

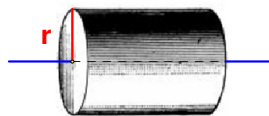
Zadatak 081 (Vedran, gimnazija)

Valjak mase 100 kg, polumjera 0.1 m, okreće se oko svoje osi. Koliki mora biti zakretni moment da bi se valjak vrtio kutnom akceleracijom 2 rad/s^2 ?

Rješenje 081

$$m = 100 \text{ kg}, \quad r = 0.1 \text{ m}, \quad \alpha = 2 \text{ rad/s}^2, \quad M = ?$$

Moment tromosti homogenog valjka mase m i polumjera baze r je:



$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Zakretni moment valjka iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ M = \alpha \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ kg} \cdot (0.1 \text{ m})^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Vježba 081

Valjak mase 100 kg, polumjera 0.1 m, okreće se oko svoje osi. Koliki mora biti zakretni moment da bi se valjak vrtio kutnom akceleracijom 4 rad/s^2 ?

Rezultat: 2 Nm.

Zadatak 082 (Vedran, gimnazija)

Zamašnjak ima oblik kružne ploče, masu 50 kg i polumjer 0.2 m. Zavrtjeli smo ga do brzine 480 okr/min i zatim prepustili samome sebi. Pod utjecajem trenja on se zaustavio. Koliki je moment sile trenja ako pretpostavimo da je trenje stalno i ako se zamašnjak zaustavio nakon 50 s?

Rješenje 082

$$m = 50 \text{ kg}, \quad r = 0.2 \text{ m}, \quad \omega = 480 \text{ okr/min} = 480 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}/60 \text{ s} = 16 \cdot \pi \text{ rad/s}, \quad t = 50 \text{ s},$$

$$M = ?$$

Moment tromosti kružne ploče polumjera r s obzirom na os koja prolazi okomito na ploču njezinim središtem:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko ubrzano gibanje			
Bez početne brzine		Bez početne kutne brzine	
$v = a \cdot t$		$\omega = \alpha \cdot t$	

Moment sile trenja iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2, \quad M = \alpha \cdot I \\ \omega = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ \alpha = \frac{\omega}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow M = \frac{\omega}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 =$$

$$= \frac{16 \cdot \pi \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{2}}{s} \cdot 50 \text{ kg} \cdot (0.2 \text{ m})^2 = 1.01 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Vježba 082

Zamašnjak ima oblik kružne ploče, masu 100 kg i polumjer 0.2 m. Zavrtjeli smo ga do brzine 480 okr/min i zatim prepustili samome sebi. Pod utjecajem trenja on se zaustavio. Koliki je moment sile trenja ako pretpostavimo da je trenje stalno i ako se zamašnjak zaustavio nakon 100 s?

Rezultat: 1.01 Nm.

Zadatak 083 (Fery, gimnazija)

Koliki je moment tromosti Zemljine kugle ako uzmemo da su srednji polumjer Zemlje 6400 km i srednja gustoća $5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$?

Rješenje 083

$$r = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \rho = 5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad I = ?$$

Moment tromosti kugle polumjera r s obzirom na os koja prolazi središtem je:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Moment tromosti Zemljine kugle iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{obujam kugle polumjera } r \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{2}{5} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi = \frac{8}{15} \cdot 5.5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (6.4 \cdot 10^6 \text{ m})^5 \cdot \pi = 9.895 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Vježba 083

Koliki je moment tromosti planeta ako uzmemo da su mu srednji polumjer 6400 km i srednja gustoća $1.1 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$?

Rezultat: $1.979 \cdot 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Zadatak 084 (Fery, gimnazija)

Na učvršćeni kolotur polumjera 0.5 m omotana je nit na kraju koje je učvršćen uteg mase 10 kg. Nađi moment tromosti kolotura ako uteg pada akceleracijom 2.04 m/s^2 . ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 084

$$r = 0.5 \text{ m}, \quad m = 10 \text{ kg}, \quad a = 2.04 \text{ m/s}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad I = ?$$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Za linearnu ili obodnu akceleraciju a čestice krutog tijela i njezinu kutnu akceleraciju α vrijedi izraz:

$$a = r \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a}{r}$$

Budući da je sila F težina utega, za moment sile težine utega vrijedi:

$$M = G \cdot r \Rightarrow M = m \cdot g \cdot r$$

Moment tromosti kolotura iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I, \quad M = m \cdot g \cdot r \\ \alpha = \frac{a}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha \cdot I = m \cdot g \cdot r \\ \alpha = \frac{a}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{r} \cdot I = m \cdot g \cdot r \cdot \frac{r}{a} \Rightarrow I = \frac{m \cdot g \cdot r^2}{a} =$$

$$= \frac{10 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0.5 \text{ m})^2}{2.04 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 12.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Vježba 084

Na učvršćeni kolotur polumjera 0.5 m omotana je nit na kraju koje je učvršćen uteg mase 20 kg. Nađi moment tromosti kolotura ako uteg pada akceleracijom 4.08 m/s². (g = 9.81 m/s²)

Rezultat: 12.02 kg · m².

Zadatak 085 (Marko, gimnazija)

Bakrena kugla polumjera 10 cm vrti se oko osi koja prolazi središtem te učini dva okreta u sekundi. Koliki rad treba utrošiti da bismo joj kutnu brzinu podvostručili? (gustoća bakra ρ = 8900 kg/m³)

Rješenje 085

r = 10 cm = 0.1 m, ω₁ = 2 okr/s = 2 · 2 · π rad/s = 4 · π rad/s, ω₂ = 2 · ω₁, ρ = 8900 kg/m³, W = ?

