

Zadatak 121 (Ljiljana, srednja škola)

Uteg mase 1 kg visi na niti koju smo iz vertikalnog položaja otklonili za kut $\alpha = 30^\circ$. Nađi napetost niti kad smo uteg ispustili te on prolazi položajem ravnoteže. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 121

$$m = 1 \text{ kg}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad N = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

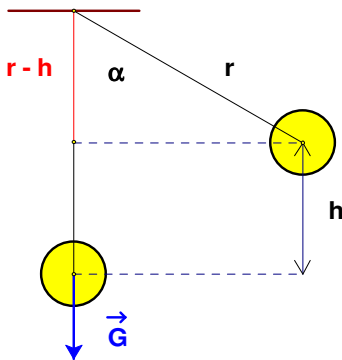
Slobodni pad je jednoliko ubrzano gibanje koje izvodi tijelo kada pada u blizini površine Zemlje stalnim ubrzanjem sile teže, g . Brzina tijela pri slobodnom padu na visini h dana je izrazom

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži.



$$G = m \cdot g$$

Sa slike vidi se:

$$\cos \alpha = \frac{r-h}{r} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{r-h}{r} \cdot \frac{r}{r} \Rightarrow r \cdot \cos \alpha = r-h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = r - r \cdot \cos \alpha \Rightarrow h = r \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Brzina tijela kada prolazi položajem ravnoteže dobije se iz formule za slobodan pad s visine h :

$$\left. \begin{array}{l} v^2 = 2 \cdot g \cdot h \\ h = r \cdot (1 - \cos \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Nit napinje težina utega G i centrifugalna sila F_{cf} koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže. Ukupna sila jest

$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha)}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha)}{r} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot 2 \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g \cdot (1 + 2 - 2 \cdot \cos \alpha) \Rightarrow F = m \cdot g \cdot (3 - 2 \cdot \cos \alpha) = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3 - 2 \cdot \cos 30^\circ) = 12.44 \text{ N}$$

Vježba 121

Uteg mase 2 kg visi na niti koju smo iz vertikalnog položaja otklonili za kut $\alpha = 30^\circ$. Nađi napetost niti kad smo uteg ispustili te on prolazi položajem ravnoteže. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 24.88 N.

Zadatak 122 (Mirna, srednja škola)

Uteg mase 30 kg privezan na niti vrtimo po krugu u vertikalnoj ravnini. Za koliko će napetost niti biti veća pri prolazu najnižom točkom kruga od napetosti u najvišoj točki kruga? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 122

$$m = 30 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta N = ?$$

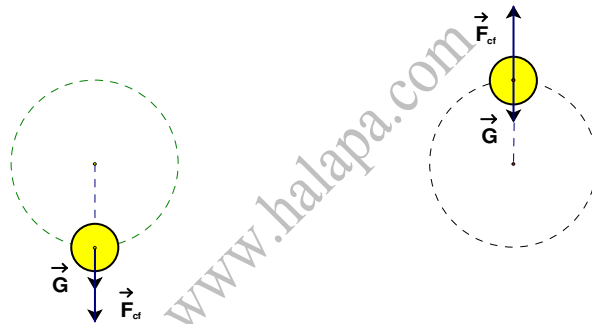
Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Nit napinje težina utega G i centrifugalna sila F_{cf} koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže.



U najnižoj točki kruga vrtnje težina utega i centrifugalna sila imaju iste smjerove pa je ukupna sila jednaka zbroju centrifugalne sile i težine utega:

$$F_1 = F_{cf} + G.$$

U najvišoj točki kruga vrtnje težina utega i centrifugalna sila imaju suprotne smjerove pa je ukupna sila jednaka razlici centrifugalne sile i težine utega:

$$F_2 = F_{cf} - G.$$

Računamo razliku napetosti u najnižoj i najvišoj točki:

$$\left. \begin{array}{l} \text{najniža točka } F_1 = F_{cf} + G \\ \text{najviša točka } F_2 = F_{cf} - G \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta F = (F_{cf} + G) - (F_{cf} - G) \Rightarrow \Delta F = F_{cf} + G - F_{cf} + G \Rightarrow \Delta F = F_1 - F_2$$

$$\Rightarrow \Delta N = F_{cf} + G - F_{cf} + G \Rightarrow \Delta N = 2 \cdot G \Rightarrow \Delta N = 2 \cdot m \cdot g = 2 \cdot 30 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 588.6 \text{ N}.$$

Vježba 122

Uteg mase 60 kg privezan na niti vrtimo po krugu u vertikalnoj ravnini. Za koliko će napetost niti biti veća pri prolazu najnižom točkom kruga od napetosti u najvišoj točki kruga? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1177.2 N.

Zadatak 123 (Mirna, srednja škola)

Tenk mase $5.0 \cdot 10^4$ kg prelazi preko mosta brzinom 45 km/h. Most se uganuo te mu je polumjer zakrivljenosti 0.60 km. Kolikom silom pritišće tenk na most kad se nalazi na njegovoj sredini? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 123

$$m = 5.0 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad v = 45 \text{ km/h} = [45 : 3.6] = 12.5 \text{ m/s}, \quad r = 0.6 \text{ km} = 600 \text{ m}, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g$$

Kada se tenk nalazi na sredini mosta centrifugalna sila F_{cf} i težina tenka G imaju isti smjer pa je sila kojom tenk pritišće na most jednaka zbroju centrifugalne sile i težine tenka:



$$F = F_{cf} + G \Rightarrow F = m \cdot \frac{v^2}{r} + m \cdot g \Rightarrow F = m \cdot \left(\frac{v^2}{r} + g \right) = \\ = 5.0 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \left(\frac{\left(12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{600} + 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 5.035 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Vježba 123

Tenk mase $1 \cdot 10^5$ kg prelazi preko mosta brzinom 45 km/h. Most se uganuo te mu je polumjer zakrivljenosti 0.60 km. Kolikom silom pritišće tenk na most kad se nalazi na njegovoj sredini? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $1.01 \cdot 10^6 \text{ N}$.

