

### Zadatak 141 (Mily, gimnazija)

Akrobat u automobilu vozi po horizontalnom krugu na unutrašnjoj stijeni plašta uspravnog valjka (zid smrti). Koliki mora biti najmanji faktor trenja  $\mu$  između kotača i uspravne stijene da automobil pri brzini  $v$  ne padne sa stijene? Polumjer valjka neka je  $r$ . ( $g$  je ubrzanje sile teže)

#### Rješenje 141

$$v, \quad r, \quad g, \quad \mu = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

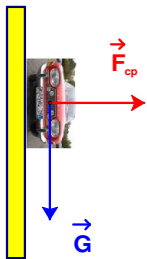
Težina tijela  $G$  jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.



Budući da automobil vozi po horizontalnom krugu na unutrašnjoj stijeni plašta uspravnog valjka, u horizontalnom smjeru na njega djeluje okomita sila podloge  $F_N$ . Ona djeluje kao centripetalna sila:

$$\left. \begin{array}{l} F_N = F_{cp} \\ F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow F_N = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Da automobil na bi pao sa stijene njegova težina  $G$  mora biti jednaka trenju  $F_{tr}$  o stijenu zida.

$$\left. \begin{array}{l} G = F_{tr} \\ F_{tr} = \mu \cdot F_N \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow G = \mu \cdot F_N \Rightarrow m \cdot g = \mu \cdot m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m \cdot g = \mu \cdot m \cdot \frac{v^2}{r} \quad / \cdot \frac{r}{m \cdot v^2} \Rightarrow \mu = \frac{g \cdot r}{v^2}.$$

#### Vježba 141

Akrobat u automobilu vozi po horizontalnom krugu na unutrašnjoj stijeni plašta uspravnog valjka (zid smrti). Kolika mora biti najmanja brzina  $v$  da automobil ne padne sa stijene? Faktor trenja između kotača i uspravne stijene je  $\mu$ . Polumjer valjka neka je  $r$ . ( $g$  je ubrzanje sile teže)

**Rezultat:**  $v = \sqrt{\frac{g \cdot r}{\mu}}.$

### Zadatak 142 (Mily, gimnazija)

Kamen privezan o nit dugu 80 cm vrtimo u vertikalnoj ravnini tako da učini 3 okreta u sekundi. Na koju će visinu odletjeti kamen ako nit pukne upravo u trenutku kad je brzina kamena usmjerena vertikalno gore? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 142

$$r = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}, \quad v = 3 \text{ Hz}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice,  $\nu$  frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

U trenutku pucanja niti kinetička energija kamena je

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kamen će se popeti na visinu  $h$  gdje ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h.$$

Zbog zakona o održanju energije kinetička energija koju kamen ima pri pucanju niti jednaka je gravitacijskoj potencijalnoj energiji na visini  $h$ :

$$\left. \begin{array}{l} v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \\ E_{gp} = E_k \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \\ m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \\ m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{m \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \\ h = \frac{v^2}{2 \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow h = \frac{(2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{4 \cdot (r \cdot \pi \cdot \nu)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{4 \cdot (r \cdot \pi \cdot \nu)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot (r \cdot \pi \cdot \nu)^2}{g} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(0.8 \text{ m} \cdot \pi \cdot 3 \frac{1}{\text{s}}\right)^2}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 11.59 \text{ m}.$$

### Vježba 142

Kamen privezan o nit dugu 0.8 m vrtimo u vertikalnoj ravnini tako da učini 6 okreta u dvije sekunde. Na koju će visinu odletjeti kamen ako nit pukne upravo u trenutku kad je brzina kamena usmjerena vertikalno gore? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 11.59 m.

### Zadatak 143 (Josip, srednja škola)

Uteg mase 100 g obješen je na niti i njiše se uz najveći otklon  $\alpha = 60^\circ$  na obje strane. Koliko je nategnuta nit pri otklonu  $\beta = 30^\circ$  od vertikale? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 143

$$m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad \beta = 30^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_N = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je  $v$  brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Slobodan pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje za koje vrijedi identičan izraz (samo se umjesto puta  $s$  piše visina  $h$ , umjesto akceleracije  $a$  piše akceleracija slobodnog pada  $g$ ):

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

gdje je  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  akceleracija slobodnog pada.

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

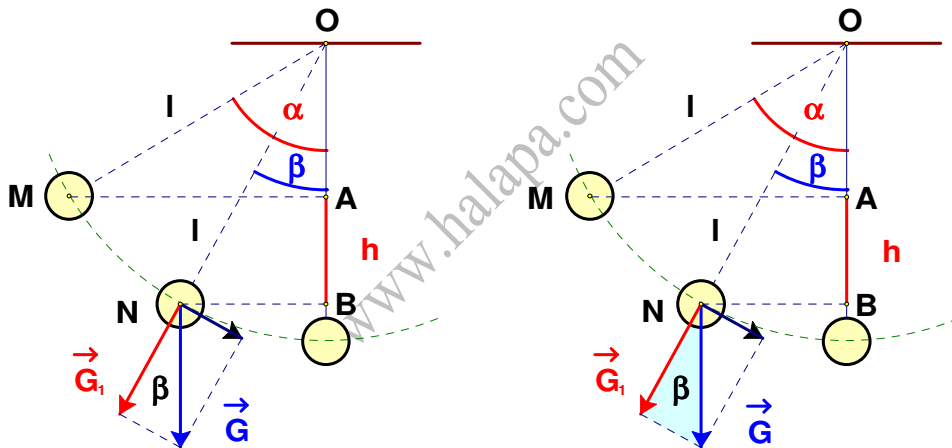
$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.