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Kinetička je energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Moment tromosti kugle polumjera r s obzirom na os koja prolazi središtem glasi:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V$$

Utrošeni rad iznosi:

$$W = \Delta E_k \Rightarrow W = E_{k_2} - E_{k_1} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left((2 \cdot \omega_1^2)^2 - \omega_1^2 \right) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (4 \cdot \omega_1^2 - \omega_1^2) \Rightarrow W = \frac{3}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2$$

Sada je:

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V, \quad I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\ W = \frac{3}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{2}{5} \cdot \rho \cdot V \cdot r^2 \\ W = \frac{3}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow W = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \rho \cdot V \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{3}{5} \cdot \rho \cdot V \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{obujam kugle polumjera } r \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array} \right] \Rightarrow W = \frac{3}{5} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{4}{5} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi \cdot \omega_1^2 = \frac{4}{5} \cdot 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (0.1 \text{ m})^5 \cdot \pi \cdot \left(4 \cdot \pi \frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 35.32 \text{ J.}$$

Vježba 085

Bakrena kugla polumjera 100 mm vrti se oko osi koja prolazi središtem te učini 120 okr/min. Koliki rad treba utrošiti da bismo joj kutnu brzinu podvostručili? (gustoća bakra $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 35.32 J.

Zadatak 086 (Ines, srednja škola)

Kružna ploča polumjera 1 m i mase 196 kg kotrlja se po horizontalnoj površini, pri čemu je brzina njezine osi 4 m/s. Nađi ukupnu energiju gibanja ploče.

Rješenje 086

$$r = 1 \text{ m}, \quad m = 196 \text{ kg}, \quad v = 4 \text{ m/s}, \quad E = ?$$

Između obodne (linearne) brzine v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega.$$

Moment tromosti kružne ploče polumjera r s obzirom na os koja prolazi okomito na ploču njezinim središtem je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju (translacije)

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička je energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω :

$$E_{k_r} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2.$$

Ukupna energija gibanja ploče sastoji se od kinetičke energije njezine translacije i kinetičke energije rotacije:

$$E = E_k + E_{k_r} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \right] \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot (r \cdot \omega)^2 \Rightarrow [v = r \cdot \omega] \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E = \frac{3}{4} \cdot m \cdot v^2 =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 196 \text{ kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 2352 \text{ J.}$$

Vježba 086

Kružna ploča polumjera 1 m i mase 392 kg kotrlja se po horizontalnoj površini, pri čemu je brzina njezine osi 4 m/s. Nađi ukupnu energiju gibanja ploče.

Rezultat: 4704 J.

Zadatak 087 (Petar, srednja škola)

Izračunaj kinetičku energiju valjka promjera 0.3 m, koji se vrti oko svoje osi, ako mu je masa 2000 kg i učini 200 okreta u minuti.

Rješenje 087

$$2 \cdot r = 0.3 \text{ m} \Rightarrow r = 0.15 \text{ m}, \quad m = 2000 \text{ kg}, \quad \omega = 200 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 200 \cdot 2 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{60 \text{ s}} = \frac{20}{3} \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$E_k = ?$

Moment tromosti valjka mase m i polumjera r je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Kinetička je energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω :

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2.$$

Kinetička energija valjka koji se vrti oko svoje osi iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot m \cdot (r \cdot \omega)^2 =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 2000 \text{ kg} \cdot \left(0.15 \text{ m} \cdot \frac{20}{3} \cdot \pi \frac{1}{s} \right)^2 = 4934.8 \text{ J}.$$

Vježba 087

Izračunaj kinetičku energiju valjka promjera 0.3 m, koji se vrti oko svoje osi, ako mu je masa 4000 kg i učini 200 okreta u minuti.

Rezultat: 9869.6 J.

Zadatak 088 (Petar, srednja škola)

Tane mase 360 kg giba se brzinom 800 m/s i vrti 5250 okr/min. Odredi koji dio ukupne energije gibanja čini energija rotacije. Moment tromosti iznosi 4.9 kg m².

Rješenje 088

$m = 360 \text{ kg}, \quad v = 800 \text{ m/s}, \quad \omega = 5250 \text{ okr/s} = 5250 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad/s} = 175 \cdot \pi \text{ rad/s},$
 $I = 4.9 \text{ kg m}^2, \quad p = ?$

Kinetička je energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω :

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju (translacije)

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Računamo koji dio ukupne energije gibanja (energije translacije) čini energija rotacije:

$$p = \frac{E_{kr}}{E_k} \Rightarrow p = \frac{\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2} \Rightarrow p = \frac{I \cdot \omega^2}{m \cdot v^2} \Rightarrow p = \frac{I}{m} \cdot \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 =$$
$$= \frac{4.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{360 \text{ kg}} \cdot \left(\frac{175 \cdot \pi \frac{1}{s}}{800 \frac{\text{m}}{s}} \right)^2 = 0.0064 = \frac{0.64}{100} = 0.64\%.$$

Vježba 088

Tane mase 720 kg giba se brzinom 800 m/s i vrti 5250 okr/min. Odredi koji dio ukupne energije gibanja čini energija rotacije. Moment tromosti iznosi 9.8 kg m².

Rezultat: 0.64%.