Zadatak 124 (Mirna, srednja škola)

Kolikom bi brzinom morao motorist voziti preko izbočenog dijela ceste ako je polumjer zakrivljenosti izbočine 40 m, a želio bi da na vrhu izbočine sila na cestu bude jednaka nuli? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 124

$$r = 40 \text{ m}, \quad F = 0 \text{ N}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

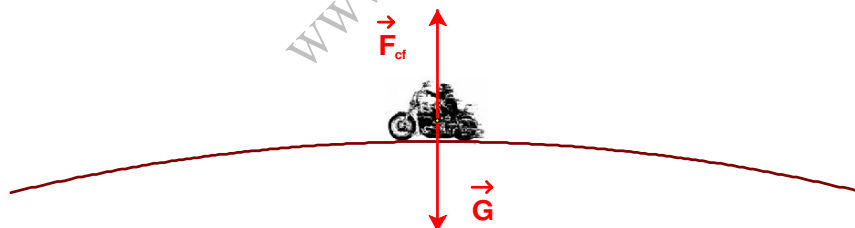
Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g$$

Kada se motorist nalazi na sredini mosta centrifugalna sila F_{cf} i težina motorista G imaju suprotne smjerove pa je sila kojom motorist pritišće na most jednaka razlici centrifugalne sile i težine motorista. Budući da na vrhu izbočenog dijela ceste sila na cestu mora biti jednaka nuli, slijedi:



$$\left. \begin{array}{l} F = 0 \\ F = G - F_{cf} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = G - F_{cf} \Rightarrow F_{cf} = G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \quad | \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = g \cdot r \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 40 \text{ m}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vježba 124

Kolikom bi brzinom morao motorist voziti preko izbočenog dijela ceste ako je polumjer zakrivljenosti izbočine 90 m, a želio bi da na vrhu izbočine sila na cestu bude jednaka nuli? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 30 m/s.

Zadatak 125 (Silvija, gimnazija)

Motor trkačkog automobila razvija pri 260 kW moment sile od 650 Nm. Kolika je odgovarajuća kutna brzina?

Rješenje 125

$$P = 260 \text{ kW} = 2.6 \cdot 10^5 \text{ W}, \quad M = 650 \text{ Nm}, \quad \omega = ?$$

Snaga P pri rotaciji krutog tijela jednaka je

$$P = M \cdot \omega,$$

gdje je M moment sile, a ω trenutna kutna brzina tijela.

Kutna brzina ω iznosi:

$$P = M \cdot \omega \Rightarrow P = M \cdot \omega \cdot \frac{1}{M} \Rightarrow \omega = \frac{P}{M} = \frac{2.6 \cdot 10^5 \text{ W}}{650 \text{ Nm}} = 400 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \left[400 \cdot \frac{60}{2 \cdot \pi} \right] = 3819.72 \frac{\text{okr}}{\text{min}}.$$

Vježba 125

Motor trkaćeg automobila razvija pri 520 kW moment sile od 1300 Nm. Kolika je odgovarajuća kutna brzina?

Rezultat: 3819.72 okr/min.

Zadatak 126 (Matija, gimnazija)

Predmet mase 250 g privezan je na kraj lagane opruge konstante elastičnosti 100 N/m. Predmet se zadržava jednolikom brzinom oko drugog kraja opruge koji služi kao središte kružnice. Ako je duljina nerastegnute opruge 25 cm, kolika će joj biti duljina kad se predmet vrti brzinom 2.5 m/s?

Rješenje 126

$$m = 250 \text{ g} = 0.25 \text{ kg}, \quad k = 100 \text{ N/m}, \quad r = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}, \quad v = 2.5 \text{ m/s}, \quad \Delta x = ?,$$
$$r + \Delta x = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a, neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Harmoničko titranje nastaje kada na tijelo mase m djeluje harmonička sila kakva je npr. sila opruge (elastična sila)

$$F_{el} = -k \cdot \Delta x,$$

gdje je Δx pomak iz položaja ravnoteže, a k konstanta opruge.

Oprugu rasteže centrifugalna sila F_{cf} koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što opruga i uteg zajedno kruže (neinercijski sustav). Budući da predmet rotira oko jednog kraja opruge koji služi kao središte kružnice, mora biti:

$$F_{el} = F_{cf}.$$

Duljina opruge iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F_{el} = -k \cdot \Delta x, \quad F_{cf} = m \cdot \frac{v^2}{r} \\ F_{el} = F_{cf} \end{array} \right\} \Rightarrow -k \cdot \Delta x = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{računamo} \\ \text{samo iznos} \end{array} \right] \Rightarrow k \cdot \Delta x = m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x = m \cdot \frac{v^2}{r \cdot k} = 0.25 \text{ kg} \cdot \frac{\left(2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0.25 \text{ m} \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0.0625 \text{ m} = 6.25 \text{ cm}.$$

Opruga se produlji za 6.25 cm pa ukupna duljina iznosi:

$$r + \Delta x = 25 \text{ cm} + 6.25 \text{ cm} = 31.25 \text{ cm}.$$



Vježba 126

Predmet mase 500 g privezan je na kraj lagane opruge konstante elastičnosti 100 N/m. Predmet se zarotira jednolikom brzinom oko drugog kraja opruge koji služi kao središte kružnice. Ako je duljina nerastegnute opruge 50 cm, kolika će joj biti duljina kad se predmet vrti brzinom 2.5 m/s?

Rezultat: 56.25 cm.

Zadatak 127 (Ivan, obrtnička škola)

Komad tkanine mase 100 g okreće su u stroju za sušenje rublja i učini 20 okretaja u sekundi. Polumjer bubnja je 40 cm. Kolikom silom stijenke bubnja djeluju na tkaninu?