Uočimo pravokutne trokute  $\Delta MAO$  i  $\Delta NBO$  pa vrijedi:

$$|OM| = |ON| = l, \quad \cos \alpha = \frac{|OA|}{|OM|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|OA|}{l} \Rightarrow |OA| = l \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \beta = \frac{|OB|}{|ON|} \Rightarrow \cos \beta = \frac{|OB|}{l} \Rightarrow |OB| = l \cdot \cos \beta,$$

$$h = |AB| = |OB| - |OA| = l \cdot \cos \beta - l \cdot \cos \alpha = l \cdot (\cos \beta - \cos \alpha).$$

Iz pravokutnog trokuta čija je kateta  $G_1$ , a hipotenuza  $G$  izračuna se radijalna komponenta sile teže  $G_1$ :

$$\cos \beta = \frac{G_1}{G} \Rightarrow \cos \beta = \frac{G_1}{G} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow G_1 = G \cdot \cos \beta \Rightarrow G_1 = m \cdot g \cdot \cos \beta.$$

Brzina utega na niti nakon pada sa visine  $h$  glasi:

$$\left. \begin{aligned} h &= l \cdot (\cos \beta - \cos \alpha) \\ v^2 &= 2 \cdot g \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot (\cos \beta - \cos \alpha).$$

Napetost niti  $F_N$  pri otklonu  $\beta$  od vertikale jednaka je zbroju radijalne komponente sile teže  $G_1$  i

centripetalne sile  $F_{cp}$ .

$$\begin{aligned}F_N &= G_1 + F_{cp} \Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot \cos \beta + m \cdot \frac{v^2}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow F_N &= m \cdot g \cdot \cos \beta + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (\cos \beta - \cos \alpha)}{l} \Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot \cos \beta + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (\cos \beta - \cos \alpha)}{l} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot \cos \beta + m \cdot 2 \cdot g \cdot (\cos \beta - \cos \alpha) \Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot (\cos \beta + 2 \cdot (\cos \beta - \cos \alpha)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot (\cos \beta + 2 \cdot \cos \beta - 2 \cdot \cos \alpha) \Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot (3 \cdot \cos \beta - 2 \cdot \cos \alpha) = \\ &= 0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3 \cdot \cos 30^\circ - 2 \cdot \cos 60^\circ) = 1.57 \text{ N}.\end{aligned}$$

### Vježba 143

Uteg mase 200 g obješen je na niti i njiše se uz najveći otklon  $\alpha = 60^\circ$  na obje strane. Koliko je nategnuta nit pri otklonu  $\beta = 30^\circ$  od vertikale? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 3.14 N.

### Zadatak 144 (Ana, medicinska škola)

Kojom se najmanjom brzinom mora okretati vedro s vodom u vertikalnoj ravnini da se voda ne prolijeva? ( $g$  – ubrzanje sile teže)

### Rješenje 144

$$r, \quad g, \quad v = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Budući da se voda ne smije proliti iz vedra, sila teže  $G$  mora po iznosu biti jednaka centripetalnoj sili  $F_{cp}$ :

$$G = F_{cp} \Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = r \cdot g \Rightarrow v^2 = r \cdot g \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{r \cdot g}.$$

### Vježba 144

Kojom se najmanjom brzinom mora okretati vedro s vodom u vertikalnoj ravnini da se voda ne prolijeva, ako je polumjer rotacije 9.81 m? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 9.81 m/s.

### Zadatak 145 (Ivana, srednja škola)

Uteg privezan na nit duljine 30 cm opisuje u horizontalnoj ravnini kružnicu polumjera 15 cm. Koliko okreta u minuti izvrši uteg pri kruženju? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 145

$$l = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}, \quad r = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

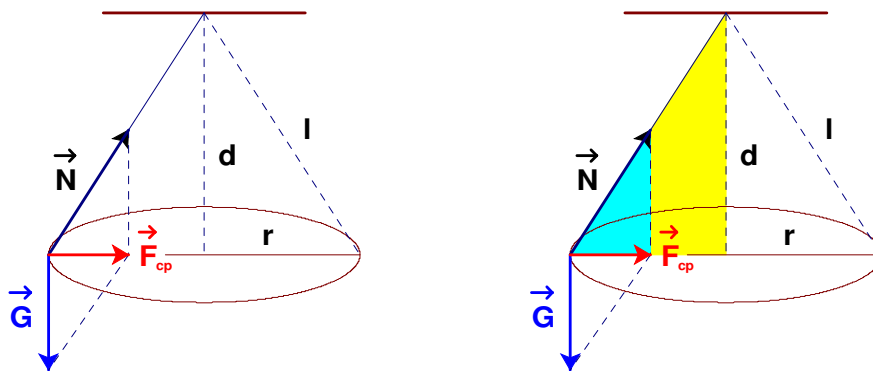
Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici polumjera  $r$  potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

koja ima smjer prema središtu kružnice i gdje je  $v$  frekvencija, broj ophoda u jedinici vremena. Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.



