

### Zadatak 161 (Sanja, gimnazija)

Bakrena kugla polumjera 10 cm vrti se oko osi koja prolazi središtem te učini dva ophoda u sekundi. Koliki rad treba utrošiti da bismo joj kutnu brzinu podvostručili? (gustoća bakra  $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$ )

#### Rješenje 161

$$r = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad v = 2 \text{ Hz}, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1, \quad \rho = 8900 \text{ kg/m}^3, \quad W = \Delta E = ?$$

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna brzina  $\omega$  iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je  $v$  frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena).

Moment ustrajnosti (tromosti) kugle mase  $m$  i polumjera  $r$ , s obzirom na os koja prolazi njezinim središtem, iznosi:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je  $I$  moment ustrajnosti (tromosti),  $\omega$  kutna brzina.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Kugla polumjera  $r$  ima obujam (volumen)

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Moment tromosti  $I$  bakrene kugle iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V} \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{2}{5} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot r^2 =$$
$$\Rightarrow I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi.$$

Rad koji treba utrošiti da bismo kugli podvostručili kutnu brzinu jednak je razlici kinetičke energije poslije udvostručenja kutne brzine i prije udvostručenja:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \\ W = \Delta E_k \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \\ W = E_{k_2} - E_{k_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \\ W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} I &= \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \Rightarrow \omega_1 &= 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \\ W &= \frac{1}{2} \cdot I \cdot (2 \cdot \omega_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} I &= \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \Rightarrow \omega_1 &= 2 \cdot \pi \cdot v \\ W &= \frac{1}{2} \cdot I \cdot 4 \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \left. \begin{aligned} I &= \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \Rightarrow \omega_1 &= 2 \cdot \pi \cdot v \\ W &= 2 \cdot I \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} I &= \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \\ \Rightarrow \omega_1 &= 2 \cdot \pi \cdot v \\ W &= \frac{3}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow W = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \cdot (2 \cdot \pi \cdot v)^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow W = \frac{4}{5} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \Rightarrow W = \frac{16}{5} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi^3 \cdot v^2 = \\
& = \frac{16}{5} \cdot 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (0.1 \text{ m})^5 \cdot \pi^3 \cdot \left(2 \frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 35.32 \text{ J}.
\end{aligned}$$

### Vježba 161

Bakrena kugla polumjera 1 dm vrti se oko osi koja prolazi središtem te učini četiri ophoda u dvije sekunde. Koliki rad treba utrošiti da bismo joj kutnu brzinu podvostručili? (gustoća bakra  $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$ )

**Rezultat:** 35.32 J.

### Zadatak 162 (Jelena, gimnazija)

Niz kosinu istodobno se počinju kotrljati dvije jednake bačve. Jedna je napunjena naftom, a druga katranom. Gustoće su jednake, s time što je katran krut. Na dno kosine stižu:

- A) istodobno
- B) ranije stiže bačva s katranom
- C) ranije stiže bačva s naftom
- D) redosljed ovisi o nagibu kosine
- E) redosljed ovisi o promjeru bačava.

### Rješenje 162

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Dok je kutna brzina  $\omega$  za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka, obodna (linearna) brzina v pojedine čestice to je veća što je čestica dalje od osi rotacije. Označimo li udaljenost čestice od osi rotacije sa r, veza između kutne i obodne brzine je

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju (translacije)

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti),  $\omega$  kutna brzina.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona o očuvanju energije, gravitacijska potencijalna energija bačve na vrhu kosine jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije na dnu kosine. Zato vrijedi:

$$\begin{aligned} E_{gp} &= E_k + E_{kr} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[ \omega = \frac{v}{r} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left( \frac{v}{r} \right)^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \quad / \cdot 2 \cdot r^2 \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = m \cdot v^2 \cdot r^2 + I \cdot v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = v^2 \cdot (m \cdot r^2 + I) \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = v^2 \cdot (m \cdot r^2 + I) \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot r^2 + I} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I}} \end{aligned}$$

Uočimo da je brzina bačve veća ako je moment tromosti manji, odnosno brzina bačve je manja ako je moment tromosti veći. Bačva puna nafte ima manji moment tromosti od bačve s krutim katranom, pa ima veću brzinu, te će stići ranije. Odgovor je pod C.

### Vježba 162

Niz kosinu istodobno se počinju kotrljati dvije jednake bačve. Jedna je napunjena naftom, a druga katranom. Gustoće su jednake, s time što je katran krut. Na dno kosine stižu:

- istodobno
- kasnije stiže bačva s katranom
- kasnije stiže bačva s naftom
- redosljed ovisi o nagibu kosine
- redosljed ovisi o promjeru bačava.

