunca  $r = 1.49 \cdot 10^8$  km)

**Rezultat:**  $30 \text{ km / s}, 5.89 \cdot 10^{-3} \text{ m / s}^2$ .

### Zadatak 208 (Duško, tehnička škola)

Kolika je centripetalna akceleracija vlaka koji se giba brzinom  $36 \text{ km / h}$  na zavoju polumjera  $1000 \text{ m}$ ?

#### Rješenje 208

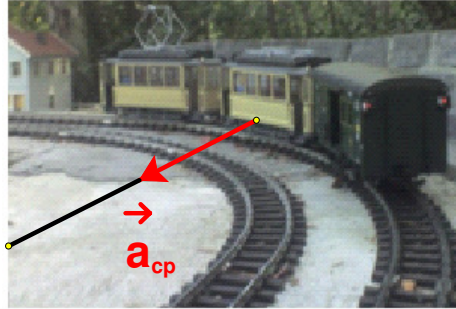
$$v = 36 \text{ km / h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m / s}, \quad r = 1000 \text{ m}, \quad a_{cp} = ?$$

Pri kružnom gibanju brzina stalno mijenja smjer. Promjenu smjera brzine uzrokuje centripetalna sila. Ona tijelu daje centripetalnu (radijalnu) akceleraciju usmjerenu prema središtu kružnice.

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice,  $v$  obodna brzina. Tijelo koje se giba po kružnici konstantnom brzinom  $v$ , uvijek ima centripetalnu akceleraciju  $a_{cp}$  koja ima smjer prema središtu staze. Centripetalna akceleracija vlaka iznosi:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{1000 \text{ m}} = 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



### Vježba 208

Kolika je centripetalna akceleracija vlaka koji se giba brzinom 72 km / h na zavoju polumjera 1000 m?

**Rezultat:** 0.4 m / s<sup>2</sup>.

### Zadatak 209 (Duško, tehnička škola)

Kolika je centripetalna akceleracija tijela koje jednoliko gibajući se po kružnici polumjera 1.6 m napravi 120 okreta u minuti? Kolika mu je pritom obodna brzina?

#### Rješenje 209

$$r = 1.6 \text{ m}, \quad n = 120, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad a_{cp} = ? \quad v = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi):

$$v = \frac{n}{t}$$

gdje je n broj okreta, t vrijeme za koje su okreti učinjeni.

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je r polumjer kružnice, v frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

Budući da je kod jednolikog gibanja po kružnici brzina v stalna po iznosu, ali ne i po smjeru, mora postojati akceleracija koju nazivamo centripetalna akceleracija. Centripetalna akceleracija dana je izrazom:

$$a_{cp} = 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

gdje je r polumjer kružnice, v frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

Centripetalna akceleracija tijela iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{n}{t} \\ a_{cp} = 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = \frac{n}{t} \\ a_{cp} = 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = \frac{n}{t} \\ a_{cp} = (2 \cdot \pi \cdot v)^2 \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucije)} \end{array} \right] \Rightarrow a_{cp} = \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \cdot r = \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{120}{60 \text{ s}} \right)^2 \cdot 1.6 \text{ m} = 252.66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Obodna brzina tijela je

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{n}{t} \\ v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucije)} \end{array} \right] \Rightarrow v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} = 2 \cdot 1.6 \text{ m} \cdot \pi \cdot \frac{120}{60 \text{ s}} = 20.11 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



### Vježba 209

Kolika je centripetalna akceleracija tijela koje jednoliko kružeci po kružnici polumjera 1.6 m napravi 240 okreta za dvije minute?

**Rezultat:** 252.66 m / s<sup>2</sup>.

### Zadatak 210 (Ante, veleučilište)

Satelit se giba blizu površine planeta gustoće  $\rho$ . Koliko je ophodno vrijeme satelita? (konstanta gravitacije G)

#### Rješenje 210

$\rho$ , G, T = ?

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz kvocijenta mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

#### Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  nalaze u međusobnoj udaljenosti  $r$ , među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

Obujam (volumen) kugle polumjera  $r$  iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Budući da se satelit giba blizu površine planeta, privlačna sila između satelita mase  $m$  i planeta mase  $M$  iznosi:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2},$$

gdje je R srednji polumjer planeta.