Uočimo pravokutan trokut čije su katete  $d$  i  $r$ , a hipotenuza  $l$ . Pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$d^2 = l^2 - r^2 \Rightarrow d = \sqrt{l^2 - r^2}.$$

Budući da na uteg djeluje sila teža  $G$  i napetost  $N$  niti, rezultanta je centripetalna sila  $F_{cp}$  koja izvodi kružno gibanje. Sa slike vidi se da su osjenčani trokuti slični (imaju jednake kutove) pa su im odgovarajuće stranice razmjerne (proporcionalne):

$$\left. \begin{array}{l} F_{cp} : G = r : d \\ d = \sqrt{l^2 - r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \cdot F_{cp} = r \cdot G \\ d = \sqrt{l^2 - r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{l^2 - r^2} \cdot F_{cp} = r \cdot G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{l^2 - r^2} \cdot m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = r \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{l^2 - r^2} \cdot m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = r \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{l^2 - r^2} \cdot m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{g}{\sqrt{l^2 - r^2} \cdot 4 \cdot \pi^2} \Rightarrow v = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - r^2}}}.$$

Broj okreta utega u minuti ( $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ ) iznosi:

$$n = 60 \cdot v \Rightarrow v = 60 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - r^2}}} \Rightarrow v = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - r^2}}} =$$

$$= \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{m}{s^2}}{\sqrt{(0.3 \text{ m})^2 - (0.15 \text{ m})^2}}} = 58.68 \frac{\text{okr}}{\text{min}}.$$

### Vježba 145

Uteg privezan na nit duljine 3 dm opisuje u horizontalnoj ravnini kružnicu polumjera 1.5 dm. Koliko okreta u dvije minute izvrši uteg pri kruženju? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 117.36 okr/min.

### Zadatak 146 (Ante, tehnička škola)

Za koliki se kut otkloni centrifugalni regulator ako je štap na kojemu je uteg učvršćen dugačak 200 mm, a regulator se okrene 90 puta u minuti? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 146

$$d = 200 \text{ mm} = 0.2 \text{ m}, \quad n = 90 \text{ okr}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici polumjera  $r$  potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice i gdje je  $T$  period, vrijeme jednog ophoda.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

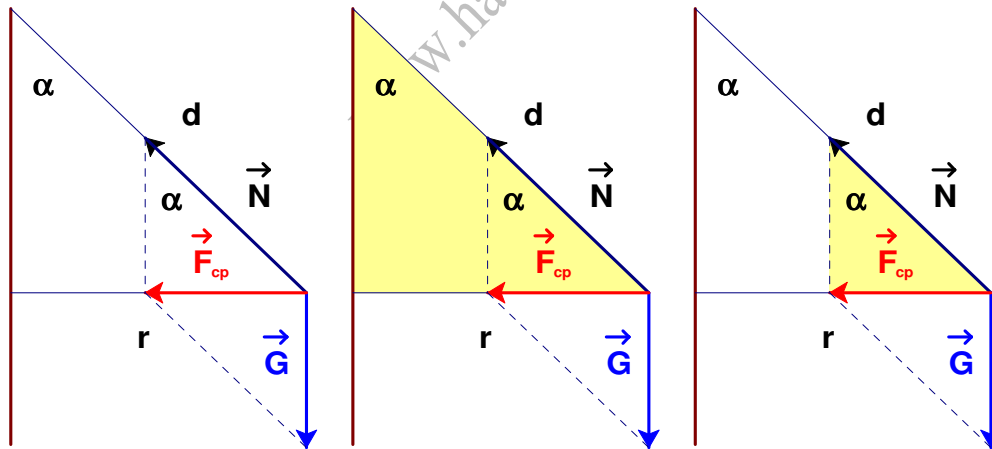
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete nasuprot tom kutu i duljine hipotenuze.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete nasuprot tom kutu i duljine katete uz taj kut.



Perioda  $T$ , vrijeme jednog ophoda, iznosi:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60 \text{ s}}{90} = \frac{2}{3} \text{ s}.$$

Budući da na uteg djeluje sila teža  $G$  i napetost  $N$  niti, rezultanta je centripetalna sila  $F_{cp}$  koja izvodi kružno gibanje. Sa slike vidi se da su osjenčani trokuti slični (imaju jednake kutove) pa vrijedi:

$$\sin \alpha = \frac{r}{d} \Rightarrow r = d \cdot \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha &= \frac{F_{cp}}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{g \cdot T^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot d \cdot \sin \alpha}{g \cdot T^2} \Rightarrow \left[ \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right] \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot d \cdot \sin \alpha}{g \cdot T^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot d \cdot \sin \alpha}{g \cdot T^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot d}{g \cdot T^2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot d} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot d} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left( \frac{2}{3} s \right)^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.2 m} \right) = 56.48^\circ.
\end{aligned}$$

### Vježba 146

Za koliki se kut otkloni centrifugalni regulator ako je štap na kojemu je uteg učvršćen dugačak 2 dm, a regulator se okrene 1.5 puta u sekundi? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $56.48^\circ$ .

### Zadatak 147 (Kruno, gimnazija)

Na rubu kružne ploče koja se jednoliko okreće oko svoje osi visi njihalo koje se namjesti pod kutom  $\alpha = 45^\circ$  prema vertikali. Udaljenost od objesišta njihala do središta ploče je  $d = 10 \text{ cm}$ , a duljina njihala  $l = 6 \text{ cm}$ . Odredi brzinu kojom kuglica kruži. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 147

$$\alpha = 45^\circ, \quad d = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad l = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici polumjera  $r$  potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice i gdje je  $v$  linearna (obodna) brzina.