Rješenje 127

$$m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}, \quad v = 20 \text{ Hz}, \quad r = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}, \quad F_{cp} = ?$$

Centripetalna sila F_{cp} uzrokuje jednoliko kružno gibanje tijela, a djeluje okomito na smjer brzine gibanja prema središtu kružne putanje. Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

gdje je m masa tijela, r polumjer kružnice po kojoj tijelo rotira, v frekvencija (broj okretaja u jedinici vremena).



Sila kojom stijenke bubnja djeluju na tkaninu iznosi:

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = 0.1 \text{ kg} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 0.4 \text{ m} \cdot \left(20 \frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 631.65 \text{ N}.$$

Vježba 127

Komad tkanine mase 200 g okreće su u stroju za sušenje rublja i učini 20 okretaja u sekundi. Polumjer bubnja je 20 cm. Kolikom silom stijenke bubnja djeluju na tkaninu?

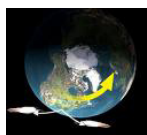
Rezultat: 631.65 N.

Zadatak 128 (Ivan, obrtnička škola)

Kolika je kutna brzina rotacije Zemlje, a kolika linearna za točke na ekvatoru? (dnevna rotacija Zemlje oko njezine osi $T = 24 \text{ h}$, polumjer Zemlje $r = 6370 \text{ km}$)

Rješenje 128

$$T = 24 \text{ h} = [24 \cdot 3600] = 86400 \text{ s}, \quad r = 6370 \text{ km} = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \omega = ?, \quad v = ?$$



Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna brzina ω omjer je promjene kuta i intervala vremena:

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

Pri jednolikoj je rotaciji:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Obodna (linearna) brzina v na udaljenosti r od središta vrtnje brzina je u smjeru staze:

$$v = r \cdot \omega$$

Za vrijeme jednog perioda $t = T$, tijelo se okrene za puni kut $2 \cdot \pi$ pa je kutna brzina

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Njegove čestice pri tome imaju linearne brzine v ovisno o udaljenosti r od osi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}$$

Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{86400 \text{ s}} = 7.27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Linearna brzina točaka na ekvatoru Zemlje je:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \pi}{86400 \text{ s}} = 463.24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vježba 128

Kolika je kutna brzina rotacije planeta, ako je njegova dnevna rotacija $T = 48$ h, a polumjer $r = 12740$ km?

Rezultat: $7.27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Zadatak 129 (Jelena, srednja škola)

Kugla mase 40 kg i polumjera 12 cm giba se kotrljanjem po ravnoj podlozi brzinom 0.4 m/s. Ako se kugla zaustavi na putu od 10 m, koliko je trenje koje djeluje na kuglu tijekom zaustavljanja?

Rješenje 129

$$m = 40 \text{ kg}, \quad r = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}, \quad v = 0.4 \text{ m/s}, \quad s = 10 \text{ m}, \quad F_{\text{tr}} = ?$$

Ako se kruto tijelo kotrlja bez klizanja, kinetička energija je:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je m masa tijela, v brzina translacije središta mase tijela, I moment ustrajnosti (tromosti) s obzirom na os koja prolazi kroz središte mase, a ω kutna brzina vrtnje tijela oko te osi.

Kutna brzina ω pri rotaciji tijela jednaka je

$$\omega = \frac{v}{r},$$

gdje je v obodna (linearna) brzina, a r polumjer kružnice.

Moment ustrajnosti (tromosti) kugle mase m i polumjera r , s obzirom na os koja prolazi njezinim središtem, iznosi:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi:

$$W = F \cdot s.$$

Kinetička energija kugle koja se kotrlja jednaka je zbroju kinetičke energije translatornog gibanja njezinog središta mase brzinom v i kinetičke energije rotacije oko trenutne osi rotacije koja prolazi kroz središte mase:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2.$$

Budući da se kugla zaustavila na putu s , rad sile trenja W_{tr} na ovom putu jednak je kinetičkoj energiji E_k koju kugla ima na početku puta s .

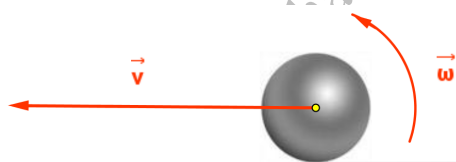
Trenje F_{tr} iznosi:

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \\ \omega &= \frac{v}{r}, \quad I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\ W_{tr} &= E_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 \\ F_{tr} \cdot s &= E_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} \\ F_{tr} \cdot s &= E_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{5} \cdot m \cdot v^2 \\ F_{tr} \cdot s &= E_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} E_k &= \frac{5+2}{10} \cdot m \cdot v^2 \\ F_{tr} \cdot s &= E_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_k &= \frac{7}{10} \cdot m \cdot v^2 \\ F_{tr} \cdot s &= E_k \quad /: s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_k &= \frac{7}{10} \cdot m \cdot v^2 \\ F_{tr} &= \frac{E_k}{s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_{tr} = \frac{7}{10} \cdot \frac{m \cdot v^2}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{tr} = \frac{7 \cdot m \cdot v^2}{10 \cdot s} = \frac{7 \cdot 40 \text{ kg} \cdot \left(0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{10 \cdot 10 \text{ m}} = 0,448 \text{ N.}$$



s

Vježba 129

Kugla mase 80 kg i polumjera 12 cm giba se kotrljanjem po ravnoj podlozi brzinom 0.4 m/s. Ako se kugla zaustavi na putu od 20 m, koliko je trenje koje djeluje na kuglu tijekom zaustavljanja?

Rezultat: 0.448 N.