Zadatak 089 (Vesna, gimnazija)

Čovjek stoji na rubu horizontalne kružne ploče koja se jednoliko okreće oko svoje osi zbog ustrajnosti. Masa ploče je $m_1 = 100$ kg, masa čovjeka $m_2 = 60$ kg, a frekvencija vrtnje 10 okr/min. Kolikom će se brzinom početi okretati ploča ako čovjek s ruba ploče prijeđe u njezino središte?

Rješenje 089

$$m_1 = 100 \text{ kg}, \quad m_2 = 60 \text{ kg}, \quad \omega_1 = 10 \text{ okr/min}, \quad \omega_2 = ?$$

Moment tromosti materijalne točke m na udaljenosti r od osi rotacije:

$$I = m \cdot r^2.$$

Moment tromosti kružne ploče polumjera r s obzirom na os koja prolazi okomito na ploču njezinim središtem:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Zamah (kutna količina gibanja) prema definiciji je umnožak momenta tromosti i kutne brzine:

$$L = I \cdot \omega.$$

Za tijelo na koje ne djeluju vanjski momenti sila vrijedi zakon održanja zamaha, tj. zbroj zamaha ostaje konstantan. Za tijelo kojemu smo promijenili bilo I, bilo ω vrijedi:

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2.$$

Budući da čovjek i ploča čine zatvoreni sustav (na njih ne djeluju vanjski momenti sila), za njega vrijedi zakon održanja zamaha:

$$L_1 = L_2.$$

Dok je čovjek stajao na rubu ploče zamah L_1 bio je jednak zbroju zamaha ploče i zamaha čovjeka:

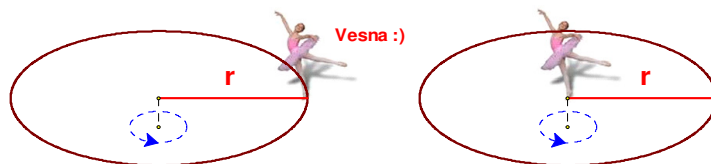
$$\begin{aligned} L_1 = L_p + L_{\check{c}} &\Rightarrow L_1 = I_p \cdot \omega_1 + I_{\check{c}} \cdot \omega_1 \Rightarrow L_1 = (I_p + I_{\check{c}}) \cdot \omega_1 \Rightarrow L_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r^2 + m_2 \cdot r^2 \right) \cdot \omega_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow L_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot m_1 + m_2 \right) \cdot r^2 \cdot \omega_1. \end{aligned}$$

Kad je čovjek prešao u središte ploče, njegov moment možemo zanemariti (moment je 0) pa za zamah L_2 vrijedi:

$$L_2 = I_p \cdot \omega_2 + 0 \Rightarrow L_2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r^2 \cdot \omega_2.$$

Iz zakona održanja zamaha izlazi:

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot m_1 + m_2 \right) \cdot r^2 \cdot \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r^2 \cdot \omega_2 \quad /: r^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot m_1 + m_2 \right) \cdot \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \omega_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_2 = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot m_1 + m_2 \right) \cdot \omega_1}{\frac{1}{2} \cdot m_1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 100 \text{ kg} + 60 \text{ kg} \right) \cdot 10 \frac{\text{okr}}{\text{min}}}{\frac{1}{2} \cdot 100 \text{ kg}} = 22 \frac{\text{okr}}{\text{min}}. \end{aligned}$$



Vježba 089

Čovjek stoji na rubu horizontalne kružne ploče koja se jednoliko okreće oko svoje osi zbog ustrajnosti. Masa ploče je $m_1 = 100$ kg, masa čovjeka $m_2 = 60$ kg, a frekvencija vrtnje 20 okr/min. Kolikom će se brzinom početi okretati ploča ako čovjek s ruba ploče prijeđe u njezino središte?

Rezultat: 44 okr/min.

Zadatak 090 (Mario, gimnazija)

Kugla se kotrlja niz kosinu nagiba 30° . Odredi vrijeme gibanja kugle ako se njezino središte spustilo za 20 cm. Trenje se može zanemariti. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 090

$$\alpha = 30^\circ, \quad h = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju (translacije)

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička je energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω :

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Moment tromosti kugle polumjera r s obzirom na os koja prolazi središtem:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Između obodne (linearne) brzine v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

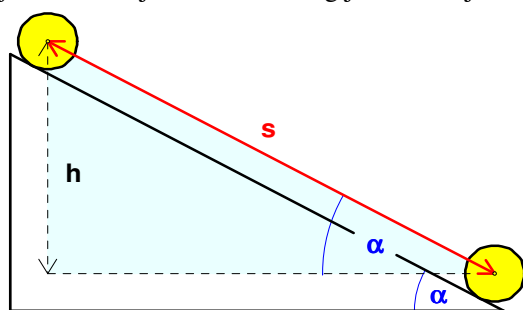
$$v = r \cdot \omega.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow v = \frac{2 \cdot s}{t},$$

gdje su s i v put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Iz zakona održanja energije slijedi da je gravitacijska potencijalna energija kugle na vrhu kosine jednaka zbroju kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije kugle pri dnu kosine:



$$E_{gp} = E_k + E_{kr} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{5} \cdot m \cdot (r \cdot \omega)^2 \Rightarrow [v = r \cdot \omega] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{5} \cdot m \cdot v^2 \quad / \cdot \frac{10}{m} \Rightarrow 10 \cdot g \cdot h = 5 \cdot v^2 + 2 \cdot v^2 \Rightarrow 7 \cdot v^2 = 10 \cdot g \cdot h \quad / : 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{10 \cdot g \cdot h}{7} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h}{7}}.$$