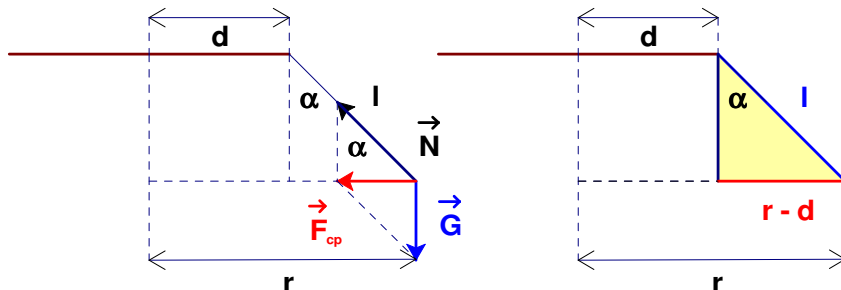
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete nasuprot tom kutu i duljine hipotenuze.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete nasuprot tom kutu i duljine katete uz taj kut.



Budući da na kuglicu djeluje sila teža  $G$  i napetost  $N$  niti, rezultanta je centripetalna sila  $F_{cp}$  koja izvodi kružno gibanje. Sa prve slike vidi se:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{cp}}{G} \Rightarrow F_{cp} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow F_{cp} = m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Sa druge slike vidi se:

$$\sin \alpha = \frac{r-d}{l} \Rightarrow r-d = l \cdot \sin \alpha \Rightarrow r = d + l \cdot \sin \alpha.$$

Brzina  $v$  kojom kuglica kruži iznosi:

$$\begin{aligned} F_{cp} &= m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{r \cdot F_{cp}}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{(d+l \cdot \sin \alpha) \cdot m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{(d+l \cdot \sin \alpha) \cdot m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{m} \Rightarrow v^2 = (d+l \cdot \sin \alpha) \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow v = \sqrt{(d+l \cdot \sin \alpha) \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \sqrt{(0.1 \text{ m} + 0.06 \text{ m} \cdot \sin 45^\circ) \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = 1.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

### Vježba 147

Na rubu kružne ploče koja se jednoliko okreće oko svoje osi visi njihalo koje se namjesti pod kutom  $\alpha = 45^\circ$  prema vertikali. Udaljenost od objesišta njihala do središta ploče je  $d = 10$  cm, a duljina njihala  $l = 6$  cm. Odredi brzinu kojom kuglica kruži. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $56.48^\circ$ .

### Zadatak 148 (Iva, gimnazija)

Kamen privezan o nit duž 80 cm vrtimo u vertikalnoj ravnini tako da učini 3 okreta u sekundi. Na koju će visinu odletjeti kamen ako nit pukne upravo u trenutku kad je brzina kamena usmjerena vertikalno gore. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 148

$$r = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}, \quad v = 3 \text{ Hz}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Obodna (ili ophodna ili tangencijalna ili linearna) brzina pri jednolikom kruženju je

$$v = \text{opseg kružne staze} \cdot \text{broj ophoda u jedinici vremena} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je  $v$  frekvencija ili broj ophoda (titraja, okreta) u jedinici vremena.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow E_{gp} = G \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.

Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Vertikalni hitac u vis sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Najviši domet  $H$  što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je  $v = 0$ . Onda je

$$H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

1. inačica

Budući da je kamen usmjeren vertikalno gore riječ je o vertikalnom hicu u vis pa maksimalna visina iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = v, \quad v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \\ H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow H = \frac{(2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu)^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(2 \cdot 0.8 \text{ m} \cdot \pi \cdot 3 \frac{1}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 11.59 \text{ m}$$

2. inačica

Zbog zakona o očuvanju energije bit će gravitacijska potencijalna energija kamena u najvišoj točki putanje  $h$  jednaka kinetičkoj energiji u trenutku kad je brzina  $v$  kamena usmjerena vertikalno gore.

$$\begin{aligned} E_{gp} &= E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{v^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow h &= \frac{(2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{4 \cdot (r \cdot \pi \cdot \nu)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{4 \cdot (r \cdot \pi \cdot \nu)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot (r \cdot \pi \cdot \nu)^2}{g} = \\ &= \frac{2 \cdot \left(0.8 \text{ m} \cdot \pi \cdot 3 \frac{1}{\text{s}}\right)^2}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 11.59 \text{ m} \end{aligned}$$

### Vježba 148

Kamen privezan o nit dugu 8 dm vrtimo u vertikalnoj ravnini tako da učini 6 okreta u dvije sekunde. Na koju će visinu odletjeti kamen ako nit pukne upravo u trenutku kad je brzina kamena usmjerena vertikalno gore. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 11.59 m.