Zadatak 130 (Tanja, srednja škola)

Čovjek stoji na rubu ploče koja se jednoliko okreće oko svoje osi. Masa ploče je 200 kg, a masa čovjeka 120 kg. Ploča se okrene 10 puta u jednoj minuti. Kolikom se kutnom brzinom okreće ploča ako čovjek prijeđe u njezino središte?

Rješenje 130

$$m_1 = 200 \text{ kg}, \quad m_2 = 120 \text{ kg}, \quad \omega_1 = 10 \text{ okr./min}, \quad \omega_2 = ?$$

Tijelo se opire svakoj promjeni stanja zbog svoje tromosti. Pri rotaciji, osim mase tijela, važan utjecaj na tromost ima i raspored mase oko osi vrtnje. Moment tromosti I je fizikalna veličina koja opisuje kako raspored mase oko osi vrtnje utječe na tromost tijela. Moment tromosti I jednak je zbroju umnožaka masa pojedinih čestica tijela i kvadrata njihovih udaljenosti od osi vrtnje.

$$I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \dots = \sum_i m_i \cdot r_i^2.$$

Moment tromosti (ustrajnosti) materijalne točke mase m na udaljenosti r od osi vrtnje iznosi:

$$I = m \cdot r^2$$

Moment tromosti (ustrajnosti) kružne ploče mase m i polumjera r , s obzirom na os koja prolazi okomito njezinim središtem iznosi:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

Kutna količina gibanja je vektor čiji se iznos definira umnoškom momenta tromosti tijela I i trenutačne kutne brzine ω .

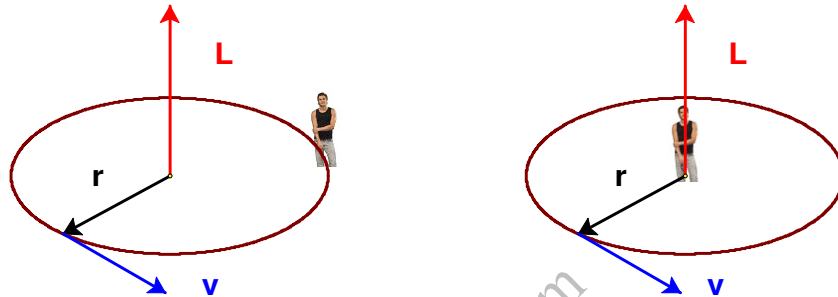
Kutna količina gibanja ili zamah:

$$L = I \cdot \omega$$

Zakon očuvanja kutne količine gibanja

Kutna količina gibanja u zatvorenom sustavu je sačuvana, što znači da vrijedi:

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$



Kada čovjek stoji na rubu ploče koja se jednoliko okreće kutnom brzinom ω_1 :

- moment tromosti ploče iznosi

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r^2$$

- moment tromosti čovjeka (kao materijalne točke) iznosi

$$I_2 = m_2 \cdot r^2$$

Kada čovjek prijeđe u središte ploče koja se sada jednoliko okreće kutnom brzinom ω_2 :

- moment tromosti ploče iznosi

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r^2$$

- moment tromosti čovjeka (kao materijalne točke) iznosi

$$I_2' = m_2 \cdot 0^2 \Rightarrow I_2' = 0$$

Prema zakonu očuvanja kutne količine gibanja vrijedi:

$$\begin{aligned} \underbrace{I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_1}_{\text{čovjek stoji na rubu ploče}} &= \underbrace{I_1 \cdot \omega_2 + I_2' \cdot \omega_2}_{\text{čovjek stoji u središtu ploče}} \Rightarrow \\ \Rightarrow I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_1 &= I_1 \cdot \omega_2 + I_2' \cdot \omega_2 \Rightarrow (I_1 + I_2) \cdot \omega_1 = I_1 \cdot \omega_2 + 0 \cdot \omega_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (I_1 + I_2) \cdot \omega_1 &= I_1 \cdot \omega_2 \Rightarrow (I_1 + I_2) \cdot \omega_1 = I_1 \cdot \omega_2 \quad /: I_1 \Rightarrow \frac{(I_1 + I_2) \cdot \omega_1}{I_1} = \omega_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_2 &= \left(\frac{I_1 + I_2}{I_1} \right) \cdot \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \left(\frac{I_1}{I_1} + \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \left(1 + \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \omega_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \left(1 + \frac{m_2 \cdot r^2}{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r^2} \right) \cdot \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \left(1 + \frac{m_2 \cdot r^2}{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r^2} \right) \cdot \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \left(1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1} \right) \cdot \omega_1 =$$

$$= \left(1 + \frac{2 \cdot 120 \text{ kg}}{200 \text{ kg}} \right) \cdot 10 \frac{\text{okr.}}{\text{min}} = 22 \frac{\text{okr.}}{\text{min}}.$$

Vježba 130

Čovjek stoji na rubu ploče koja se jednoliko okreće oko svoje osi. Masa ploče je 100 kg, a masa čovjeka 60 kg. Ploča se okrene 10 puta u jednoj minuti. Kolikom se kutnom brzinom okreće ploča ako čovjek prijeđe u njezino središte?

Rezultat: $\omega_2 = 22 \text{ okr./min.}$

Zadatak 131 (Siniša, srednja škola)

Koliko okreta u sekundi izvrši čelni kotač lokomotive promjera 1.5 m pri brzini 72 km/h?

Rješenje 131

$$d = 1.5 \text{ m}, \quad v = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Obodna (ili ophodna ili tangencijalna ili linearna) brzina pri jednolikom kruženju je

$$v = \frac{\text{opseg kružne staze}}{\text{period kruženja}} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

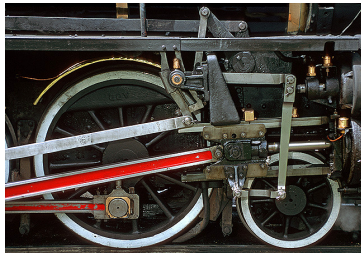
gdje je r polumjer kružne staze.