Masa planeta (ima oblik kugle) je:

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \\ M = \rho \cdot V \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucije)} \end{array} \right] \Rightarrow M = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi.$$

Privlačna sila između satelita mase  $m$  i planeta mase  $M$

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$$

daje satelitu centripetalnu akceleraciju

$$a_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R$$

te jednadžba gibanja satelita u blizini površine planeta ima oblik

$$F = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R,$$

gdje je R srednji polumjer planeta. Sada je:

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R \cdot \frac{T^2 \cdot R^2}{G \cdot m \cdot M} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot M}.$$

Iz sustava jednadžbi dobijemo periodu T.

$$\left. \begin{aligned} M &= \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \\ T^2 &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot M} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucija)} \end{array} \right] \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{\pi}{G \cdot \rho \cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow T^2 = \frac{\frac{\pi}{1}}{G \cdot \rho \cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow T^2 = \frac{3 \cdot \pi}{G \cdot \rho} \Rightarrow T^2 = \frac{3 \cdot \pi}{G \cdot \rho} \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{3 \cdot \pi}{G \cdot \rho}}.$$

### Vježba 210

Ophodno vrijeme satelita koji se giba blizu površine planeta je T. Kolika je gustoća planeta? (konstanta gravitacije G)

**Rezultat:**  $\rho = \frac{3 \cdot \pi}{G \cdot T^2}.$

### Zadatak 211 (Iva, gimnazija)

Horizontalna kružna ploča vrti se oko svoje osi i učini 30 okretaja u minuti. Na udaljenosti 20 cm od osi leži tijelo. Koliki mora biti koeficijent trenja da tijelo ne sklizne s ploče? (ubrzanje sile teže  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 211

$$n = 30, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad r = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Da bi se tijelo, mase m, gibalo po kružnici, polumjera r, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

Perioda ili vrijeme jednog okreta jednaka je

$$T = \frac{t}{n},$$

gdje je n broj okreta, t vrijeme za koje su okreti učinjeni.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Najprije odredimo periodu T kružne ploče koja se vrti oko svoje osi.

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60 \text{ s}}{30} = 2 \text{ s}.$$

Budući da je trenje sila koja prisiljava tijelo da ne sklizne s ploče, tj. da se giba po kružnici, mora biti  $F_{tr}$  jednako centripetalnoj sili  $F_{cp}$ .

$$F_{tr} = F_{cp} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} / \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{g \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.2 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2} = 0.2.$$

### Vježba 211

Horizontalna kružna ploča vrti se oko svoje osi i učini 30 okretaja u minuti. Na udaljenosti 2 dm od osi leži tijelo. Koliki mora biti koeficijent trenja da tijelo ne sklizne s ploče? (ubrzanje sile teže  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.2.

### Zadatak 212 (Iva, gimnazija)

Centrifuga se vrti 30000 okretaja u minuti. Koliki je polumjer centrifuge ako na njezinom obodu na tijelo djeluje sila koja je 90000 puta veća od težine tijela? (ubrzanje sile teže  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 212

$$n = 30000, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad F = 90000 \cdot G, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad r = ?$$

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je  $T$  perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

Perioda ili vrijeme jednog okreta jednaka je

$$T = \frac{t}{n},$$

gdje je  $n$  broj okreta,  $t$  vrijeme za koje su okreti učinjeni.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  težna sila,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Najprije odredimo periodu  $T$  centrifuge

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60 \text{ s}}{30000} = 0.002 \text{ s}.$$

Sila koje djeluje na tijelo je centripetalna sila i zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} F_{cp} = F \\ F = 90000 \cdot G \end{array} \right\} \Rightarrow F_{cp} = 90000 \cdot G \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = 90000 \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = 90000 \cdot m \cdot g / \cdot \frac{T^2}{m \cdot 4 \cdot \pi^2} \Rightarrow r = \frac{90000 \cdot g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} =$$

$$= \frac{90000 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (0.002 s)^2}{4 \cdot \pi^2} = 0.0895 m = 8.95 cm.$$