**Rezultat:** B.

### Zadatak 163 (Tony, srednja škola)

Šuplja olovna i puna aluminijska kugla jednakih su promjera i masa. Puste li se istodobno kotrljati s vrha kosine, njihov dolazak na dno bit će:

- također istodoban
- olovna kugla stiže ranije
- redosljed dolaska zavisi o nagibu kosine
- aluminijska kugla stiže prije
- redosljed ovisi o promjeru kugala.

### Rješenje 163

$$r = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad v = 2 \text{ Hz}, \quad \omega_2 = 2 \cdot \omega_1, \quad \rho = 8900 \text{ kg/m}^3, \quad W = \Delta E = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Dok je kutna brzina  $\omega$  za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka, obodna (linearna) brzina

v pojedine čestice to je veća što je čestica dalje od osi rotacije. Označimo li udaljenost čestice od osi rotacije sa  $r$ , veza između kutne i obodne brzine je

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je  $I$  moment ustrajnosti (tromosti),  $\omega$  kutna brzina.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona o očuvanju energije, gravitacijska potencijalna energija kugle na vrhu kosine jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije na dnu kosine. Zato vrijedi:

$$\begin{aligned} E_{gp} &= E_k + E_{kr} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[ \omega = \frac{v}{r} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left( \frac{v}{r} \right)^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \cdot 2 \cdot r^2 \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = m \cdot v^2 \cdot r^2 + I \cdot v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = v^2 \cdot (m \cdot r^2 + I) \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2 = v^2 \cdot (m \cdot r^2 + I) \cdot \frac{1}{m \cdot r^2 + I} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I} \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I} \cdot \sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h \cdot r^2}{m \cdot r^2 + I}}. \end{aligned}$$

Uočimo da je brzina kugle veća ako je moment tromosti manji, odnosno brzina kugle je manja ako je moment tromosti veći. Puna aluminijska kugla ima manji moment tromosti od šuplje olovne kugle, pa ima veću brzinu, te će stići ranije. Odgovor je pod D.

### Vježba 163

Šuplja olovna i puna aluminijska kugla jednakih su promjera i masa. Puste li se istodobno kotrljati s vrha kosine, njihov dolazak na dno bit će:

- također istodoban
- olovna kugla stiže kasnije
- redosljed dolaska zavisi o nagibu kosine

- D) aluminijska kugla stiže kasnije  
E) redosljed ovisi o promjeru kugala.

**Rezultat:** B.

**Zadatak 164 (Biba, srednja škola)**

U trenutku kada se zamašnjak motora okreće sa 60 okr/s, isključen je pogonski motor. Zamašnjak se zaustavi nakon 80 s. Koliki je kut opisala za to vrijeme točka na obodu zamašnjaka?

**Rješenje 164**

$$v = 60 \text{ okr/s} = 60 \text{ Hz}, \quad t = 80 \text{ s}, \quad \varphi = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna je brzina  $\omega$  za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka i iznosi

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad \omega = \alpha \cdot t,$$

gdje je  $v$  frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena),  $\alpha$  kutna akceleracija,  $t$  vrijeme. Kut  $\varphi$  koji tijelo opiše nakon vremena  $t$  dan je formulama:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t, \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2,$$

gdje je  $\omega$  kutna brzina,  $\alpha$  kutna akceleracija.

1. inačica

Kut  $\varphi$  koji je opisala točka na obodu zamašnjaka iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi \cdot v \cdot t = \pi \cdot 60 \frac{1}{s} \cdot 80 \text{ s} = 4800 \cdot \pi.$$

2. inačica

Kut  $\varphi$  koji je opisala točka na obodu zamašnjaka iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \alpha \cdot t, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot v \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot v / \cdot \frac{1}{t} \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{t} \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{t} \cdot t^2 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{t} \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi \cdot v \cdot t = \pi \cdot 60 \frac{1}{s} \cdot 80 \text{ s} = 4800 \cdot \pi.$$

**Vježba 164**

U trenutku kada se zamašnjak motora okreće sa 30 okr/s, isključen je pogonski motor. Zamašnjak se zaustavi nakon 160 s. Koliki je kut opisala za to vrijeme točka na obodu zamašnjaka?

**Rezultat:**  $4800 \cdot \pi$ .

**Zadatak 165 (Nea, srednja škola)**

Dječak na vrtuljku u 2 minute obiđe 10 puta kružnu stazu. Kolika je frekvencija kružnog gibanja?

**Rješenje 165**

$$t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}, \quad n = 10 \text{ okr}, \quad v = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom

pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi):

$$v = \frac{n}{t}$$

Frekvencija kružnog gibanja dječaka na vrtuljku iznosi:

$$v = \frac{n}{t} = \frac{10}{120 \text{ s}} = 0.083 \frac{1}{s} = 0.083 \text{ s}^{-1} = 0.083 \text{ Hz}$$

### Vježba 165

Dječak na vrtuljku u 4 minute obiđe 20 puta kružnu stazu. Kolika je frekvencija kružnog gibanja?