### Zadatak 149 (Iva, gimnazija)

Elektron se giba po krugu polumjera 2.0 cm zbog djelovanja magnetske sile. Brzina gibanja je  $3.0 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ . Kojom bi se brzinom gibao proton po istom krugu kad bi na njega djelovala ista magnetska sila? (masa elektrona  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , masa protona  $m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ )

### Rješenje 149

$$r = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}, \quad v_e = 3.0 \cdot 10^6 \text{ m/s}, \quad m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg},$$

$$v_p = ?$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Da bi se elektron i proton gibali po kružnici magnetska sila mora imati smjer centripetalne sile. Budući da je sila ista i za elektron i za proton, slijedi:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} F_{cp} &= m_e \cdot \frac{v_e^2}{r} \\ F_{cp} &= m_p \cdot \frac{v_p^2}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow m_p \cdot \frac{v_p^2}{r} = m_e \cdot \frac{v_e^2}{r} \Rightarrow m_p \cdot \frac{v_p^2}{r} = m_e \cdot \frac{v_e^2}{r} \cdot \frac{r}{m_p} \Rightarrow \\
 \Rightarrow v_p^2 = \frac{m_e}{m_p} \cdot v_e^2 \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{m_e}{m_p} \cdot v_e^2} \Rightarrow v_p = v_e \cdot \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} = \\
 = 3.0 \cdot 10^6 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 7.0 \cdot 10^4 \frac{m}{s}.
 \end{aligned}$$

### Vježba 149

Elektron se giba po krugu polumjera 0.2 dm zbog djelovanja magnetske sile. Brzina gibanja je  $3.0 \cdot 10^3$  km/s. Kojom bi se brzinom gibao proton po istom krugu kad bi na njega djelovala ista magnetska sila? (masa elektrona  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg, masa protona  $m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}$  kg)

**Rezultat:**  $7.0 \cdot 10^4$  m/s.

### Zadatak 150 (Iva, gimnazija)

Biciklist vozi brzinom 18 km/h. Koji najmanji polumjer zakrivljenosti može opisati ako se nagne prema horizontalnom podu za kut  $60^\circ$ ? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 150

$$v = 18 \text{ km/h} = [18 : 3.6] = 5 \text{ m/s}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad r = ?$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

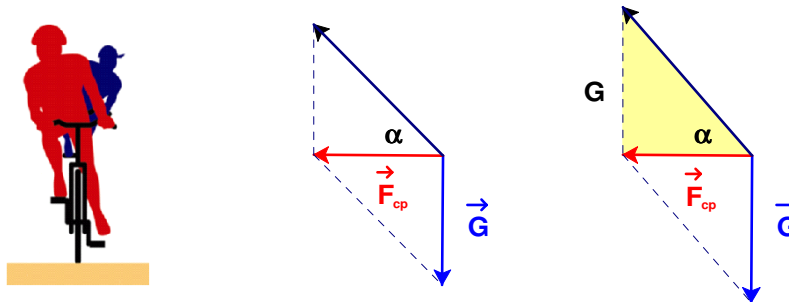
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete nasuprot tom kutu i duljine katete uz taj kut.



Iz slike vidi se da je:

$$\text{tg } \alpha = \frac{G}{F_{cp}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{G}{F_{cp}} \cdot \frac{r}{m \cdot g} \Rightarrow G = F_{cp} \cdot \text{tg } \alpha \Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \text{tg } \alpha \cdot \frac{r}{m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{v^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{\left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4.4 \text{ m.}$$

### Vježba 150

Biciklist vozi brzinom 36 km/h. Koji najmanji polumjer zakrivljenosti može opisati ako se nagne prema horizontalnom podu za kut  $60^\circ$ ? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 17.66 m.

### Zadatak 151 (Valentina, srednja škola)

Na zavoju polumjera 50 m cesta je tako građena da automobil može voziti brzinom 20 m/s neovisno o trenju. Koliki mora biti nagib ceste na tom zavoju? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 151

$$r = 50 \text{ m}, \quad v = 20 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

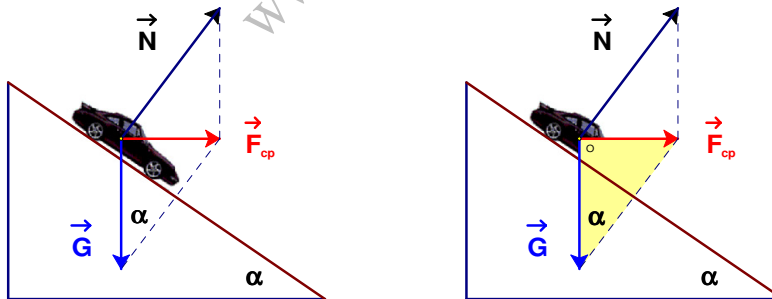
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete nasuprot tom kutu i duljine katete uz taj kut.



Iz slika vidi se da je:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{cp}}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{v^2}{r}}{\frac{g}{1}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{r \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{v^2}{r \cdot g} \right) \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{50 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) \Rightarrow \alpha = 39.197^\circ.$$

### Vježba 151

Na zavoju polumjera 500 dm cesta je tako građena da automobil može voziti brzinom 72 km/h neovisno o trenju. Koliki mora biti nagib ceste na tom zavoju? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 39.197°.

### Zadatak 152 (Valentina, srednja škola)

Na kružnom zavoju polumjera 100 m cesta je nagnuta prema unutrašnjoj strani zavoja  $10^\circ$ . Na koju je brzinu proračunan zavoj? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 152

$$r = 100 \text{ m}, \quad \alpha = 10^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici polumjera  $r$ , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

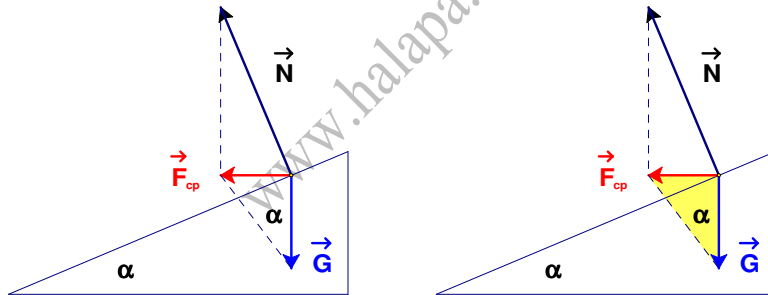
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete nasuprot tom kutu i duljine katete uz taj kut.