Frekvencija ν je broj ophoda u jedinici vremena. Perioda T je vrijeme jednog ophoda. Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Zato je:

$$\left. \begin{array}{l} \nu = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \\ \nu = \frac{1}{T} \end{array} \right\} \Rightarrow \nu = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu.$$



Broj okreta u sekundi (frekvencija) ν čelnog kotača lokomotive iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} d = 2 \cdot r \\ \nu = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \nu = d \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow \nu = d \cdot \pi \cdot \nu \cdot \frac{1}{d \cdot \pi} \Rightarrow \nu = \frac{\nu}{d \cdot \pi} =$$

$$= \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1.5 \text{ m} \cdot \pi} = 4.24 \frac{1}{\text{s}} = 4.24 \text{ Hz}.$$

Vježba 131

Koliko okreta u sekundi izvrši čelni kotač lokomotive promjera 1.5 m pri brzini 144 km/h?

Rezultat: 8.49 Hz.

Zadatak 132 (Siniša, srednja škola)

Minutna kazaljka na nekom satu 3 puta je duža od sekundne. Koliki je omjer između brzina točaka na njihovim vrhovima?

Rješenje 132

$$r_1 = 3 \cdot r_2, \quad v_1 : v_2 = ?$$

Obodna (ili ophodna ili tangencijalna ili linearna) brzina pri jednolikom kruženju je

$$v = \frac{\text{opseg kružne staze}}{\text{period kruženja}} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je r polumjer kružne staze, T perioda (vrijeme jednog ophoda).



Perioda (vrijeme jednog ophoda) minutne kazaljke na satu je

$$T_1 = 1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s.}$$

Perioda (vrijeme jednog ophoda) sekundne kazaljke na satu je

$$T_2 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s.}$$

Zato vrijedi:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{3600 \text{ s}}{60 \text{ s}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 60 \Rightarrow T_1 = 60 \cdot T_2.$$

Računamo omjer brzina točaka na vrhovima kazaljki sata:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{2 \cdot r_1 \cdot \pi}{T_1} \\ v_2 &= \frac{2 \cdot r_2 \cdot \pi}{T_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{2 \cdot r_1 \cdot \pi}{T_1}}{\frac{2 \cdot r_2 \cdot \pi}{T_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{2 \cdot r_1 \cdot \pi}{T_1}}{\frac{2 \cdot r_2 \cdot \pi}{T_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \cdot T_2}{r_2 \cdot T_1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r_1 = 3 \cdot r_2 \\ T_1 = 60 \cdot T_2 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{3 \cdot r_2 \cdot T_2}{r_2 \cdot 60 \cdot T_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{3 \cdot r_2 \cdot T_2}{r_2 \cdot 60 \cdot T_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{60} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{20} \Rightarrow v_1 : v_2 = 1 : 20 \Rightarrow v_2 = 20 \cdot v_1.$$

Brzina točke na vrhu sekundne kazaljke je 20 puta veća od brzine točke na vrhu minutne kazaljke sata.

Vježba 132

Minutna kazaljka na nekom satu 2 puta je duža od sekundne. Koliki je omjer između brzina točaka na njihovim vrhovima?

Rezultat: $v_2 = 30 \cdot v_1.$

Zadatak 133 (Gorana, gimnazija)

Ventilator se okreće s 1200 okr./min. Nakon isključivanja dovoda električne energije učinio je jednoliko usporenim okretanjem 200 okretaja.

- Odredite koliko je vremena prošlo od trenutka isključivanja električne energije do zaustavljanja.
- Odredite kutno usporenje α .

Rješenje 133

$$n = 1200 \text{ okretaja}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad N = 200 \text{ okretaja}, \quad t_1 = ?, \quad \alpha = ?$$



Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Ako se tijelo jednom okrene oko čvrste osi kažemo da je načinilo jedan okret ili " opisalo kut 2π rad ili 360° ". Vrijedi:

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Kut φ koji tijelo opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi.$$

Za kutnu akceleraciju α vrijedi izraz:

$$\alpha = \frac{\omega}{t}.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
put	s	kut	φ
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko usporeno gibanje			
Početna brzina v_0		Početna kutna brzina ω_0	
$v = v_0 - a \cdot t$		$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t$	
$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s$		$\omega^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$	
$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$		$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t$	

Ako se tijelo giba jednoliko usporeno (stalnom kutnom akceleracijom $\alpha = \text{const.}$) po kružnici, onda su njegova trenutna kutna brzina ω i opisani kut φ poslije vremena t dani izrazima

$$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t, \quad \varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2,$$

gdje je ω_0 početna kutna brzina, α kutna akceleracija.

a)

U svakoj minuti prijeđe svaka točka ventilatora

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi = 1200 \cdot 2 \cdot \pi = 2400 \cdot \pi \text{ rad},$$

gdje je $2 \cdot \pi$ kut jednog okretaja ventilatora izražen u radijanima. Prema tome je početna kutna brzina ω_0 svake točke na ventilatoru

$$\omega_0 = \frac{\varphi}{t} = \frac{2400 \cdot \pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 40 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Nakon isključivanja dovoda električne energije ventilator je učinio jednoliko usporenim okretanjem N okretaja pa je opisani kut φ jednak:

$$\varphi = N \cdot 2 \cdot \pi = 200 \cdot 2 \cdot \pi = 400 \cdot \pi \text{ rad}.$$

Budući da poslije vremena t_1 ventilator stane (da ne bi otpuhao malu Goranu ☺), u tom trenutku njegova kutna brzina jednaka je nuli.

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \omega_0 - \alpha \cdot t_1 \\ \omega = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_0 - \alpha \cdot t_1 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \alpha \cdot t_1 \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0}{t_1}.$$

Vrijeme zaustavljanja t_1 iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{\omega_0}{t_1} \\ \varphi = \omega_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \omega_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_0}{t_1} \cdot t_1^2 \Rightarrow \varphi = \omega_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot t_1 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot t_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot t_1 \cdot \frac{2}{\omega_0} \Rightarrow t_1 = \frac{2 \cdot \varphi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 400 \cdot \pi \text{ rad}}{40 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 20 \text{ s.}$$

b)

Kutna akceleracija α iznosi:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{t_1} = \frac{40 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{20 \text{ s}} = 2 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 133

Ventilator se okreće s 20 okr./s. Nakon isključivanja dovoda električne energije učinio je jednoliko usporenim okretanjem 200 okretaja. Odredite koliko je vremena prošlo od trenutka isključivanja električne energije do zaustavljanja.

Rezultat: 20 s.

Zadatak 134 (Gorana, gimnazija)

Nakon iskapčanja motora, ventilator, koji se vrtio sa 900 okr./min, počinje jednoliko usporavati i zaustavi se nakon 30 s. Potrebno je izračunati kutnu akceleraciju α i ukupan broj okretaja što ih je učinio ventilator od trenutka iskapčanja motora do zaustavljanja. Kolika je kutna brzina ventilatora 15 s nakon početka usporene rotacije?

Rješenje 134

$$n = 900 \text{ okretaja}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad t_1 = 30 \text{ s}, \quad t_2 = 15 \text{ s}, \quad \alpha = ?, \quad N = ?, \quad \omega_1 = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Ako se tijelo jednom okrene oko čvrste osi kažemo da je načinilo jedan okret ili " opisalo kut 2π rad ili 360° ". Vrijedi:

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Kut φ koji tijelo opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi.$$

Za kutnu akceleraciju α vrijedi izraz:

$$\alpha = \frac{\omega}{t}.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
put	s	kut	φ
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko usporeno gibanje			
Početna brzina v_0		Početna kutna brzina ω_0	
$v = v_0 - a \cdot t$		$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t$	
$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s$		$\omega^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$	
$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$		$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t$	

Ako se tijelo giba jednoliko usporeno (stalnom kutnom akceleracijom $\alpha = \text{const.}$) po kružnici, onda su njegova trenutna kutna brzina ω i opisani kut φ poslije vremena t dani izrazima

$$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t, \quad \varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2,$$

gdje je ω_0 početna kutna brzina, α kutna akceleracija.

U svakoj minuti prijeđe svaka točka ventilatora

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi = 900 \cdot 2 \cdot \pi = 1800 \cdot \pi \text{ rad},$$

gdje je $2 \cdot \pi$ kut jednog okretaja ventilatora izražen u radijanima. Prema tome je početna kutna brzina ω_0 svake točke na ventilatoru

$$\omega_0 = \frac{\varphi}{t} = \frac{1800 \cdot \pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 30 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Budući da poslije vremena t_1 ventilator stane, u tom trenutku njegova kutna brzina jednaka je nuli pa kutna akceleracija iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \omega_0 - \alpha \cdot t_1 \\ \omega = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_0 - \alpha \cdot t_1 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \alpha \cdot t_1 \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0}{t_1} = \frac{30 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{30 \text{ s}} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Za vrijeme t_1 prijeđe svaka točka ventilatora kut

$$\varphi = \omega_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_1^2$$

pa je ukupan broj okretaja N što ih je učinio ventilator od trenutka iskapčanja motora do zaustavljanja jednak:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = N \cdot 2 \cdot \pi \\ \varphi = \omega_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow N \cdot 2 \cdot \pi = \omega_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N \cdot 2 \cdot \pi = \omega_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_1^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow N = \frac{\omega_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_1^2}{2 \cdot \pi} =$$

$$= \frac{30 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 30 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (30 \text{ s})^2}{2 \cdot \pi} = 225.$$

Kutna brzina ω_1 ventilatora nakon vremena t_2 iznosi:

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha \cdot t_2 = 30 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} - \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 15 \text{ s} = 15 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Vježba 134

Nakon iskapčanja motora, ventilator, koji se vrtio sa 900 okr./min, počinje jednoliko usporavati i zaustavi se nakon 10 s. Potrebno je izračunati kutnu akceleraciju.

Rezultat: $3 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$

Zadatak 135 (Vlado, srednja škola)

Turbinu, koja se vrti kutnom brzinom 120 rad/s, zaustavi se tijekom 80 s ako se djeluje konstantnim momentom sile kočenja iznosa $200 \text{ N} \cdot \text{m}$. Koliki je moment inercije turbine?

Rješenje 135

$$\omega = 120 \text{ rad/s}, \quad t = 80 \text{ s}, \quad M = 200 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad I = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Ako se tijelo jednom okrene oko čvrste osi kažemo da je načinilo jedan okret ili " opisalo kut 2π rad ili 360° ". Vrijedi:

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenjivo gibanje po pravcu. Za kutnu brzinu ω vrijedi

$$\omega = \alpha \cdot t,$$

gdje je α kutna akceleracija.

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije glasi:

$$M = \alpha \cdot I \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I},$$

tj. kutna akceleracija rotacije proporcionalna je s momentom sile koja zakreće tijelo, a obrnuto proporcionalna s momentom tromosti I tijela s obzirom na os rotacije.

Moment inercije I turbine iznosi:



$$\left. \begin{array}{l} \omega = \alpha \cdot t \\ M = \alpha \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{\omega}{t} \\ \alpha = \frac{M}{I} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{\omega}{t} = \frac{M}{I} \Rightarrow \omega \cdot I = M \cdot t \cdot \frac{1}{\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{M \cdot t}{\omega} = \frac{200 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot 80 \text{ s}}{120 \frac{1}{\text{s}}} = 133.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Vježba 135

Turbinu, koja se vrti kutnom brzinom 60 rad/s , zaustavi se tijekom 40 s ako se djeluje konstantnim momentom sile kočenja iznosa $200 \text{ N} \cdot \text{m}$. Koliki je moment inercije turbine?

Rezultat: $133.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Zadatak 136 (Matea, gimnazija)

Kotač se vrti jednoliko usporeno. Koliko okretaja načini tijekom jedne minute ako mu se frekvencija okretanja u tom razdoblju smanji sa 5 Hz na 3 Hz ?

Rješenje 136

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad v_0 = 5 \text{ Hz}, \quad v = 3 \text{ Hz}, \quad n = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Ako se tijelo jednom okrene oko čvrste osi kažemo da je načinilo jedan okret ili " opisalo kut $2\pi \text{ rad}$ ili 360° ". Vrijedi:

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Kut φ koji tijelo opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi.$$

Za kutnu akceleraciju α vrijedi izraz:

$$\alpha = \frac{\omega}{t}.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
put	s	kut	φ
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko usporeno gibanje			
Početna brzina v_0		Početna kutna brzina ω_0	
$v = v_0 - a \cdot t$		$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t$	
$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s$		$\omega^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$	
$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$		$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t$	

Ako se tijelo giba jednoliko usporeno (stalnom kutnom akceleracijom $\alpha = \text{const.}$) po kružnici, onda su njegova trenutna kutna brzina ω i opisani kut φ poslije vremena t dani izrazima

$$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t \quad , \quad \varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad ,$$

gdje je ω_0 početna kutna brzina, α kutna akceleracija.

1. inačica

Budući da je rotacija jednoliko usporena, vrijedi:

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 - \alpha \cdot t \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_0 - \omega \quad / \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \alpha &= \frac{\omega_0 - \omega}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot v_0 - 2 \cdot \pi \cdot v}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot (v_0 - v)}{t} = \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(5 \frac{1}{s} - 3 \frac{1}{s}\right)}{60 \text{ s}} = \frac{\pi}{15} \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Opisani kut φ iznosi:

$$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow \varphi = 2 \cdot \pi \cdot v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 2 \cdot \pi \cdot 5 \frac{1}{s} \cdot 60 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{15} \frac{1}{s^2} \cdot (60 \text{ s})^2 = 480 \cdot \pi.$$

Tijekom vremena t kotač načini n okreta:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 480 \cdot \pi \\ \varphi &= n \cdot 2 \cdot \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow n \cdot 2 \cdot \pi = 480 \cdot \pi \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow n = 240.$$

2. inačica

Budući da je rotacija jednoliko usporena, vrijedi:

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 - \alpha \cdot t \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_0 - \omega \quad / \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \alpha &= \frac{\omega_0 - \omega}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot v_0 - 2 \cdot \pi \cdot v}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot (v_0 - v)}{t} = \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(5 \frac{1}{s} - 3 \frac{1}{s}\right)}{60 \text{ s}} = \frac{\pi}{15} \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Opisani kut φ iznosi:

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \Rightarrow 2 \cdot \alpha \cdot \varphi &= \omega_0^2 - \omega^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow \varphi = \frac{(2 \cdot \pi \cdot v_0)^2 - (2 \cdot \pi \cdot v)^2}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot v_0^2 - 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow \varphi = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (v_0^2 - v^2)}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow \varphi = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (v_0^2 - v^2)}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot (v_0^2 - v^2)}{\alpha} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\left(5 \frac{1}{s}\right)^2 - \left(3 \frac{1}{s}\right)^2 \right)}{\frac{\pi}{15} \frac{1}{s^2}} = 480 \cdot \pi. \end{aligned}$$

Tijekom vremena t kotač načini n okreta:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 480 \cdot \pi \\ \varphi &= n \cdot 2 \cdot \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow n \cdot 2 \cdot \pi = 480 \cdot \pi \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow n = 240.$$

Vježba 136

Kotač se vrti jednoliko usporeno. Koliko okretaja načini tijekom 60 sekundi ako mu se frekvencija okretanja u tom razdoblju smanji sa 5 Hz na 3 Hz?

Rezultat: 240.

Zadatak 137 (Mily, gimnazija)

Na zavoju polumjera 50 m cesta je tako građena da auto može voziti brzinom 20 m/s neovisno o trenju. Koliki mora biti nagib ceste na tom zavoju? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 137

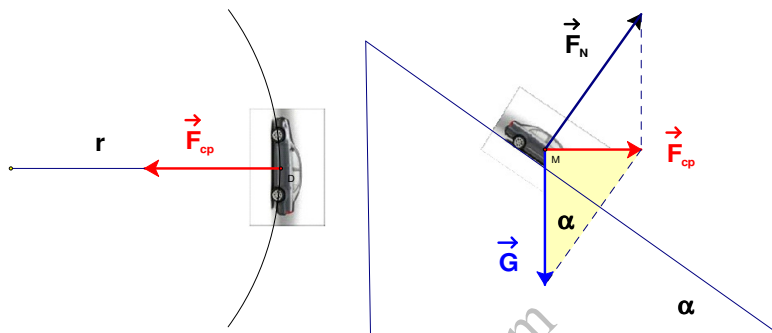
$$r = 50 \text{ m}, \quad v = 20 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?$$

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r brzinom v potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

Tangens šiljastog kuta u pravokutnom trokutu jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz kut.



Sa slike iz paralelograma sila dobije se nagib ceste na tom zavoju:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{F_{cp}}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot v^2}{m \cdot g \cdot r} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{g \cdot r} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{r \cdot g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v^2}{r \cdot g} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{50 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) = 39^{\circ} 11' 49''. \end{aligned}$$

Vježba 137

Na zavoju polumjera 50 m cesta je tako građena da auto može voziti brzinom 72 km/h neovisno o trenju. Koliki mora biti nagib ceste na tom zavoju? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $39^{\circ} 11' 49''$.