**Rezultat:** 0.083 Hz.

### Zadatak 166 (Mia, srednja škola)

Pod utjecajem sile teže maleno tijelo s vrha kuglaste kupole polumjera  $r$  klizi po njezinoj vanjskoj površini. Na kojoj će vertikalnoj udaljenosti od početnog položaja tijelo napustiti kupolu? Trenje zanemarimo.

### Rješenje 166

$$l = ?$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Težina tijela  $G$  jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

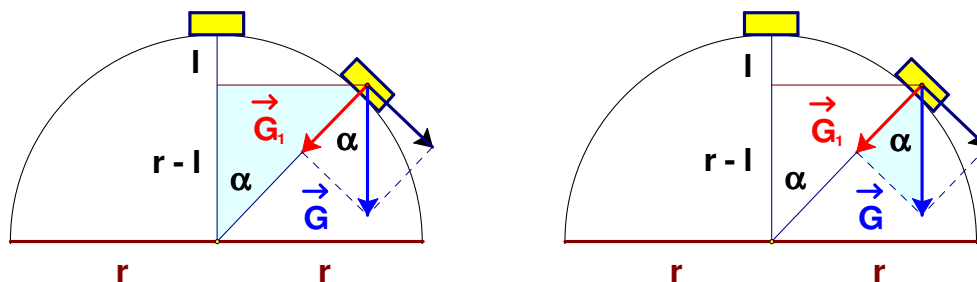
gdje je  $v$  brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Slobodan pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje za koje vrijedi identičan izraz (samo se umjesto puta  $s$  piše visina  $h$ , umjesto akceleracije  $a$  piše akceleracija slobodnog pada  $g$ ):

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

gdje je  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  akceleracija slobodnog pada.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete uz kut i duljine hipotenuze.



Sa slika vidi se da je komponenta  $G_1$  sile teže  $G$  u smjeru polumjera  $r$  kupole jednaka

$$\cos \alpha = \frac{G_1}{G} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{G_1}{G} / \cdot G \Rightarrow G_1 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow G_1 = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

Budući da je

$$\cos \alpha = \frac{r-l}{r},$$

može se pisati

$$G_1 = m \cdot g \cdot \frac{r-l}{r}.$$

Brzina v kojom tijelo klizi niz kupolu iznosi

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot l.$$

Da bi se tijelo gibalo po kupoli brzina v mora biti manja ili jednaka od vrijednosti koje zadovoljava izraz

$$\begin{aligned} F_{cp} = G_1 &\Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \cdot \frac{r-l}{r} \Rightarrow \left[ v^2 = 2 \cdot g \cdot l \right] \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l}{r} = m \cdot g \cdot \frac{r-l}{r} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l}{r} = m \cdot g \cdot \frac{r-l}{r} \quad / \cdot \frac{r}{m \cdot g} \Rightarrow 2 \cdot l = r-l \Rightarrow 2 \cdot l + l = r \Rightarrow 3 \cdot l = r \quad / : 3 \Rightarrow l = \frac{r}{3}. \end{aligned}$$

Tijelo će se odvojiti od kupole kada je l veće od dobivene vrijednosti, tj. kada je

$$l > \frac{r}{3}.$$

### Vježba 166

Pod utjecajem sile teže maleno tijelo s vrha kuglaste kupole polumjera r klizi po njezinoj vanjskoj površini. Do koje će se vertikalne udaljenosti od početnog položaja tijelo gibati po kupoli? Trenje zanemarimo.

**Rezultat:**  $l = \frac{r}{3}.$

### Zadatak 167 (Tomislav, srednja škola)

Koliko ophoda u sekundi učini kotač automobila polumjera 40 cm ako automobil vozi brzinom 108 km/h?

#### Rješenje 167

$$r = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}, \quad v = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je r polumjer kružnice,  $\nu$  frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

Broj ophoda kotača automobila u sekundi iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow \nu = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot r \cdot \pi} \Rightarrow \nu = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0.4 \text{ m} \cdot \pi} = 12 \frac{1}{\text{s}} = 12 \text{ Hz}.$$

### Vježba 167

Koliko ophoda u sekundi učini kotač automobila polumjera 20 cm ako automobil vozi brzinom 54 km/h?

**Rezultat:** 12 Hz.

### Zadatak 168 (Tomislav, srednja škola)

Na kružnu ploču mase 2 kg i polumjera 30 cm, koja se može okretati oko svoje osi, djeluje zakretni moment 3.92 N · m. Odredi kutnu akceleraciju ploče.

#### Rješenje 168

$$m = 2 \text{ kg}, \quad r = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}, \quad M = 3.92 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad \alpha = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M, koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Moment sile  $M$  koji okreće tijelo jednak je umnošku momenta tromosti  $I$  tijela i kutne akceleracije  $\alpha$ . Moment tromosti (ustrajnosti) kružne ploče mase  $m$  i polumjera  $r$ , s obzirom na os koja prolazi okomito njezinim središtem iznosi:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Kutna akceleracija  $\alpha$  kružne ploče iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{2}{m \cdot r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot M}{m \cdot r^2} = \frac{2 \cdot 3.92 \text{ N} \cdot \text{m}}{2 \text{ kg} \cdot (0.3 \text{ m})^2} = 43.56 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

### Vježba 168

Na kružnu ploču mase 4 kg i polumjera 30 cm, koja se može okretati oko svoje osi, djeluje zakretni moment 7.84 N · m. Odredi kutnu akceleraciju ploče.

**Rezultat:**  $43.56 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$

### Zadatak 169 (Pero, elektrotehnička škola)

Za užu, duljine 0.7 m, vezano je tijelo mase 0.5 kg. Kolikom najvećom kutnom brzinom smije rotirati tijelo u horizontalnoj ravnini pod uvjetom da užu ne pukne? Uža može izdržati najveću silu 20 N.

### Rješenje 169

$$r = 0.7 \text{ m}, \quad m = 0.5 \text{ kg}, \quad F = 20 \text{ N}, \quad \omega = ?$$

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

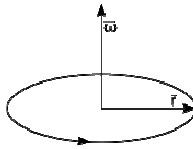
$$F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2,$$

gdje je  $\omega$  kutna brzina. Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

Budući da tijelo rotira u horizontalnoj (vodoravnoj) ravnini, uža zateže samo centripetalna sila pa slijedi:

$$F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2 \Rightarrow F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{m \cdot r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{F_{cp}}{m \cdot r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{F_{cp}}{m \cdot r} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F_{cp}}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{20 \text{ N}}{0.5 \text{ kg} \cdot 0.7 \text{ m}}} = 7.56 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



### Vježba 169

Za užu, duljine 7 dm, vezano je tijelo mase 50 dag. Kolikom najvećom kutnom brzinom smije rotirati tijelo u horizontalnoj ravnini pod uvjetom da uža ne pukne? Uža može izdržati najveću silu 20 N.

**Rezultat:**  $7.56 \text{ rad/s}.$

### Zadatak 170 (Vesna, srednja škola)

Izračunaj ophodno vrijeme umjetnog zemljina satelita koji kruži na udaljenosti  $r$  od središta Zemlje.



### Rješenje 170

$$r, \quad T = ?$$

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je  $T$  perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

#### Opći zakon gravitacije:

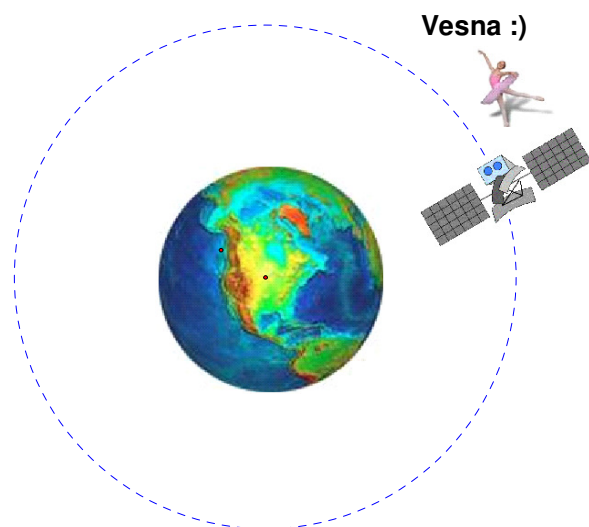
Ako se bilo koja dva tijela mase  $m_1$  i  $m_2$  nalaze u međusobnoj udaljenosti  $r$ , među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je  $G$  gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

Sila gravitacije između satelita mase  $m$  i Zemlje mase  $m_Z$  na udaljenosti  $r$  mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti  $r$  od središta vrtnje:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} &= G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r^2} \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r^2} \cdot \frac{T^2 \cdot r^2}{m} \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot r^3 = G \cdot m_Z \cdot T^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \cdot m_Z \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot r^3 \Rightarrow G \cdot m_Z \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot r^3 \cdot \frac{1}{G \cdot m_Z} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot m_Z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot m_Z} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot m_Z}} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array} \right] \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2^2 \cdot \pi^2 \cdot r^2 \cdot r}{G \cdot m_Z}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{G \cdot m_Z}}. \end{aligned}$$



### Vježba 170

Izračunaj ophodno vrijeme umjetnog zemljina satelita koji kruži na udaljenosti  $2 \cdot r$  od središta Zemlje.

**Rezultat:** 
$$T = 4 \cdot r \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot r}{G \cdot m_Z}}.$$

### Zadatak 171 (Ivan, gimnazija)

Kuglica mase  $m$  učvršćena na kraj gumene vrpce, koeficijenta elastičnosti  $k$ , rotira u horizontalnoj ravnini kutnom brzinom  $\omega$ . Duljina nerastegnute vrpce je  $l_0$ , a sila napetosti vrpce razmjerna je produljenju vrpce. Odredi polumjer kružne staze kuglice.

### Rješenje 171

$$m, \quad k, \quad \omega, \quad l_0, \quad r = ?$$

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici, polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

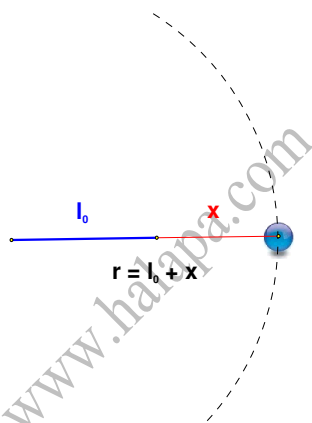
$$F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2,$$

gdje je  $\omega$  kutna brzina tijela. Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak  $x$  i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za neko tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku  $x$ , smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonijski titra. Slovom  $x$  označili smo elongaciju, tj. udaljenost točke koja titra od položaja ravnoteže u bilo kojem trenutku. Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile  $F = -k \cdot s$  ili neke druge sile proporcionalne elongaciji.



Neka je  $r$  polumjer kružnice po kojoj se giba kuglica učvršćena na kraj gumene vrpce čija je duljina u nerastegnutom stanju  $l_0$ . Očito je da se gumena vrpca produljila za

$$x = r - l_0.$$

Budući da je sila napetosti vrpce razmjerna sa produljenjem vrpce  $x$ , slijedi

$$F = k \cdot x \Rightarrow F = k \cdot (r - l_0).$$

Sila napetosti vrpce ujedno je i centripetalna sila koja uzrokuje gibanje kuglice po kružnici.

$$F = F_{cp} \Rightarrow k \cdot (r - l_0) = m \cdot r \cdot \omega^2 \Rightarrow k \cdot r - k \cdot l_0 = m \cdot r \cdot \omega^2 \Rightarrow k \cdot r - m \cdot r \cdot \omega^2 = k \cdot l_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot (k - m \cdot \omega^2) = k \cdot l_0 \Rightarrow r \cdot (k - m \cdot \omega^2) = k \cdot l_0 \cdot \frac{1}{k - m \cdot \omega^2} \Rightarrow r = \frac{k \cdot l_0}{k - m \cdot \omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{k}{k - m \cdot \omega^2} \cdot l_0.$$

### Vježba 171

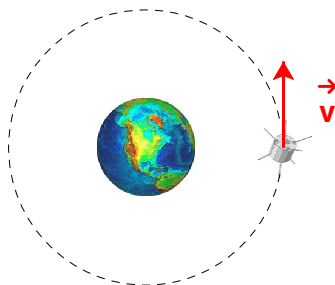
Kuglica mase  $m$  učvršćena na kraj gumene vrpce, koeficijenta elastičnosti  $k$ , rotira u horizontalnoj ravnini kutnom brzinom  $\omega$ . Duljina nerastegnute vrpce je  $l_0$ , a sila napetosti vrpce razmjerna je produljenju vrpce. Odredi silu napetosti  $F$ .

**Rezultat:** 
$$F = \frac{k \cdot l_0 \cdot m \cdot \omega^2}{k - m \cdot \omega^2}$$

**Zadatak 172 (Martin, srednja škola)**

Satelit kruži oko Zemlje. Na slici je prikazan vektor brzine satelita u jednoj točki putanje. Akceleracija satelita je:

- A. jednaka nuli
- B. usmjerena prema središtu Zemlje
- C. usmjerena od središta Zemlje
- D. istog smjera kao i brzina

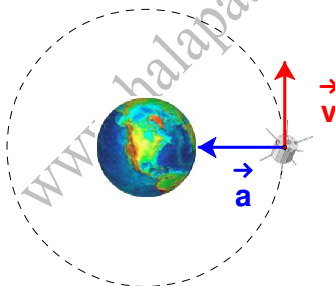


**Rješenje 172**

Da bi se tijelo, mase  $m$ , gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot a_{cp},$$

gdje je  $a_{cp}$  centripetalna akceleracija. Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.



**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

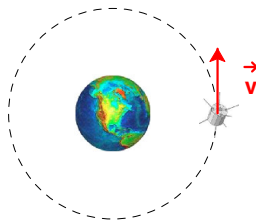
$$F = m \cdot a.$$

Akceleracija satelita je usmjerena prema središtu Zemlje. Odgovor je pod B.