Iz slika vidi se da je:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{F_{cp}}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{cp}}{G} \cdot \frac{1}{G} \Rightarrow F_{cp} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = r \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow v = \sqrt{r \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{100 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = \\ &= 13.15 \frac{\text{m}}{\text{s}} = [13.15 \cdot 3.6] = 47.35 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \end{aligned}$$

### Vježba 152

Na kružnom zavoju polumjera 0.1 km cesta je nagnuta prema unutrašnjoj strani zavoja  $10^\circ$ . Na koju je brzinu proračunan zavoj? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 47.35 km/h.

### Zadatak 153 (Ivica, gimnazija)

Oko nepomične koloture polumjera 20 cm namotana je nit na kojoj visi uteg. Utteg najprije miruje, a onda počinje padati akceleracijom  $2 \text{ cm/s}^2$  pri čemu se nit odmotava. Nađi kutnu brzinu koloture u času kad je uteg prešao put 100 cm.

### Rješenje 153

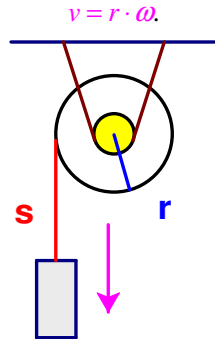
$$r = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad a = 2 \text{ cm/s}^2 = 0.02 \text{ m/s}^2, \quad s = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}, \quad \omega = ?$$

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v = a \cdot t,$$

gdje su  $s$  i  $v$  put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Između obodne (linearne) brzine  $v$  i kutne brzine  $\omega$  neke čestice pri rotaciji po kružnici polumjera  $r$  vrijedi odnos



Kutna brzina  $\omega$  koloture u času kad je uteg prešao put  $s$  iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = a \cdot t \\ v = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad / \cdot 2 \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot s = a \cdot t^2 \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t^2 = \frac{2 \cdot s}{a} \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t^2 = \frac{2 \cdot s}{a} \quad / \sqrt{\quad} \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} \\ \omega = \frac{a \cdot t}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}}{r} \Rightarrow \omega = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \frac{0.02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0.2 \text{ m}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{0.02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

### Vježba 153

Oko nepomične koloture polumjera 2 dm namotana je nit na kojoj visi uteg. Utog najprije miruje, a onda počinje padati akceleracijom  $20 \text{ mm/s}^2$  pri čemu se nit odmotava. Nađi kutnu brzinu koloture u času kad je uteg prešao put 10 dm.

**Rezultat:** 1 rad/s.

### Zadatak 154 (Ivica, gimnazija)

Koliki je moment tromosti Zemljine kugle ako uzmemo da su srednji polumjer Zemlje 6400 km i srednja gustoća  $5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ?

### Rješenje 154

$$r = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \rho = 5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad I = ?$$

Moment tromosti kugle polumjera  $r$  s obzirom na os koja prolazi središtem je:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Moment tromosti I Zemljine kugle je:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\ \rho = \frac{m}{V} \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow m = \rho \cdot V \left. \begin{array}{l} I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{2}{5} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi = \frac{8}{15} \cdot 5.5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(6.4 \cdot 10^6 \text{ m}\right)^5 \cdot \pi = 9.895 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

### Vježba 154

Koliki je moment tromosti Zemljine kugle ako uzmemo da su srednji polumjer Zemlje 6400 km i srednja gustoća  $5.5 \text{ t/m}^3$ ?

**Rezultat:**  $9.895 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$

### Zadatak 155 (Ivica, gimnazija)

Na učvršćenu koluturu polumjera 0.5 m omotana je nit na kraju koje je učvršćen uteg mase 10 kg. Nađi moment tromosti koluture ako uteg pada akceleracijom  $2.04 \text{ m/s}^2$ . ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 155

$$r = 0.5 \text{ m}, \quad m = 10 \text{ kg}, \quad a = 2.04 \text{ m/s}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad I = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M, koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Moment sile M koji okreće kotač jednak je umnošku momenta tromosti I kotača i kutne akceleracije  $\alpha$ . Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Sila koja djeluje na uteg je sila teža:

$$\left. \begin{array}{l} F = G \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot g.$$

Moment tromosti I koluture, ako uteg pada akceleracijom a, iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ a = \alpha \cdot r \\ M = r \cdot F \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ \alpha = \frac{a}{r} \\ M = r \cdot m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = \frac{a}{r} \cdot I \\ M = r \cdot m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{r} \cdot I = r \cdot m \cdot g \quad | \cdot \frac{r}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{r^2 \cdot m \cdot g}{a} = \frac{(0.5 \text{ m})^2 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2.04 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 12.022 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

### Vježba 155

Na učvršćenu koloturu polumjera 50 cm omotana je nit na kraju koje je učvršćen uteg mase 0.01 t. Nađi moment tromosti koloture ako uteg pada akceleracijom 204 cm/s<sup>2</sup>.