### Vježba 212

Centrifuga se vrti 60000 okretaja u 2 minute. Koliki je polumjer centrifuge ako na njezinom obodu na tijelo djeluje sila koja je 90000 puta veća od težine tijela? (ubrzanje sile teže  $g = 9.81 m / s^2$ )

**Rezultat:** 8.95 cm.

### Zadatak 213 (Iva, gimnazija)

Kolika je centripetalna akceleracija čovjeka koji se okreće na vrtuljku, ako nagib užeta sjedišta zatvara kut od  $30^\circ$  s obzirom na vertikalu? (ubrzanje sile teže  $g = 9.81 m / s^2$ )

### Rješenje 213

$$\alpha = 30^\circ, \quad g = 9.81 m / s^2, \quad a_{cp} = ?$$

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot a_{cp},$$

gdje je  $a_{cp}$  centripetalna akceleracija.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

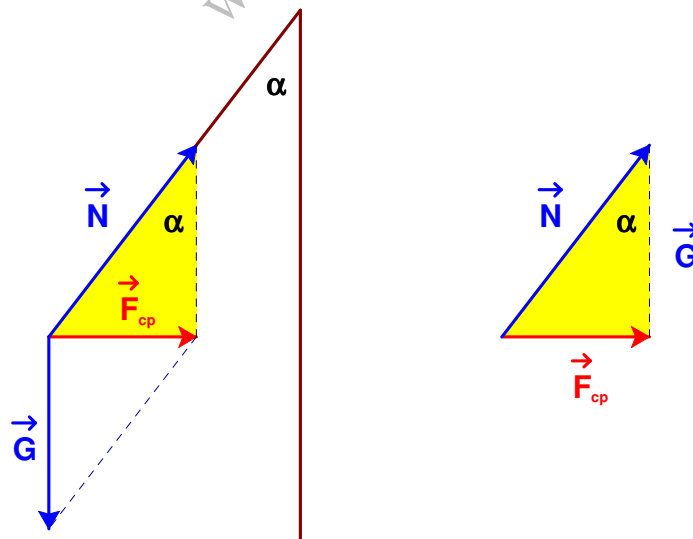
$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  težna sila,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Tangens** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.



Iz slika vidimo da na čovjeka djeluju dvije sile: sila teže  $G$  i sila  $N$  kojom uže drži čovjeka. Budući da se čovjek giba po kružnici, rezultanta tih dviju sila ima smjer prema središtu kružnice (rezultanta je centripetalna sila). Vidimo da je

$$tg \alpha = \frac{F_{cp}}{G} \Rightarrow tg \alpha = \frac{m \cdot a_{cp}}{m \cdot g} \Rightarrow tg \alpha = \frac{m \cdot a_{cp}}{m \cdot g} \Rightarrow tg \alpha = \frac{a_{cp}}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_{cp}}{g} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{a_{cp}}{g} = \operatorname{tg} \alpha / \cdot g \Rightarrow a_{cp} = g \cdot \operatorname{tg} \alpha = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 5.66 \frac{m}{s^2}.$$

### Vježba 213

Kolika je centripetalna akceleracija čovjeka koji se okreće na vrtuljku, ako nagib užeta sjedišta zatvara kut od  $40^\circ$  s obzirom na vertikalu? (ubrzanje sile teže  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $8.23 \text{ m/s}^2$ .

### Zadatak 214 (Bogdana, Anita, Maja, Ivica, maturanti)

Ivicu su oteli izvanzemaljci (na veliku radost Bogdane, Anite i Maje ☺) te ga zatvorili na svom planetu u prostoriju bez mogućnosti kontakata s okolinom. Uz pomoću vezice dugačke 37 cm i cipele uspio je napraviti matematičko njihalo koje je imalo periodu 2 s. Odredite:

- ubrzanje sile teže  $g$  na tom planetu
- masu planeta  $M$ , ako je njegov polumjer 3390 km.