**Vježba 172**

Satelit kruži oko Zemlje. Na slici je prikazan vektor brzine satelita u jednoj točki putanje. Centripetalna sila je:

- A. jednaka nuli
- B. usmjerena prema središtu Zemlje
- C. usmjerena od središta Zemlje
- D. istog smjera kao i brzina



**Rezultat:** B.

### Zadatak 173 (Vlado, srednja škola)

Koliko okreta u minuti učine kotači vagona kada vlak vozi brzinom 108 km/h? Promjer kotača je 0.74 m.

#### Rješenje 173

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad v = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}, \quad 2 \cdot r = 0.74 \text{ m} \Rightarrow r = 0.37 \text{ m}, \\ n = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi):

$$v = \frac{n}{t}$$

Kutna brzina  $\omega$  iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je  $v$  frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena).

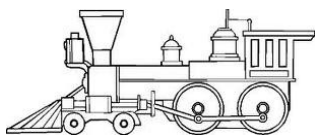
Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je  $r$  polupromjer kružnice,  $v$  frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

Obodna (linearna) brzina  $v$  na udaljenosti  $r$  od središta vrtnje brzina je u smjeru staze:

$$v = r \cdot \omega.$$



1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{n}{t}, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow v = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \Rightarrow v = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} / \frac{t}{r \cdot 2 \cdot \pi} \Rightarrow \\ \Rightarrow n = \frac{v \cdot t}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s}}{2 \cdot 0.37 \text{ m} \cdot \pi} = 774.$$

2. inačica

Računamo frekvenciju kotača vagona (broj okreta u 1 sekundi).

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow v = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow v = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot v / \frac{1}{r \cdot 2 \cdot \pi} \Rightarrow v = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0.37 \text{ m} \cdot \pi} = 12.90 \text{ s}^{-1}.$$

U 1 minuti (60 sekundi) bit će 60 puta više okreta.

$$n = 60 \text{ s} \cdot v = 60 \text{ s} \cdot 12.90 \text{ s}^{-1} = 774.$$

### Vježba 173

Koliko okreta u 2 minute učine kotači vagona kada vlak vozi brzinom 108 km/h? Promjer kotača je 0.74 m.

**Rezultat:** 1549.

### Zadatak 174 (Goga, medicinska škola)

Automobil putuje brzinom stalnoga iznosa po vodoravnoj kružnoj cesti. Rezultantna sila na automobil je:

- A. jednaka nuli,
- B. usmjerena u smjeru gibanja automobila,
- C. usmjerena prema središtu kruga kojega opisuje cesta,

D. usmjerena od središta kruga kojega opisuje cesta.

### Rješenje 174

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice.

Budući da se automobil giba brzinom stalnoga iznosa po vodoravnoj kružnoj cesti, rezultantna sila na nj je usmjerena prema središtu kruga kojega opisuje cesta.

Odgovor je pod C.

### Vježba 174

Tijelo se giba pravocrtno stalnom brzinom. Rezultantna sila na tijelo je:

- A. jednaka nuli,
- B. usmjerena u smjeru gibanja automobila,
- C. usmjerena prema središtu kruga kojega opisuje cesta,
- D. usmjerena od središta kruga kojega opisuje cesta.

**Rezultat:** A.

### Zadatak 175 (Dada, srednja škola)

Brzina gibanja vozila čiji kotači imaju promjer 1.5 m iznosi 54 km/h.

- a) Kolika je njihova kutna brzina?
- b) Koliko okretaja napravi kotač na putu od 100 m?

### Rješenje 175

$d = 1.5 \text{ m}$ ,  $v = 54 \text{ km/h} = [54 : 3.6] = 15 \text{ m/s}$ ,  $s = 100 \text{ m}$ ,  $\omega = ?$ ,  $n = ?$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice,  $\nu$  frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne (linearne) brzine  $v$  i kutne brzine  $\omega$  neke čestice pri rotaciji po kružnici polumjera  $r$  vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}.$$

- a) Računamo kutnu brzinu kotača.

Budući da je brzina vozila jednaka obodnoj (linearnoj) brzini točaka na rubovima kotača, vrijedi:

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} r = \frac{d}{2} \\ d - \text{promjer kruga} \\ r - \text{polumjer kruga} \end{array} \right] \Rightarrow \omega = \frac{v}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \omega = \frac{2 \cdot v}{d} = \frac{2 \cdot 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1.5 \text{ m}} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- b) Računamo broj okretaja kotača na putu  $s$ .

$$n = \frac{s}{O} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{opseg kruga} \\ O = d \cdot \pi \end{array} \right] \Rightarrow n = \frac{s}{d \cdot \pi} = \frac{100 \text{ m}}{1.5 \text{ m} \cdot \pi} = 21.2 \text{ okretaja}.$$

### Vježba 175

Brzina gibanja vozila čiji kotači imaju promjer 3 m iznosi 108 km/h. Kolika je njihova kutna brzina?

**Rezultat:** 20 rad/s.

### Zadatak 176 (Vesna, strukovna škola)

Izračunajte kutnu brzinu satne, minutne i sekundne kazaljke sata.

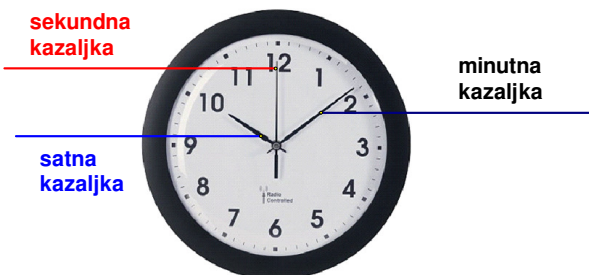
### Rješenje 176

1 dan = 24 h, 1 h = 60 min, 1 min = 60 s,  $\omega_1 = ?$ ,  $\omega_2 = ?$ ,  $\omega_3 = ?$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna brzina ili često zvana kružna frekvencija izračunava se po formuli

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T},$$

gdje je T perioda (vrijeme jednog titraja ili okretaja).



a) Satna kazaljka okrene se jednom oko svoje osi za 12 sati. Njezina je perioda:

$$T_1 = 12 \text{ h} \Rightarrow T_1 = 12 \cdot 3600 \text{ s} \Rightarrow T_1 = 43200 \text{ s}.$$

Kutna brzina iznosi:

$$\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi}{43200 \text{ s}} = 1.454 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

b) Minutna kazaljka okrene se jednom oko svoje osi za 1 sat. Njezina je perioda:

$$T_2 = 1 \text{ h} \Rightarrow T_2 = 3600 \text{ s}.$$

Kutna brzina iznosi:

$$\omega_2 = \frac{2 \cdot \pi}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi}{3600 \text{ s}} = 1.745 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

c) Sekundna kazaljka okrene se jednom oko svoje osi za 1 minutu. Njezina je perioda:

$$T_3 = 1 \text{ min} \Rightarrow T_3 = 60 \text{ s}.$$

Kutna brzina iznosi:

$$\omega_3 = \frac{2 \cdot \pi}{T_3} = \frac{2 \cdot \pi}{60 \text{ s}} = 1.047 \cdot 10^{-1} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

### Vježba 176

Kolika je kutna brzina rotacije Zemlje oko svoje osi?

**Rezultat:**  $7.272 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}.$

### Zadatak 177 (Ivan, srednja škola)

Dva se tijela gibaju jednoliko svako po svojoj kružnici. Gibanja su opisana jednakim centripetalnim akceleracijama. Ako za polumjere putanja vrijedi  $r_1 : r_2 = 4 : 1$ , tada za ophodne brzine vrijedi:

A.  $v_1 : v_2 = 2 : 1$       B.  $v_1 : v_2 = 4 : 1$       C.  $v_1 : v_2 = 1 : 2$       D.  $v_1 : v_2 = 1 : 4$

### Rješenje 177

$$r_1 : r_2 = 4 : 1, \quad v_1 : v_2 = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Budući da je kod jednolikog gibanja po kružnici brzina  $v$  stalna po iznosu, ali ne i po smjeru, mora postojati akceleracija koju nazivamo centripetalna akceleracija. Centripetalna akceleracija dana je izrazom:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $v$  obodna (ophodna brzina),  $r$  polumjer kružnice.  
Računamo omjer ophodnih brzina.

$$\left. \begin{array}{l} a_{cp1} = \frac{v_1^2}{r_1} \\ a_{cp2} = \frac{v_2^2}{r_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{uvjet} \\ a_{cp1} = a_{cp2} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{v_2^2}{r_2} \Rightarrow \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{v_2^2}{r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{uvjet} \\ \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{1} \end{array} \right] \Rightarrow \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 = \frac{4}{1} \Rightarrow \left( \frac{v_1}{v_2} \right) = \frac{4}{1} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{4}{1}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{1} \Rightarrow v_1 : v_2 = 2 : 1.$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 177

Dva se tijela gibaju jednoliko svako po svojoj kružnici. Gibanja su opisana jednakim centripetalnim akceleracijama. Ako za polumjere putanja vrijedi  $r_1 : r_2 = 9 : 1$ , tada za ophodne brzine vrijedi:

A.  $v_1 : v_2 = 1 : 3$       B.  $v_1 : v_2 = 3 : 1$       C.  $v_1 : v_2 = 1 : 9$       D.  $v_1 : v_2 = 9 : 1$

**Rezultat:** B.

### Zadatak 178 (Jure, gimnazija)

Tijelo mase  $m$  vrti se po kružnoj putanji privezano na nit koja može izdržati silu 6.3 N. Kružna putanja je u vodoravnoj ravnini, a polumjer joj iznosi 0.4 m. Perioda vrtnje tijela je 2.1 s. Koliku najveću masu nit može držati pri ovakvoj vrtnji?

### Rješenje 178

$$F = 6.3 \text{ N}, \quad r = 0.4 \text{ m}, \quad T = 2.1 \text{ s}, \quad m = ?$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}.$$

Tijelo se vrti po kružnici i privezano je na nit koja može izdržati silu  $F$  pa centripetalna sila  $F_{cp}$  mora po iznosu biti jednaka sili  $F$ .

$$\left. \begin{array}{l} F = F_{cp} \\ F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow F = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \cdot \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow m = F \cdot \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} =$$

$$= 6.3 \text{ N} \cdot \frac{(2.1 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.4 \text{ m}} = 1.759 \text{ kg}.$$

### Vježba 178

Tijelo mase  $m$  vrti se po kružnoj putanji privezano na nit koja može izdržati silu 12.6 N. Kružna putanja je u vodoravnoj ravnini, a polumjer joj iznosi 4 dm. Perioda vrtnje tijela je 2.1 s. Koliku najveću masu nit može držati pri ovakvoj vrtnji?

**Rezultat:** 3.519 kg.

**Zadatak 179 (Matea, gimnazija)**

Astronaut se priprema u horizontalnoj centrifugi polumjera 4 m koja jednoliko kruži. Kolika je obodna brzina astronauta ako centripetalno ubrzanje iznosi  $3 \cdot g$ ? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 179**

$$r = 4 \text{ m}, \quad a_{cp} = 3 \cdot g, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Budući da je kod jednolikog gibanja po kružnici brzina  $v$  stalna po iznosu, ali ne i po smjeru, mora postojati akceleracija koju nazivamo centripetalna akceleracija. Centripetalna akceleracija dana je izrazom:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r},$$

gdje je  $v$  obodna (ophodna brzina),  $r$  polumjer kružnice.

Računamo obodnu brzinu.

$$\begin{aligned} a_{cp} = \frac{v^2}{r} &\Rightarrow a_{cp} = \frac{v^2}{r} \cdot r \Rightarrow v^2 = r \cdot a_{cp} \Rightarrow [a_{cp} = 3 \cdot g] \Rightarrow v^2 = r \cdot 3 \cdot g \Rightarrow v^2 = 3 \cdot r \cdot g \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = 3 \cdot r \cdot g \quad / \sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow v = \sqrt{3 \cdot r \cdot g} = \sqrt{3 \cdot 4 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10.85 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

**Vježba 179**

Astronaut se priprema u horizontalnoj centrifugi polumjera 16 m koja jednoliko kruži. Kolika je obodna brzina astronauta ako centripetalno ubrzanje iznosi  $3 \cdot g$ ? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 21.70 m/s.

**Zadatak 180 (Ivan, gimnazija)**

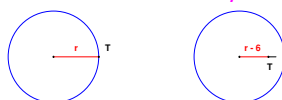
Obodna brzina točke na rubu rotirajuće kružne ploče 4 je puta veća od brzine točke koja je 6 cm bliže središtu. Koliki je polumjer ploče?

**Rješenje 180**

$$v_1, \quad v_2, \quad v_1 = 4 \cdot v_2, \quad v_2 = v - \text{brzina bliže točke}, \quad r_1 = r, \quad r_2 = r - 6, \quad r = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne (linearne) brzine  $v$  i kutne brzine  $\omega$  neke čestice pri rotaciji po kružnici polumjera  $r$  vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$



Budući da su kutne brzine čestice kružne ploče jednake, slijedi:

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} \Rightarrow \frac{4 \cdot v}{r} = \frac{v}{r-6} \Rightarrow \frac{4 \cdot v}{r} = \frac{v}{r-6} \cdot \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{4}{r} = \frac{1}{r-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (r-6) = r \cdot 1 \Rightarrow 4 \cdot r - 24 = r \Rightarrow 4 \cdot r - r = 24 \Rightarrow 3 \cdot r = 24 \Rightarrow 3 \cdot r = 24 \quad / : 3 \Rightarrow r = 8 \Rightarrow r = 8 \text{ cm}.$$

**Vježba 180**

Obodna brzina točke na rubu rotirajuće kružne ploče 5 je puta veća od brzine točke koja je 6 cm bliže središtu. Koliki je polumjer ploče?

**Rezultat:**  $r = 7.5 \text{ cm}$ .