**Rezultat:** 12.022 kg · m<sup>2</sup>.

### Zadatak 156 (Mira, gimnazija)

Na zamašnjak polumjera 1 m djeluje zakretni moment 392 N · m. Koliku masu mora imati zamašnjak da bi uz zadani moment dobio kutnu akceleraciju 0.4 rad/s<sup>2</sup>? Masa zamašnjaka raspoređena je po njegovu obodu.

### Rješenje 156

$$r = 1 \text{ m}, \quad M = 392 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad \alpha = 0.4 \text{ rad/s}^2, \quad m = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M, koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Moment sile M koji okreće tijelo jednak je umnošku momenta tromosti I tijela i kutne akceleracije  $\alpha$ . Moment tromosti (ustrajnosti) I zamašnjaka kojemu je masa m raspoređena po njegovu obodu na udaljenosti r od osi vrtnje iznosi:

$$I = m \cdot r^2$$

Masa m zamašnjaka na koji djeluje zakretni moment M iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ I = m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow M = \alpha \cdot m \cdot r^2 \Rightarrow m = \frac{392 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (1 \text{ m})^2} = 980 \text{ kg}.$$

### Vježba 156

Na zamašnjak polumjera 1 m djeluje zakretni moment 196 N · m. Koliku masu mora imati zamašnjak da bi uz zadani moment dobio kutnu akceleraciju 0.2 rad/s<sup>2</sup>? Masa zamašnjaka raspoređena je po njegovu obodu.

**Rezultat:** 980 kg.

### Zadatak 157 (Mira, gimnazija)

Izračunaj kinetičku energiju valjka promjera 0.3 m, koji se vrti oko svoje osi, ako mu je masa 2 · 10<sup>3</sup> kg i učini 200 ophoda u minuti.

### Rješenje 157

$$d = 2 \cdot r = 0.3 \text{ m} \Rightarrow r = 0.15 \text{ m}, \quad m = 2 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad n = 200 \text{ okr}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s},$$

$$E_k = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna brzina  $\omega$  iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je  $\nu$  frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena)

$$\nu = \frac{n}{t} \Rightarrow \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t}.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti). Moment ustrajnosti (tromosti) za puni valjak mase m i polumjera baze r, s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase okomito na bazu valjka je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Kinetička energija valjka koji se vrti oko svoje osi iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \Rightarrow E_k = m \cdot r^2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 = 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot (0.15 \text{ m})^2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{200 \text{ okr}}{60 \text{ s}} \right)^2 = 4934.8 \text{ J}.$$

### Vježba 157

Izračunaj kinetičku energiju valjka promjera 0.3 m, koji se vrti oko svoje osi, ako mu je masa 2 t i učini 100 ophoda u pola minute.

**Rezultat:** 4934.8 J.

### Zadatak 158 (Ana, gimnazija)

Kako se mijenja kutna akceleracija kružne ploče na koju djeluje stalni zakretni moment ako pri istoj masi povećamo njezin polumjer dva puta?

#### Rješenje 158

$$M = \text{konst.}, \quad m = \text{konst.}, \quad r_2 = 2 \cdot r_1, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M, koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I}.$$

Moment sile M koji okreće tijelo jednak je umnošku momenta tromosti I tijela i kutne akceleracije  $\alpha$ . Moment tromosti (ustrajnosti) kružne ploče mase m i polumjera r, s obzirom na os koja prolazi okomito njezinim središtem iznosi:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Neka je  $\alpha_1$  kutna akceleracija kružne ploče prije povećanja njezinog polumjera, a  $\alpha_2$  kutna akceleracija kružne ploče poslije povećanja njezinog polumjera dva puta.

Računamo omjer kutnih akceleracija:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\frac{M}{I_2}}{\frac{M}{I_1}} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{I_1}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r_2^2} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r_1^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r_2^2} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \left(\frac{r_1}{2 \cdot r_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \left(\frac{r_1}{2 \cdot r_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{4} \cdot \alpha_1.$$

Kutna akceleracija postaje četiri puta manja.

### Vježba 158

Kako se mijenja kutna akceleracija kružne ploče na koju djeluje stalni zakretni moment ako pri istoj masi povećamo njezin polumjer tri puta?

**Rezultat:** Kutna akceleracija postaje devet puta manja.

### Zadatak 159 (Ana, gimnazija)

Niz kosinu kotrljaju se kugla, valjak i obruč.

a) Nađi linijsko ubrzanje središta tih tijela.

b) Kolika je akceleracija ako se tijela skližu niz kosinu bez trenja?

Kut nagiba kosine je  $30^\circ$ , a početna brzina tijela 0. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 159

$$\alpha = 30^\circ, \quad v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je  $v$  brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne (linearne) brzine  $v$  i kutne brzine  $\omega$  neke čestice pri rotaciji po kružnici polumjera  $r$  vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je  $I$  moment ustrajnosti (tromosti),  $\omega$  kutna brzina.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Moment ustrajnosti (tromosti) kugle mase  $m$  i polumjera  $r$ , s obzirom na os koja prolazi njezinim središtem, iznosi:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Moment ustrajnosti (tromosti) za puni valjak mase  $m$  i polumjera baze  $r$ , s obzirom na os koja prolazi kroz središte mase okomito na bazu valjka je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Moment ustrajnosti (tromosti) za obruč mase  $m$  i polumjera  $r$ , s obzirom na os koja prolazi okomito središtem je:

$$I = m \cdot r^2.$$

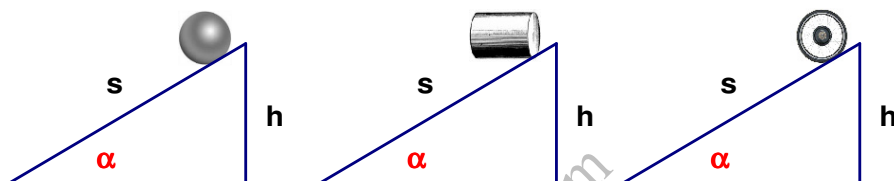
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.