Sa slike vidi se (uoči pravokutan trokut hipotenuze s i katete h):

$$\sin \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow s = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Sada je:

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{h}{\sin \alpha} \\ v = \frac{2 \cdot s}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot h}{t \cdot \sin \alpha} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot h}{t \cdot \sin \alpha}.$$

Iz sustava jednačbi za brzinu v dobije se vrijeme t :

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{2 \cdot h}{t \cdot \sin \alpha} \\ v = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h}{7}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2 \cdot h}{t \cdot \sin \alpha} = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h}{7}} \Rightarrow t \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h}{7}} = 2 \cdot h \Rightarrow t = \frac{2 \cdot h}{\sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h}{7}}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0.2 \text{ m}}{\sin 30^\circ \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.2 \text{ m}}{7}}} = 0.478 \text{ s}.$$

Vježba 090

Kugla se kotrlja niz kosinu nagiba 45° . Odredi vrijeme gibanja kugle ako se njezino središte spustilo za 20 cm. Trenje se može zanemariti. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.338 s.

Zadatak 091 (Tomo, tehnička škola)

Kotač promjera 80 cm ima moment tromosti 200 kg m^2 . Izračunaj kutnu akceleraciju kotača ako na njegov rub djeluje stalna tangencijalna sila 250 N.

Rješenje 091

$$2 \cdot r = 80 \text{ cm} \Rightarrow r = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}, \quad I = 200 \text{ kg m}^2, \quad F = 250 \text{ N}, \quad \alpha = ?$$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Moment sile M koji okreće kotač jednak je umnošku momenta tromosti I kotača i kutne akceleracije α .

Kutna akceleracija kotača iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ M = F \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot I = F \cdot r \Rightarrow \alpha = \frac{F \cdot r}{I} = \frac{250 \text{ N} \cdot 0.4 \text{ m}}{200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 0.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Vježba 091

Kotač promjera 160 cm ima moment tromosti 200 kg m^2 . Izračunaj kutnu akceleraciju kotača ako na njegov rub djeluje stalna tangencijalna sila 250 N.

Rezultat: 1 rad/s.

Zadatak 092 (Tomo, tehnička škola)

Na zamašnjak djeluje stalna moment sile 10^5 Nm . Nađi kutnu brzinu koju postigne zamašnjak za 5 s ako se počeo okretati iz mirovanja. Moment tromosti zamašnjaka u odnosu na os vrtnje iznosi 10^4 kg m^2 .

Rješenje 092

$$M = 10^5 \text{ Nm}, \quad t = 5 \text{ s}, \quad I = 10^4 \text{ kg m}^2, \quad \omega = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalna moment sile M , koji još zovemo

zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Moment sile M koji okreće zamašnjak jednak je umnošku momenta tromosti I zamašnjaka i kutne akceleracije α .

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko ubrzano gibanje			
Bez početne brzine		Bez početne kutne brzine	
v = a · t		$\omega = \alpha \cdot t$	

Kutna brzina ω iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ \omega = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ \alpha = \frac{\omega}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow M = \frac{\omega}{t} \cdot I \cdot t \Rightarrow M \cdot t = \omega \cdot I \Rightarrow \omega = \frac{M \cdot t}{I} = \frac{10^5 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot 5 \text{ s}}{10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Vježba 092

Na zamašnjak djeluje stalan moment sile 10^5 Nm . Nađi kutnu brzinu koju postigne zamašnjak za 3 s ako se počeo okretati iz mirovanja. Moment tromosti zamašnjaka u odnosu na os vrtnje iznosi 10^4 kg m^2 .

Rezultat: 30 rad/s.

Zadatak 093 (Marina, gimnazija)

Čovjek stoji u središtu kružne ploče koja se zbog ustrajnosti jednoliko vrti brzinom 0.5 okr/s. Moment tromosti čovjeka s obzirom na os vrtnje jest 2.45 N m s^2 . On ima raširene ruke i u svakoj drži uteg mase 2 kg. Utezi su međusobno udaljeni 1.6 m. Kojom brzinom će se okretati ploča ako čovjek spusti ruke tako da su utezi udaljeni samo 0.6 m? Moment ploče može se zanemariti.

Rješenje 093

$$\omega_1 = 0.5 \text{ okr/s}, \quad I_{\text{c}} = 2.45 \text{ N m s}^2, \quad m = 2 \text{ kg}, \quad 2 \cdot r_1 = 1.6 \text{ m} \Rightarrow r_1 = 0.8 \text{ m}, \\ 2 \cdot r_2 = 0.6 \text{ m} \Rightarrow r_2 = 0.3 \text{ m}, \quad \omega_2 = ?$$

Moment tromosti materijalne točke mase m na udaljenosti r od osi rotacije:

$$I = m \cdot r^2.$$

Zamah (kutna količina gibanja) prema definiciji je umnožak momenta tromosti i kutne brzine:

$$L = I \cdot \omega.$$

Za tijelo na koje ne djeluju vanjski momenti sila vrijedi zakon održanja zamaha, tj. zbroj zamaha ostaje konstantan. Za tijelo kojemu smo promijenili bilo I, bilo ω vrijedi:

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2.$$

Moment tromosti I_1 jednak je zbroju momenta tromosti I_{c} čovjeka s obzirom na os vrtnje i momenata tromosti utega kada čovjek ima raširene ruke:

$$I_1 = I_{\text{c}} + m \cdot r_1^2 + m \cdot r_1^2 \Rightarrow I_1 = I_{\text{c}} + 2 \cdot m \cdot r_1^2.$$

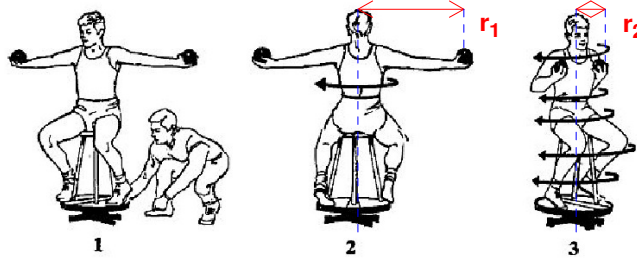
Moment tromosti I_2 jednak je zbroju momenta tromosti I_{c} čovjeka s obzirom na os vrtnje i momenata tromosti utega kada čovjek ima spuštene ruke:

$$I_2 = I_{\text{c}} + m \cdot r_2^2 + m \cdot r_2^2 \Rightarrow I_2 = I_{\text{c}} + 2 \cdot m \cdot r_2^2.$$

Zbog zakona održanja zamaha je:

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1 \cdot \omega_1}{I_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{(I_{\check{c}} + 2 \cdot m \cdot r_1^2) \cdot \omega_1}{I_{\check{c}} + 2 \cdot m \cdot r_2^2} = \frac{(2.45 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 + 2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot (0.8 \text{ m})^2) \cdot 0.5 \frac{\text{okr}}{\text{s}}}{2.45 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 + 2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot (0.3 \text{ m})^2} = 0.89 \frac{\text{okr}}{\text{s}}$$



Vježba 093

Čovjek stoji u središtu kružne ploče koja se zbog ustrajnosti jednoliko vrti brzinom 1 okr/s. Moment tromosti čovjeka s obzirom na os vrtnje jest $2.45 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$. On ima raširene ruke i u svakoj drži uteg mase 2 kg. Utezi su međusobno udaljeni 1.6 m. Kojom brzinom će se okretati ploča ako čovjek spusti ruke tako da su utezi udaljeni samo 0.6 m? Moment ploče može se zanemariti.

Rezultat: 1.78 okr/s.

Zadatak 094 (Ante, student)

Tri tijela masa 3 kg, 1 kg i 4 kg nalaze se u vrhovima jednakostraničnog trokuta kao na slici. Gdje se nalazi središte mase sustava?

Rješenje 094

$$m_1 = 3 \text{ kg}, \quad m_2 = 1 \text{ kg}, \quad m_3 = 4 \text{ kg}, \quad a, \quad x_{CM} = ?, \quad y_{CM} = ?$$

Gibanje sustava čestica mogli bismo proučavati promatranjem gibanja svake pojedine čestice tog sustava. U slučaju velikog broja čestica to bi bio složen, a često i nemoguć posao. Zato se definira posebna zamišljena točka tzv. središte mase sustava, pomoću koje možemo lakše i jednostavnije opisati gibanje sustava kao cjeline.

- Ako su čestice razmještene na x osi, definiramo točku sustava koju nazivamo središte mase s koordinatom x_{CM} kao:

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \quad \text{ili} \quad x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

gdje je n broj čestica, m_i masa i – te čestice, x_i udaljenost i – te čestice od ishodišta koordinatnog sustava.

- Ako su čestice razmještene u Kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini, definiramo točku sustava koju nazivamo središte mase s koordinatama x_{CM} i y_{CM} kao:

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \quad \text{ili} \quad x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \dots + m_n \cdot y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \quad \text{ili} \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

gdje je n broj čestica, m_i masa i – te čestice, x_i i y_i koordinate i – te čestice.

- Ako su čestice razmještene u Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru, definiramo točku sustava koju nazivamo središte mase s koordinatama x_{CM} , y_{CM} i z_{CM} kao:

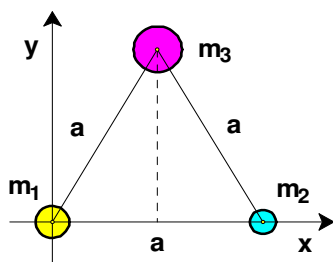
$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \text{ ili } x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \dots + m_n \cdot y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \text{ ili } y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + \dots + m_n \cdot z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \text{ ili } z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

gdje je n broj čestica, m_i masa i – te čestice, x_i, y_i i z_i koordinate i – te čestice.

Budući da se tri tijela nalaze u vrhovima jednakostraničnog trokuta duljine stranice a, sa slike vidi se:



$$m_1 = 3 \text{ kg}, x_1 = 0, y_1 = 0$$

$$m_2 = 1 \text{ kg}, x_2 = a, y_2 = 0$$

$$m_3 = 4 \text{ kg}, x_3 = \frac{a}{2}, y_3 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x_{CM} &= \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ y_{CM} &= \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_{CM} &= \frac{3 \text{ kg} \cdot 0 + 1 \text{ kg} \cdot a + 4 \text{ kg} \cdot \frac{a}{2}}{3 \text{ kg} + 1 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} \\ y_{CM} &= \frac{3 \text{ kg} \cdot 0 + 1 \text{ kg} \cdot 0 + 4 \text{ kg} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}}{3 \text{ kg} + 1 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_{CM} &= \frac{3}{8} \cdot a \\ y_{CM} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a \end{aligned} \right\}$$

Vježba 094

Dva tijela masa 2 kg i 3 kg nalaze se na x osi. Njihove koordinate su $x_1 = 1$ m i $x_2 = 2$ m. Gdje se nalazi središte mase sustava?

Rezultat: $x_{CM} = 1.6$ m.

Zadatak 095 (Igor, gimnazija)

Kako se mijenja kutna akceleracija kružne ploče na koju djeluje stalni zakretni moment ako pri istoj masi povećamo njezin polumjer dva puta?

Rješenje 095

$$m = \text{konstantna}, \quad r, \quad r_1 = 2 \cdot r, \quad \alpha_1 : \alpha = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M, koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Moment sile M koji okreće kotač jednak je umnošku momenta tromosti I kotača i kutne akceleracije α . Moment tromosti kružne ploče polumjera r s obzirom na os koja prolazi okomito na ploču njezinim središtem:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

I. inačica

Kutna akceleracija kotača iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \Rightarrow \alpha = \frac{M}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot M}{m \cdot r^2}.$$

$$\alpha \sim \frac{1}{r^2}.$$

Budući da je kutna akceleracija α obrnuto razmjerna s kvadratom polumjera kružne ploče, slijedi: ako se uz istu masu polumjer poveća dva puta kutna akceleracija smanji se četiri puta.

2. inačica

Najprije odredimo formulu za kutnu akceleraciju α :

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \Rightarrow \alpha = \frac{M}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot M}{m \cdot r^2}.$$

Računamo kutnu akceleraciju za polumjer r (masa je stalna):

$$\alpha = \frac{2 \cdot M}{m \cdot r^2}.$$

Računamo kutnu akceleraciju za polumjer r_1 (masa je stalna):

$$\alpha_1 = \frac{2 \cdot M}{m \cdot r_1^2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2 \cdot M}{m \cdot (2 \cdot r)^2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2 \cdot M}{m \cdot 4 \cdot r^2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2 \cdot M}{m \cdot 4 \cdot r^2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{M}{2 \cdot m \cdot r^2}.$$

Gledamo omjer kutnih akceleracija:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\frac{M}{2 \cdot m \cdot r^2}}{\frac{2 \cdot M}{m \cdot r^2}} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{2 \cdot m \cdot r^2}{2 \cdot M} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4} \cdot \alpha.$$

Vježba 095

Kako se mijenja kutna akceleracija kružne ploče na koju djeluje stalni zakretni moment ako pri istoj masi povećamo njezin polumjer tri puta?

Rezultat: Kutna akceleracija smanji se devet puta.

Zadatak 096 (Irena, gimnazija)

Dva čovjeka nose na štapu dugome 5 m teret mase 12 kg. Masa štapa se zanemari. Opterećeni su teretom u omjeru 4 : 5. Gdje je obješen teret? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 096

$$d = 5 \text{ m}, \quad m = 12 \text{ kg}, \quad F_1 : F_2 = 4 : 5, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad d_1 = ?, \quad d_2 = ?$$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

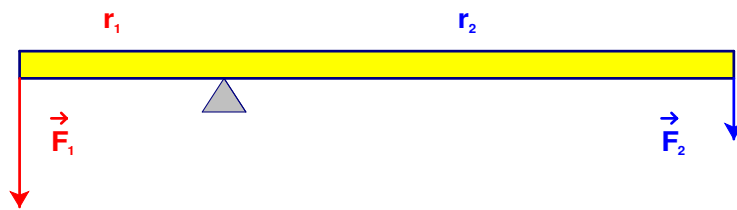
Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljinog privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

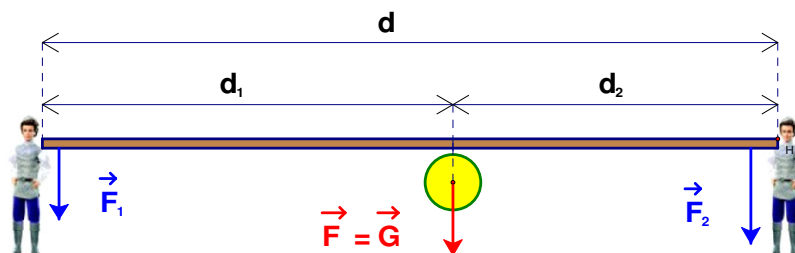
Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje zakreću tijelo u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.

Dvostrana poluga je u ravnoteži kad je

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2.$$



Na štap djeluje sila teža. Sa slike vidi se:



$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} F_1 : F_2 = 4 : 5 \\ F = F_1 + F_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 5 \cdot F_1 = 4 \cdot F_2 \\ F_2 = F - F_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 \cdot F_1 = 4 \cdot (F - F_1) \Rightarrow 5 \cdot F_1 = 4 \cdot F - 4 \cdot F_1 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow 5 \cdot F_1 + 4 \cdot F_1 = 4 \cdot F \Rightarrow 9 \cdot F_1 = 4 \cdot F \quad / : 9 \Rightarrow F_1 = \frac{4}{9} \cdot F \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_1 = \frac{4}{9} \cdot F \\ F = F_1 + F_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_1 = \frac{4}{9} \cdot F \\ F_2 = F - F_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow F_2 = F - \frac{4}{9} \cdot F \Rightarrow F_2 = \frac{5}{9} \cdot F.
 \end{aligned}$$

Uporabom zakona poluge dobije se:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \\ d = d_1 + d_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \\ d_2 = d - d_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot (d - d_1) \Rightarrow F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d - F_2 \cdot d_1 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_1 = F_2 \cdot d \Rightarrow d_1 \cdot (F_1 + F_2) = F_2 \cdot d \Rightarrow d_1 \cdot F = F_2 \cdot d \Rightarrow d_1 = \frac{F_2 \cdot d}{F} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow d_1 = \frac{\frac{5}{9} \cdot F \cdot d}{F} \Rightarrow d_1 = \frac{\frac{5}{9} \cdot F \cdot d}{F} \Rightarrow d_1 = \frac{5}{9} \cdot d = \frac{5}{9} \cdot 5 \text{ m} = \\
 & \Rightarrow d_1 = \frac{5 \cdot d_2}{4} = 2.777777... \text{ m} = 2.78 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Sada je d_2 :

$$d_2 = d - d_1 = 5 \text{ m} - 2.78 \text{ m} = 2.22 \text{ m}.$$

Vježba 096

Dva čovjeka nose na štapu dugome 5 m teret mase 10 kg. Masa štapa se zanemari. Opterećeni su teretom u omjeru 4 : 5. Gdje je obješen teret?

Rezultat: $d_1 = 2.78 \text{ m}$, $d_2 = 2.22 \text{ m}$.

Zadatak 097 (Matija, gimnazija)

Uteg se sastoji od valjka AB duljine 50 cm, mase 2 kg, i dviju kugli na krajevima valjka. Jedna ima polumjer 3 cm i masu 1.5 kg, a druga polumjer 6 cm i masu 12 kg. Nađi težište.

Rješenje 097

$d = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$, $m = 2 \text{ kg}$, $r_1 = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$, $m_1 = 1.5 \text{ kg}$, $r_2 = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}$,
 $m_2 = 12 \text{ kg}$, $x_T = ?$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

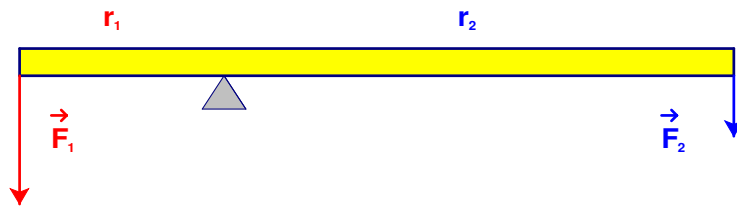
Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovmes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovmes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

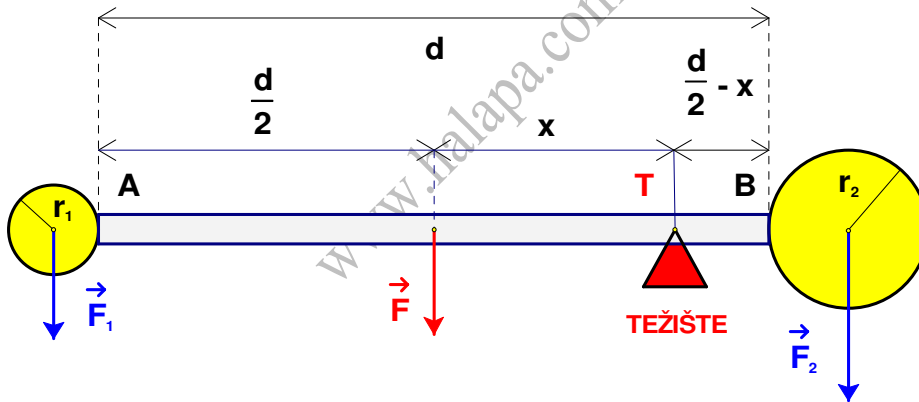
Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje zakreću tijelo u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.

Dvostrana poluga je u ravnoteži kad je

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2.$$



Na valjak AB i dvije kugle djeluje sila teža. Sa slike vidi se:



Valjak AB je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje ga zakreću u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.

$$\begin{aligned} F_1 \cdot r_1 + F_1 \cdot \left(\frac{d}{2} + x\right) + F \cdot x &= F_2 \cdot \left(\frac{d}{2} - x\right) + F_2 \cdot r_2 \Rightarrow [F_1 = G_1, F = G, F_2 = G_2] \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_1 \cdot r_1 + G_1 \cdot \left(\frac{d}{2} + x\right) + G \cdot x = G_2 \cdot \left(\frac{d}{2} - x\right) + G_2 \cdot r_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_1 \cdot r_1 + G_1 \cdot \frac{d}{2} + G_1 \cdot x + G \cdot x = G_2 \cdot \frac{d}{2} - G_2 \cdot x + G_2 \cdot r_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_1 \cdot x + G \cdot x + G_2 \cdot x = G_2 \cdot \frac{d}{2} + G_2 \cdot r_2 - G_1 \cdot r_1 - G_1 \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \cdot (G_1 + G + G_2) = G_2 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_2\right) - G_1 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_1\right) \Rightarrow x = \frac{G_2 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_2\right) - G_1 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_1\right)}{G_1 + G_2 + G} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m_2 \cdot g \cdot \left(\frac{d}{2} + r_2\right) - m_1 \cdot g \cdot \left(\frac{d}{2} + r_1\right)}{m_1 \cdot g + m_2 \cdot g + m \cdot g} \Rightarrow x = \frac{g \cdot \left(m_2 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_2\right) - m_1 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_1\right)\right)}{g \cdot (m_1 + m_2 + m)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{g \cdot \left(m_2 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_2\right) - m_1 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_1\right)\right)}{g \cdot (m_1 + m_2 + m)} \Rightarrow x = \frac{m_2 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_2\right) - m_1 \cdot \left(\frac{d}{2} + r_1\right)}{m_1 + m_2 + m} =$$

$$= \frac{12 \text{ kg} \cdot \left(\frac{0.5 \text{ m}}{2} + 0.06 \text{ m}\right) - 1.5 \text{ kg} \cdot \left(\frac{0.5 \text{ m}}{2} + 0.03 \text{ m}\right)}{1.5 \text{ kg} + 12 \text{ kg} + 2 \text{ kg}} = 0.2129 \text{ m} = 21.29 \text{ cm}.$$