Zadatak 138 (Mily, gimnazija)

Na kružnom zavoju polumjera 100 m cesta je nagnuta prema unutrašnjoj strani zavoja 10° . Na koju je brzinu proračunan zavoj? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 138

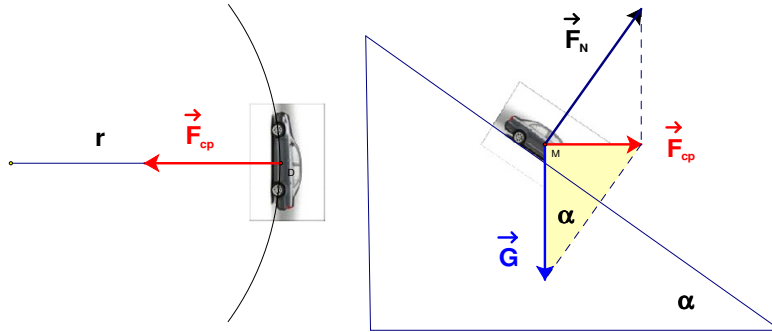
$$r = 100 \text{ m}, \quad \alpha = 10^{\circ}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r brzinom v potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

Tangens šiljastog kuta u pravokutnom trokutu jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz kut.



Sa slike iz paralelograma sila dobije se brzina na koju je proračunan zavoj:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{F_{cp}}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{v^2}{r}}{g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{r \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha &= \frac{v^2}{r \cdot g} \quad | \cdot r \cdot g \Rightarrow v^2 = r \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{r \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{100 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = \\ &= 13.15 \frac{\text{m}}{\text{s}} = [13.15 \cdot 3.6] = 47.34 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \end{aligned}$$

Vježba 138

Na kružnom zavoju polumjera 0.1 km cesta je nagnuta prema unutrašnjoj strani zavoja 10° . Na koju je brzinu proračunan zavoj? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 47.34 km/h.

Zadatak 139 (Mily, gimnazija)

Automobil prelazi preko izbočenog mosta u obliku kružnog luka brzinom $v = 180 \text{ km/h}$. Koliki je polumjer zakrivljenosti mosta ako je na vrhu mosta sila kojom automobil djeluje na most jednaka polovini težine automobila? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 139

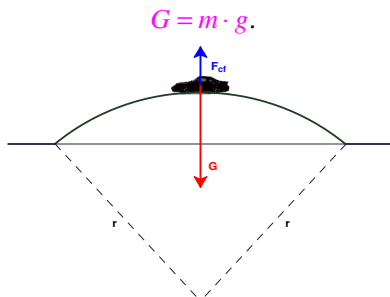
$$v = 180 \text{ km/h} = [180 : 3.6] = 50 \text{ m/s}, \quad F = 0.5 \cdot G, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad r = ?$$

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r brzinom v potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,



Budući da se automobil nalazi na vrhu izbočenog mosta, sila F kojom ga pritišće jednaka je razlici težine G automobila i centripetalne sile F_{cp} jer je centripetalna sila F_{cp} gibanja automobila po mostu

jednaka sili teži G umanjenoj za reakciju na pritisak na most.

$$F = G - F_{cp}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi da sila F kojom automobil djeluje na most mora biti jednaka polovini težine automobila.

$$\left. \begin{aligned} F &= G - F_{cp} \\ F &= \frac{1}{2} \cdot G \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow G - F_{cp} = \frac{1}{2} \cdot G \Rightarrow F_{cp} = G - \frac{1}{2} \cdot G \Rightarrow F_{cp} = \frac{1}{2} \cdot G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \frac{2 \cdot r}{m \cdot g} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot v^2}{g} = \frac{2 \cdot \left(50 \frac{m}{s}\right)^2}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 509.68 \text{ m.}$$

Vježba 139

Automobil prelazi preko izbočenog mosta u obliku kružnog luka brzinom $v = 50 \text{ m/s}$. Koliki je polumjer zakrivljenosti mosta ako je na vrhu mosta sila kojom automobil djeluje na most jednaka polovini težine automobila? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 500 m.

Zadatak 140 (Mily, gimnazija)

Automobil mase 1 t vozi preko mosta brzinom 45 km/h. Nađi kolikom silom djeluje na most ako se pod pritiskom automobila most iskrivi i čini kružni luk polumjera 800 m.

Rješenje 140

$$m = 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}, \quad v = 45 \text{ km/h} = [45 : 3.6] = 12.5 \text{ m/s}, \quad r = 800 \text{ m}, \quad F = ?$$

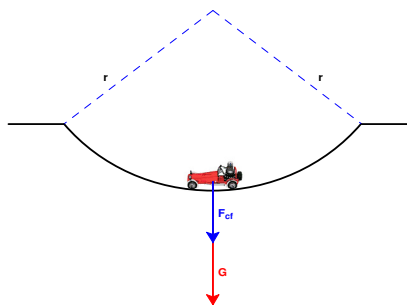
Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r brzinom v potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$



Sila F kojom automobil djeluje na dno iskrivljenog mosta jednaka je zbroju sile teže G automobila i centripetalne sile F_{cp} jer je centripetalna sila F_{cp} jednaka razlici reakcije mosta na pritisak vozila i sile teže.

$$F = G + F_{cp} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F = m \cdot \left(g + \frac{v^2}{r} \right) =$$

$$= 1000 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{\left(12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{800 \text{ m}} \right) = 10005.31 \text{ N} \approx 10^4 \text{ N}.$$

Vježba 140

Automobil mase 1000 kg vozi preko mosta brzinom 12.5 m/s. Nadi kolikom silom djeluje na most ako se pod pritiskom automobila most iskrivi i čini kružni luk polumjera 0.8 km.

Rezultat: 10^4 N .

www.halapa.com