Sa slika vidi se:

$$\sin \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s \cdot \sin \alpha.$$

Iz zakona o očuvanju energije dobije se linijsko ubrzanje središta zadanih tijela. Gravitacijska potencijalna energija tijela na vrhu kosine jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i rotacije tijela na dnu kosine pa slijedi:

$$\begin{aligned} E_{gp} &= E_k + E_{kr} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot a \cdot s + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot a \cdot s + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{2 \cdot a \cdot s}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{2 \cdot a \cdot s}{r^2} \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + I \cdot \frac{a \cdot s}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + I \cdot \frac{a \cdot s}{r^2} / \frac{1}{s} \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot a + I \cdot \frac{a}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha = a \cdot \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}}. \end{aligned}$$

Za zadana tijela proizlazi redom.

Kugla

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\ a &= \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2}{r^2}} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{2}{5} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{2}{5} \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\frac{7}{5} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\frac{7}{5} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{5 \cdot g \cdot \sin \alpha}{7} = \frac{5 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 30^\circ}{7} = 3.57 \frac{m}{s^2}.$$

Valjak

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ a &= \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2}{r^2}} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\frac{3}{2} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\frac{3}{2} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot g \cdot \sin \alpha}{3} = \frac{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 30^\circ}{3} = 3.33 \frac{m}{s^2}.$$

Obruč

$$\left. \begin{aligned} I &= m \cdot r^2 \\ a &= \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{m \cdot r^2}{r^2}} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot m} \Rightarrow a = \frac{g \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{10 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 30^\circ}{2} = 2.5 \frac{m}{s^2}.$$

Ako se tijela skližu niz kosinu bez trenja, gravitacijska potencijalna energija na vrhu kosine bit će jednaka kinetičkoj energiji koju tijela imaju pri dnu kosine (zakon o očuvanju energije) pa vrijedi:

$$E_{gp} = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s \cdot / \cdot \frac{1}{m \cdot s} \Rightarrow a = g \cdot \sin \alpha.$$

Za sva tri tijela vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Kugla} \\ &\text{Valjak} \\ &\text{Obruč} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = g \cdot \sin \alpha = 10 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 30^\circ = 5 \frac{m}{s^2}.$$

### Vježba 159

Niz kosinu kotrljaju se kugla, valjak i obruč. Kolika je akceleracija ako se tijela skližu niz kosinu bez trenja? Kut nagiba kosine je  $60^\circ$ , a početna brzina tijela 0. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $8.66 \text{ m/s}^2$ .

**Zadatak 160 (Marko, srednja škola)**

Željezna valjkasta osovina polumjera 0.15 m, duljine 2 m, vrti se 300 okr/min. Nadi moment tromosti i kinetičku energiju osovine. (gustoća željeza  $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$ )

**Rješenje 160**

$r = 0.15 \text{ m}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $n = 300 \text{ okr}$ ,  $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ ,  $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$ ,  $I = ?$ ,  
 $E_k = ?$

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna brzina  $\omega$  iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je  $\nu$  frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena)

$$\nu = \frac{n}{t} \Rightarrow \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t}.$$

Moment ustrajnosti (tromosti) za puni valjak mase  $m$  i polumjera baze  $r$ , s obzirom na os koja prolazi kroz središte mase okomito na bazu valjka je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2.$$

gdje je  $I$  moment ustrajnosti (tromosti),  $\omega$  kutna brzina.

Željezna osovina ima oblik valjka pa je njezin obujam (volumen)

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot l.$$

Moment tromosti  $I$  željeznog valjka iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V} \\ V = r^2 \cdot \pi \cdot l \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ V = r^2 \cdot \pi \cdot l \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot l \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot l \cdot r^4 =$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot 2 \text{ m} \cdot (0.15 \text{ m})^4 = 12.56 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Računamo kinetičku energiju osovine.

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V, V = r^2 \cdot \pi \cdot l, I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\nu}{t}, E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot l, I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\nu}{t}, E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot l \cdot r^2 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\nu}{t}, E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot l \cdot r^4 \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{\nu}{t} \right)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot l \cdot r^4 \cdot \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{v}{t} \right)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \pi \cdot l \cdot r^4 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \left( \frac{v}{t} \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow E_k &= \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \pi \cdot l \cdot r^4 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \left( \frac{v}{t} \right)^2 \Rightarrow E_k = \rho \cdot l \cdot r^4 \cdot \pi^3 \cdot \left( \frac{v}{t} \right)^2 = \\ &= 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2 \text{ m} \cdot (0.15 \text{ m})^4 \cdot \pi^3 \cdot \left( \frac{300}{60 \text{ s}} \right)^2 = 6200.29 \text{ J}. \end{aligned}$$

### Vježba 160

Željezna valjkasta osovina polumjera 15 cm, duljine 20 dm, vrti se 600 okreta u dvije minute. Nađi moment tromosti. (gustoća željeza  $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$ )

**Rezultat:** 12.56  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .