

Zadatak 161 (Sanja, gimnazija)

Bakrena kugla polumjera 10 cm vrti se oko osi koja prolazi središtem te učini dva ophoda u sekundi. Koliki rad treba utrošiti da bismo joj kutnu brzinu podvostručili? (gustoća bakra $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 161

$$r = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad v = 2 \text{ Hz}, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1, \quad \rho = 8900 \text{ kg/m}^3, \quad W = \Delta E = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna brzina ω iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je v frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena).

Moment ustrajnosti (tromosti) kugle mase m i polumjera r , s obzirom na os koja prolazi njezinim središtem, iznosi:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti), ω kutna brzina.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Kugla polumjera r ima obujam (volumen)

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Moment tromosti I bakrene kugle iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V} \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{2}{5} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot r^2 =$$
$$\Rightarrow I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi.$$

Rad koji treba utrošiti da bismo kugli podvostručili kutnu brzinu jednak je razlici kinetičke energije poslije udvostručenja kutne brzine i prije udvostručenja:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \\ W = \Delta E_k \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \\ W = E_{k_2} - E_{k_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \\ W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} I &= \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \Rightarrow \omega_1 &= 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \\ W &= \frac{1}{2} \cdot I \cdot (2 \cdot \omega_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} I &= \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \Rightarrow \omega_1 &= 2 \cdot \pi \cdot v \\ W &= \frac{1}{2} \cdot I \cdot 4 \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 & \left. \begin{aligned} I &= \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \Rightarrow \omega_1 &= 2 \cdot \pi \cdot v \\ W &= 2 \cdot I \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} I &= \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \Rightarrow \omega_1 &= 2 \cdot \pi \cdot v \\ W &= \frac{3}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow W = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \cdot (2 \cdot \pi \cdot v)^2 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow W = \frac{4}{5} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \Rightarrow W = \frac{16}{5} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi^3 \cdot v^2 = \\
 & = \frac{16}{5} \cdot 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (0.1 \text{ m})^5 \cdot \pi^3 \cdot \left(2 \frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 35.32 \text{ J}.
 \end{aligned}$$

Vježba 161

Bakrena kugla polumjera 1 dm vrti se oko osi koja prolazi središtem te učini četiri ophoda u dvije sekunde. Koliki rad treba utrošiti da bismo joj kutnu brzinu podvostručili? (gustoća bakra $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 35.32 J.

Zadatak 162 (Jelena, gimnazija)

Niz kosinu istodobno se počinju kotrljati dvije jednake bačve. Jedna je napunjena naftom, a druga katranom. Gustoće su jednake, s time što je katran krut. Na dno kosine stižu:

- A) istodobno
- B) ranije stiže bačva s katranom
- C) ranije stiže bačva s naftom
- D) redoslijed ovisi o nagibu kosine
- E) redoslijed ovisi o promjeru bačava.

Rješenje 162

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Dok je kutna brzina ω za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka, obodna (linearna) brzina v pojedine čestice to je veća što je čestica dalje od osi rotacije. Označimo li udaljenost čestice od osi rotacije sa r, veza između kutne i obodne brzine je

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju (translacije)

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti), ω kutna brzina.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona o očuvanju energije, gravitacijska potencijalna energija bačve na vrhu kosine jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije na dnu kosine. Zato vrijedi:

$$\begin{aligned} E_{gp} &= E_k + E_{kr} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[\omega = \frac{v}{r} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left(\frac{v}{r} \right)^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \cdot 2 \cdot r^2 \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = m \cdot v^2 \cdot r^2 + I \cdot v^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 &= v^2 \cdot (m \cdot r^2 + I) \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = v^2 \cdot (m \cdot r^2 + I) \cdot \frac{1}{m \cdot r^2 + I} \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I}} \end{aligned}$$

Uočimo da je brzina bačve veća ako je moment tromosti manji, odnosno brzina bačve je manja ako je moment tromosti veći. Bačva puna nafte ima manji moment tromosti od bačve s krutim katranom, pa ima veću brzinu, te će stići ranije. Odgovor je pod C.

Vježba 162

Niz kosinu istodobno se počinju kotrljati dvije jednake bačve. Jedna je napunjena naftom, a druga katranom. Gustoće su jednake, s time što je katran krut. Na dno kosine stižu:

- istodobno
- kasnije stiže bačva s katranom
- kasnije stiže bačva s naftom
- redosljed ovisi o nagibu kosine
- redosljed ovisi o promjeru bačava.

Rezultat: B.

Zadatak 163 (Tony, srednja škola)

Šuplja olovna i puna aluminijska kugla jednakih su promjera i masa. Puste li se istodobno kotrljati s vrha kosine, njihov dolazak na dno bit će:

- također istodoban
- olovna kugla stiže ranije
- redosljed dolaska zavisi o nagibu kosine
- aluminijska kugla stiže prije
- redosljed ovisi o promjeru kugala.

Rješenje 163

$$r = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad v = 2 \text{ Hz}, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1, \quad \rho = 8900 \text{ kg/m}^3, \quad W = \Delta E = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Dok je kutna brzina ω za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka, obodna (linearna) brzina

v pojedine čestice to je veća što je čestica dalje od osi rotacije. Označimo li udaljenost čestice od osi rotacije sa r , veza između kutne i obodne brzine je

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment inercije (tromosti), ω kutna brzina.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona o očuvanju energije, gravitacijska potencijalna energija kugle na vrhu kosine jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije na dnu kosine. Zato vrijedi:

$$\begin{aligned} E_{gp} &= E_k + E_{kr} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[\omega = \frac{v}{r} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left(\frac{v}{r} \right)^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \cdot 2 \cdot r^2 \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = m \cdot v^2 \cdot r^2 + I \cdot v^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 &= v^2 \cdot (m \cdot r^2 + I) \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = v^2 \cdot (m \cdot r^2 + I) \cdot \frac{1}{m \cdot r^2 + I} \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I} \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I} \cdot \sqrt{} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I}}. \end{aligned}$$

Uočimo da je brzina kugle veća ako je moment tromosti manji, odnosno brzina kugle je manja ako je moment tromosti veći. Puna aluminijska kugla ima manji moment tromosti od šuplje olovne kugle, pa ima veću brzinu, te će stići ranije. Odgovor je pod D.

Vježba 163

Šuplja olovna i puna aluminijska kugla jednakih su promjera i masa. Puste li se istodobno kotrljati s vrha kosine, njihov dolazak na dno bit će:

- također istodoban
- olovna kugla stiže kasnije
- redosljed dolaska zavisi o nagibu kosine

- D) aluminijska kugla stiže kasnije
E) redosljed ovisi o promjeru kugala.

Rezultat: B.

Zadatak 164 (Biba, srednja škola)

U trenutku kada se zamašnjak motora okreće sa 60 okr/s, isključen je pogonski motor. Zamašnjak se zaustavi nakon 80 s. Koliki je kut opisala za to vrijeme točka na obodu zamašnjaka?

Rješenje 164

$$v = 60 \text{ okr/s} = 60 \text{ Hz}, \quad t = 80 \text{ s}, \quad \varphi = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna je brzina ω za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka i iznosi

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega = \alpha \cdot t,$$

gdje je v frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena), α kutna akceleracija, t vrijeme. Kut φ koji tijelo opiše nakon vremena t dan je formulama:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t, \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2,$$

gdje je ω kutna brzina, α kutna akceleracija.

1. inačica

Kut φ koji je opisala točka na obodu zamašnjaka iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi \cdot v \cdot t = \pi \cdot 60 \frac{1}{s} \cdot 80 \text{ s} = 4800 \cdot \pi.$$

2. inačica

Kut φ koji je opisala točka na obodu zamašnjaka iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \alpha \cdot t, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot v \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot v / \cdot \frac{1}{t} \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{t} \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{t} \cdot t^2 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{t} \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi \cdot v \cdot t = \pi \cdot 60 \frac{1}{s} \cdot 80 \text{ s} = 4800 \cdot \pi.$$

Vježba 164

U trenutku kada se zamašnjak motora okreće sa 30 okr/s, isključen je pogonski motor. Zamašnjak se zaustavi nakon 160 s. Koliki je kut opisala za to vrijeme točka na obodu zamašnjaka?

Rezultat: $4800 \cdot \pi$.

Zadatak 165 (Nea, srednja škola)

Dječak na vrtuljku u 2 minute obiđe 10 puta kružnu stazu. Kolika je frekvencija kružnog gibanja?

Rješenje 165

$$t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}, \quad n = 10 \text{ okr}, \quad v = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom

pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi):

$$v = \frac{n}{t}$$

Frekvencija kružnog gibanja dječaka na vrtuljku iznosi:

$$v = \frac{n}{t} = \frac{10}{120 \text{ s}} = 0.083 \frac{1}{\text{s}} = 0.083 \text{ s}^{-1} = 0.083 \text{ Hz}$$

Vježba 165

Dječak na vrtuljku u 4 minute obiđe 20 puta kružnu stazu. Kolika je frekvencija kružnog gibanja?

Rezultat: 0.083 Hz.

Zadatak 166 (Mia, srednja škola)

Pod utjecajem sile teže maleno tijelo s vrha kuglaste kupole polumjera r klizi po njezinoj vanjskoj površini. Na kojoj će vertikalnoj udaljenosti od početnog položaja tijelo napustiti kupolu? Trenje zanemarimo.

Rješenje 166

$$l = ?$$

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

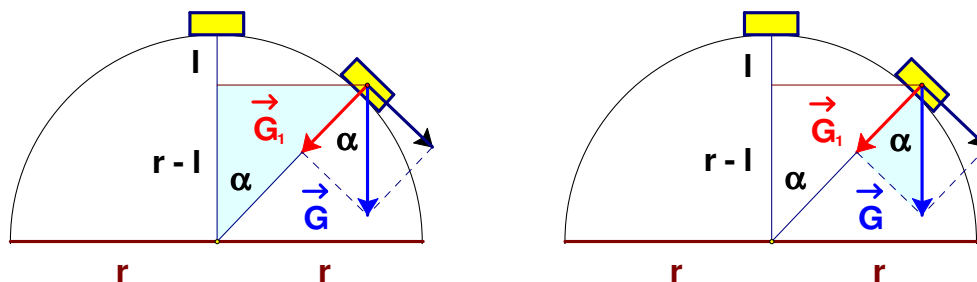
gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Slobodan pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje za koje vrijedi identičan izraz (samo se umjesto puta s piše visina h , umjesto akceleracije a piše akceleracija slobodnog pada g):

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

gdje je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ akceleracija slobodnog pada.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete uz kut i duljine hipotenuze.



Sa slika vidi se da je komponenta G_1 sile teže G u smjeru polumjera r kupole jednaka

$$\cos \alpha = \frac{G_1}{G} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{G_1}{G} \cdot G \Rightarrow G_1 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow G_1 = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

Budući da je

$$\cos \alpha = \frac{r-l}{r},$$

može se pisati

$$G_1 = m \cdot g \cdot \frac{r-l}{r}.$$

Brzina v kojom tijelo klizi niz kupolu iznosi

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot l.$$

Da bi se tijelo gibalo po kupoli brzina v mora biti manja ili jednaka od vrijednosti koje zadovoljava izraz

$$\begin{aligned} F_{cp} = G_1 &\Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \cdot \frac{r-l}{r} \Rightarrow \left[v^2 = 2 \cdot g \cdot l \right] \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l}{r} = m \cdot g \cdot \frac{r-l}{r} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l}{r} = m \cdot g \cdot \frac{r-l}{r} \quad / \cdot \frac{r}{m \cdot g} \Rightarrow 2 \cdot l = r-l \Rightarrow 2 \cdot l + l = r \Rightarrow 3 \cdot l = r \quad / : 3 \Rightarrow l = \frac{r}{3}. \end{aligned}$$

Tijelo će se odvojiti od kupole kada je l veće od dobivene vrijednosti, tj. kada je

$$l > \frac{r}{3}.$$

Vježba 166

Pod utjecajem sile teže maleno tijelo s vrha kuglaste kupole polumjera r klizi po njezinoj vanjskoj površini. Do koje će se vertikalne udaljenosti od početnog položaja tijelo gibati po kupoli? Trenje zanemarimo.

Rezultat: $l = \frac{r}{3}.$

Zadatak 167 (Tomislav, srednja škola)

Koliko ophoda u sekundi učini kotač automobila polumjera 40 cm ako automobil vozi brzinom 108 km/h?

Rješenje 167

$$r = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}, \quad v = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}, \quad \nu = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je r polumjer kružnice, ν frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

Broj ophoda kotača automobila u sekundi iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow \nu = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot r \cdot \pi} \Rightarrow \nu = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0.4 \text{ m} \cdot \pi} = 12 \frac{1}{\text{s}} = 12 \text{ Hz}.$$

Vježba 167

Koliko ophoda u sekundi učini kotač automobila polumjera 20 cm ako automobil vozi brzinom 54 km/h?

Rezultat: 12 Hz.

Zadatak 168 (Tomislav, srednja škola)

Na kružnu ploču mase 2 kg i polumjera 30 cm, koja se može okretati oko svoje osi, djeluje zakretni moment 3.92 N · m. Odredi kutnu akceleraciju ploče.

Rješenje 168

$$m = 2 \text{ kg}, \quad r = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}, \quad M = 3.92 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad \alpha = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M, koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Moment sile M koji okreće tijelo jednak je umnošku momenta tromosti I tijela i kutne akceleracije α . Moment tromosti (ustrajnosti) kružne ploče mase m i polumjera r , s obzirom na os koja prolazi okomito njezinim središtem iznosi:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Kutna akceleracija α kružne ploče iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{2}{m \cdot r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot M}{m \cdot r^2} = \frac{2 \cdot 3.92 \text{ N} \cdot \text{m}}{2 \text{ kg} \cdot (0.3 \text{ m})^2} = 43.56 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 168

Na kružnu ploču mase 4 kg i polumjera 30 cm, koja se može okretati oko svoje osi, djeluje zakretni moment 7.84 N · m. Odredi kutnu akceleraciju ploče.

Rezultat: $43.56 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$

Zadatak 169 (Pero, elektrotehnička škola)

Za užu, duljine 0.7 m, vezano je tijelo mase 0.5 kg. Kolikom najvećom kutnom brzinom smije rotirati tijelo u horizontalnoj ravnini pod uvjetom da uža ne pukne? Uža može izdržati najveću silu 20 N.

Rješenje 169

$$r = 0.7 \text{ m}, \quad m = 0.5 \text{ kg}, \quad F = 20 \text{ N}, \quad \omega = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

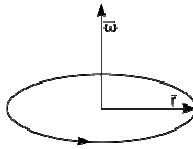
$$F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2,$$

gdje je ω kutna brzina. Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

Budući da tijelo rotira u horizontalnoj (vodoravnoj) ravnini, uža zateže samo centripetalna sila pa slijedi:

$$F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2 \Rightarrow F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{m \cdot r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{F_{cp}}{m \cdot r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{F_{cp}}{m \cdot r} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F_{cp}}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{20 \text{ N}}{0.5 \text{ kg} \cdot 0.7 \text{ m}}} = 7.56 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



Vježba 169

Za užu, duljine 7 dm, vezano je tijelo mase 50 dag. Kolikom najvećom kutnom brzinom smije rotirati tijelo u horizontalnoj ravnini pod uvjetom da uža ne pukne? Uža može izdržati najveću silu 20 N.

Rezultat: $7.56 \text{ rad/s}.$