### Rješenje 214

$$l = 37 \text{ cm} = 0.37 \text{ m}, \quad T = 2 \text{ s}, \quad r = 3390 \text{ km} = 3.39 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad g = ?, \quad M = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  težna sila,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

**Matematičko njihalo** je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja nije koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je  $l$  duljina njihala, a  $g$  akceleracija slobodnog pada.

**Opći zakon gravitacije:**

Ako se bilo koja dva tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  nalaze u međusobnoj udaljenosti  $r$ , među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je  $G$  gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

a)

Računamo ubrzanje sile teže  $g$  na tajanstvenom planetu na koji su Bogdana, Anita i Maja u dogovoru sa izvanzemalcima otpremile Ivicu ☺.

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{T}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} / 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 = \frac{l}{g} \Rightarrow \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 = \frac{l}{g} / \cdot g \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \Rightarrow g = l \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 = \end{aligned}$$

$$= 0.37 \, m \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{2 \, s} \right)^2 = 3.65 \frac{m}{s^2}.$$

b)

Neka je  $m$  masa nekog tijela. Za privlačenje tog tijela mase  $m$  i planeta mase  $M$  možemo napisati

$$F_g = G \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot g \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot g \cdot \frac{r^2}{G \cdot m} \Rightarrow M = \frac{g \cdot r^2}{G} =$$

$$= \frac{3.65 \frac{m}{s^2} \cdot (3.39 \cdot 10^6 \, m)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = 6.29 \cdot 10^{23} \, kg.$$

### Vježba 214

Ivicu su oteli izvanzemaljci te ga zatvorili na svom planetu u prostorijsu bez mogućnosti kontakata s okolinom. Uz pomoću vezice dugačke 57 cm i cipele uspio je napraviti matematičko njihalo koje je imalo periodu 2 s. Odredite ubrzanje sile teže  $g$  na tom planetu.

**Rezultat:**  $5.63 \, m/s^2$ .

### Zadatak 215 (Tony, gimnazija)

Vertikalno postavljen stup visine  $h$  pada na zemlju tako da opisuje kružni luk. Moment inercije stupa s obzirom na os okomitu na jedan od krajeva je  $I = \frac{m \cdot h^2}{3}$ . Kolikom će brzinom pasti točka na visini  $x$ ? (ubrzanje slobodnog pada  $g$ )

### Rješenje 215

$$h, \quad I = \frac{m \cdot h^2}{3}, \quad x, \quad g, \quad v = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

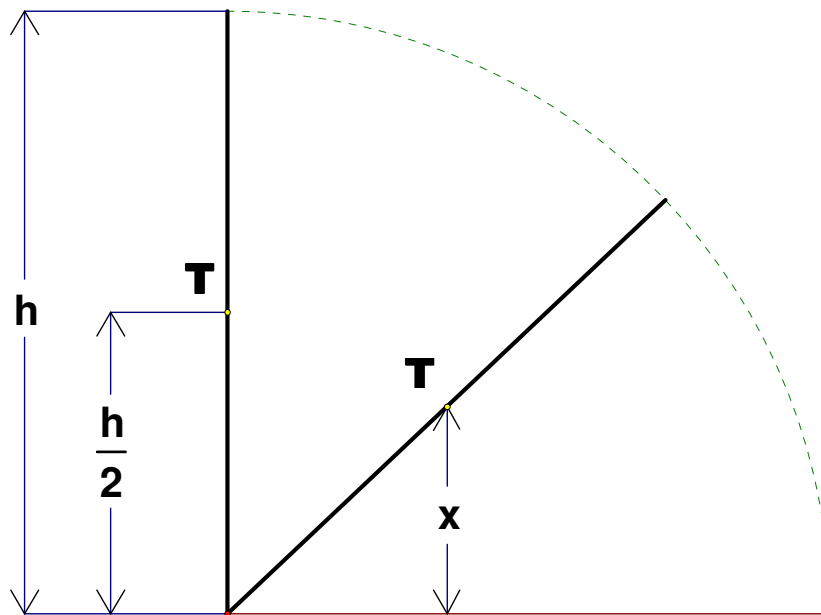
$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je  $I$  moment ustrajnosti (tromosti),  $\omega$  kutna brzina.

Između obodne i kutne brzine neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega,$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice po kojoj se čestica giba.



Zbog zakona očuvanja gravitacijska potencijalna energija stupa, čije je težište na visini  $\frac{h}{2}$ , prelazi u kinetičku energiju rotacije pa slijedi::

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} E_k &= E_{gp} \\ I &= \frac{m \cdot h^2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 &= m \cdot g \cdot \frac{h}{2} \\ I &= \frac{m \cdot h^2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot h^2}{3} \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{m \cdot h^2}{6} \cdot \omega^2 &= \frac{m \cdot g \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{m \cdot h^2}{6} \cdot \omega^2 = \frac{m \cdot g \cdot h}{2} \cdot \frac{6}{m \cdot h^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \omega^2 &= \frac{3 \cdot g}{h} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3 \cdot g}{h} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3 \cdot g}{h}}.
 \end{aligned}$$

Obodna brzina kojom će pasti točka na visini x iznosi:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{3 \cdot g}{h}} \\ v &= x \cdot \omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = x \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot g}{h}}.$$

### Vježba 215

Vertikalno postavljen stup visine h pada na zemlju tako da opisuje kružni luk. Moment inercije stupa s obzirom na os okomitu na jedan od krajeva je  $I = \frac{m \cdot h^2}{3}$ . Kolikom će brzinom pasti točka na visini h? (ubrzanje slobodnog pada g)

**Rezultat:**  $v = \sqrt{3 \cdot g \cdot h}$ .

### Zadatak 216 (Ivan, tehnička škola)

Odredi duljinu šipke obješene na jednom kraju koja ima periodu titranja 1 s. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 216

$$T = 1 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad l = ?$$

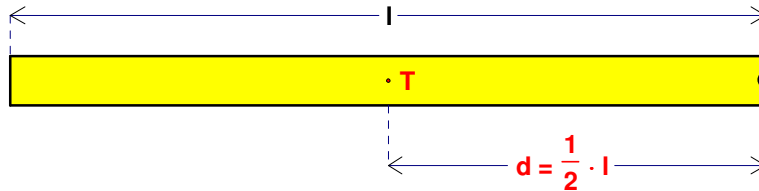
Moment inercije (ustrajnosti, tromosti) tankog štapa duljine  $l$ , ako os rotacije okomita na os štapa prolazi krajem štapa

$$I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2.$$

Fizičko njihalo, bilo koji predmet mase  $m$  koji se može njihati oko neke osi udaljene  $d$  od težišta (središta mase), ima periodu

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}},$$

gdje je  $I$  moment inercije s obzirom na os oko koje se predmet njiše.



$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 \\ d = \frac{1}{2} \cdot l \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}} \end{array} \right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2}{m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot l}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2}{m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot l}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot l}{\frac{1}{2} \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}} = T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}} = T \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}} = \frac{T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}} = \frac{T}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot l}{3 \cdot g} = \left( \frac{T}{2 \cdot \pi} \right)^2 \Rightarrow \frac{2 \cdot l}{3 \cdot g} = \left( \frac{T}{2 \cdot \pi} \right)^2 \cdot \frac{3 \cdot g}{2} \Rightarrow l = \frac{3 \cdot g}{2} \cdot \left( \frac{T}{2 \cdot \pi} \right)^2 =$$

$$= \frac{3 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot \left( \frac{1 \text{ s}}{2 \cdot \pi} \right)^2 = 0.373 \text{ m} = 37.3 \text{ cm}.$$

### Vježba 216

Odredi duljinu šipke obješene na jednom kraju koja ima periodu titranja 2 s. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 149.1 cm.

### Zadatak 217 (Petar, tehnička škola)

Drvo visine 12 m treba srušiti pomoću užeta privezanog na vrhu drveta koje se zateže silom 1000 N na udaljenosti od podnožja drveta 15 m. Koliki je moment sile kojom se djeluje na drvo?

### Rješenje 217

$$h = 12 \text{ m}, \quad F = 1000 \text{ N}, \quad d = 15 \text{ m}, \quad M = ?$$



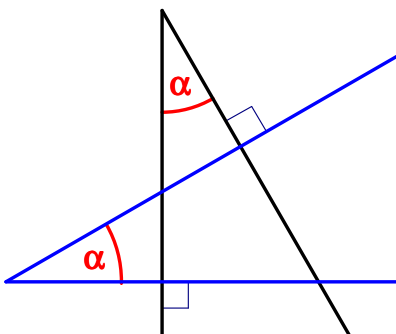
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

### Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

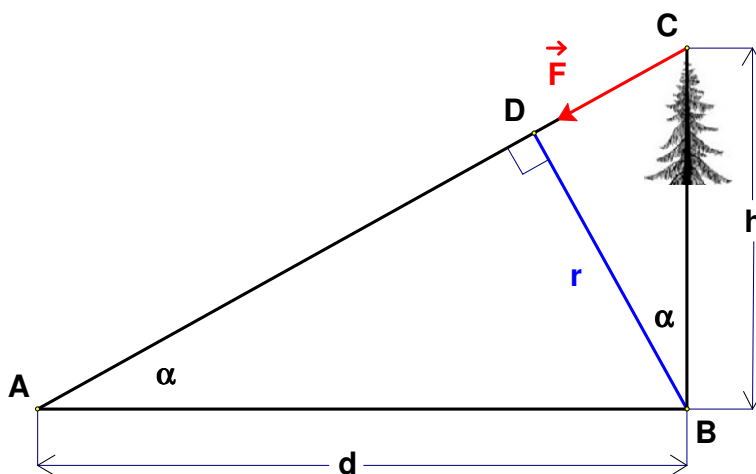
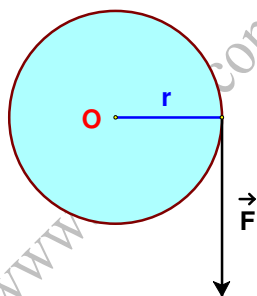
**Kosinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Kutovi s međusobno okomitim kracima su sukladni.



Moment  $M$  sile  $F$  u odnosu prema osi jest umnožak sile  $F$  i udaljenosti  $r$  pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = d, \quad |BC| = h, \quad |BD| = r, \quad \angle CAB = \angle DBC = \alpha \text{ kutovi s okomitim kracima}$$

Najprije odredimo duljinu hipotenuze  $|AC|$  pravokutnog trokuta ABC.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = d^2 + h^2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{d^2 + h^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{d^2 + h^2}.$$

Uočimo pravokutne trokute  $\triangle ABC$  i  $\triangle DBC$ . Uporabom funkcije kosinus dobije se:

- za  $\triangle DBC$

$$\cos \alpha = \frac{|BD|}{|BC|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{r}{h}$$

- za  $\triangle ABC$

$$\cos \alpha = \frac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}.$$

Sada je:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{r}{h} \\ \cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \cdot h \Rightarrow r = \frac{d \cdot h}{\sqrt{d^2 + h^2}}.$$

Moment sile iznosi:

$$M = F \cdot r \Rightarrow M = F \cdot \frac{d \cdot h}{\sqrt{d^2 + h^2}} = 1000 \text{ N} \cdot \frac{15 \text{ m} \cdot 12 \text{ m}}{\sqrt{(15 \text{ m})^2 + (12 \text{ m})^2}} = 9370.43 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

### Vježba 217

Drvo visine 12 m treba srušiti pomoću užeta privezanog na vrhu drveta koje se zateže silom 2000 N na udaljenosti od podnožja drveta 15 m. Koliki je moment sile kojom se djeluje na drvo?

**Rezultat:** 18740.85 N·m.

### Zadatak 218 (Robert, tehnička škola)

Koliki je moment sile (zakretni moment) automobilskog motora koji pri 3600 okreta / min razvija snagu 29 kW?

#### Rješenje 218

$$v = 3600 \frac{1}{\text{min}} = 3600 \frac{1}{60 \text{ s}} = 60 \frac{1}{\text{s}}, \quad P = 29 \text{ kW} = 29000 \text{ W}, \quad M = ?$$

Veza između kutne brzine  $\omega$  i frekvencije  $\nu$  je

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu.$$

Snaga  $P$  pri rotaciji krutog tijela jednaka je

$$P = M \cdot \omega,$$

gdje je  $M$  moment sile (zakretni moment),  $\omega$  kutna brzina.

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu \\ P = M \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow P = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow M \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu = P \Rightarrow M \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu = P \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot \nu} = \frac{29000 \text{ W}}{2 \cdot \pi \cdot 60 \frac{1}{\text{s}}} = 76.92 \text{ Nm} \approx 77 \text{ Nm}.$$

### Vježba 218

Koliki je moment sile (zakretni moment) automobilskog motora koji pri 7200 okreta / min razvija snagu 58 kW?

**Rezultat:** 77 Nm.

### Zadatak 219 (Red Passion, gimnazija)

Tijelo mase  $m$  privezano je na užu duljine 1 m i okreće se u vertikalnoj ravnini. Koliki mora biti najmanji broj okreta da tijelo ne padne kada je u najvišoj točki? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 219

$$m, \quad r = 1 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad n = ?$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s.}$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi):

$$v = \frac{n}{t},$$

gdje je  $n$  broj okreta,  $t$  vrijeme za koje su okreti učinjeni.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  težna sila,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

gdje je  $v$  frekvencija (broj okreta u jedinici vremena). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

Budući da tijelo ne smije pasti kada je u najvišoj točki, mora djelovanje sile teže  $G$  na tijelo biti jednako centripetalnoj sili  $F_{cp}$ .

$$F_{cp} = G \Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = m \cdot g \Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow v^2 = \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r}} \Rightarrow v = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Najmanji broj okreta u minuti iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} \\ n = 60 \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow n = 60 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} \Rightarrow n = 60 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} \Rightarrow n = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} =$$

$$= \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{9.81}{1}} \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 29.91 \frac{\text{okr}}{\text{min}} \approx 30 \frac{\text{okr}}{\text{min}}$$

### Vježba 219

Tijelo mase  $m$  privezano je na užu duljine 100 cm i okreće se u vertikalnoj ravnini. Koliki mora biti najmanji broj okreta da tijelo ne padne kada je u najvišoj točki? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 30 okr / min.

### Zadatak 220 (Martina, gimnazija)

Koliko okretaja u minuti ima "supercentrifuga" promjera 18 cm, ako na njezinom obodu na tijelo djeluje sila 80000 puta veća od težine tijela? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 220

$$2 \cdot r = 18 \text{ cm} \Rightarrow r = 9 \text{ cm} = 0.09 \text{ m}, \quad F_{cp} = 80000 \cdot G, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad n = ?$$
$$1 \text{ min} = 60 \text{ s.}$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi):

$$v = \frac{n}{t},$$

gdje je  $n$  broj okreta,  $t$  vrijeme za koje su okreti učinjeni.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  težna sila,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

gdje je  $v$  frekvencija (broj okreta u jedinici vremena). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

$$\left. \begin{array}{l} F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 \\ F_{cp} = 80000 \cdot G \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 \\ F_{cp} = 80000 \cdot m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = 80000 \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = 80000 \cdot m \cdot g / \frac{1}{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow v^2 = \frac{20000 \cdot g}{\pi^2 \cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{20000 \cdot g}{\pi^2 \cdot r} \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{20000 \cdot g}{\pi^2 \cdot r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10000 \cdot 2 \cdot g}{\pi^2 \cdot r}} \Rightarrow v = \frac{100}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{r}}$$

Broj okreta u minuti iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{100}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{r}} \\ n = 60 \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow n = 60 \cdot \frac{100}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{r}} = 60 \cdot \frac{100}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}}{0.09 \text{ m}}} = 28198.73 \frac{okr}{min}$$



### Vježba 220

Koliko okretaja u minuti ima "supercentrifuga" promjera 180 mm, ako na njezinom obodu na tijelo djeluje sila 80000 puta veća od težine tijela? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 28200 okr / min.