Udaljenost težišta T iznosi:

- od središta kugle manjeg polumjera : $r_1 + \frac{d}{2} + x = 3 \text{ cm} + \frac{50 \text{ cm}}{2} + 21.29 \text{ cm} = 49.29 \text{ cm}.$
- od središta kugle većeg polumjera : $r_2 + \frac{d}{2} - x = 6 \text{ cm} + \frac{50 \text{ cm}}{2} - 21.29 \text{ cm} = 9.71 \text{ cm}.$

Vježba 097

Uteg se sastoji od valjka AB duljine 0.5 m, mase 200 dag, i dviju kugli na krajevima valjka. Jedna ima polumjer 30 mm i masu 150 dag, a druga polumjer 60 mm i masu 1200 dag. Nađi težište.

Rezultat: Od središta kugle manjeg polumjera 49.29 cm.

Zadatak 098 (Željko, gimnazija)

Na krajevima 14 cm dugačke poluge drže međusobno ravnotežu dva tijela masa 2 kg i 3.6 kg. Nađi duljine krakova poluge ako njezinu masu zanemarimo.

Rješenje 098

$$d = 14 \text{ cm} = 0.14 \text{ m}, \quad m_1 = 2 \text{ kg}, \quad m_2 = 3.6 \text{ kg}, \quad r_1 = ?, \quad r_2 = ?$$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

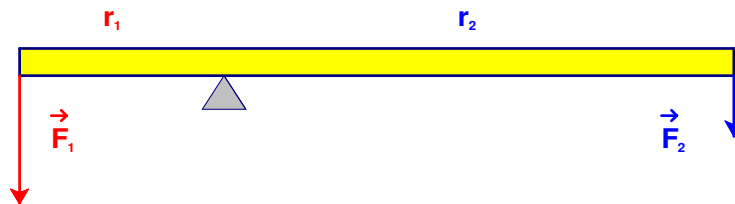
Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

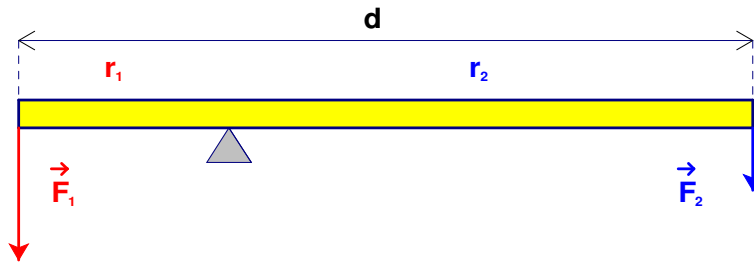
$$G = m \cdot g.$$

Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje zakreću tijelo u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.

Dvostrana poluga je u ravnoteži kad je

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2.$$





Na tijela masa m_1 i m_2 koja vise na krajevima poluge djeluje sila teža. Sa slike vidi se:

$$\left. \begin{array}{l} F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2 \\ d = r_1 + r_2 \\ F_1 = G_1, F_2 = G_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} G_1 \cdot r_1 = G_2 \cdot r_2 \\ r_2 = d - r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow G_1 \cdot r_1 = G_2 \cdot (d - r_1) \Rightarrow G_1 \cdot r_1 = G_2 \cdot d - G_2 \cdot r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_1 \cdot r_1 + G_2 \cdot r_1 = G_2 \cdot d \Rightarrow r_1 \cdot (G_1 + G_2) = G_2 \cdot d \Rightarrow r_1 = \frac{G_2 \cdot d}{G_1 + G_2} \Rightarrow r_1 = \frac{m_2 \cdot g \cdot d}{m_1 \cdot g + m_2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{m_2 \cdot g \cdot d}{g \cdot (m_1 + m_2)} \Rightarrow r_1 = \frac{m_2 \cdot g \cdot d}{g \cdot (m_1 + m_2)} \Rightarrow r_1 = \frac{m_2 \cdot d}{m_1 + m_2} = \frac{3.6 \text{ kg} \cdot 0.14 \text{ m}}{2 \text{ kg} + 3.6 \text{ kg}} = 0.09 \text{ m} = 9 \text{ cm}.$$

Duljine krakova poluge iznose:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = 9 \text{ cm}, d = 14 \text{ cm} \\ d = r_1 + r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow r_2 = d - r_1 = 14 \text{ cm} - 9 \text{ cm} = 5 \text{ cm}.$$

Vježba 098

Na krajevima 1.4 dm dugačke poluge drže međusobno ravnotežu dva tijela masa 200 dag i 360 kg. Nađi duljine krakova poluge ako njezinu masu zanemarimo.

Rezultat: $r_1 = 9 \text{ cm}$, $r_2 = 4 \text{ cm}$.

Zadatak 099 (Valentina, gimnazija)

Sanduk visine 2 m stoji na horizontalnom podu svojim podnožjem dimenzija 1 m · 1 m. S bočne strane na njega puše vjetar i tlači ga 300 N/m². Hoće li vjetar prevrnuti sanduk mase 100 kg? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 099

$$h = 2 \text{ m}, \quad B = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^2 \text{ [površina kvadrata]} \Rightarrow a = 1 \text{ m}, \quad p = 300 \text{ N/m}^2, \\ m = 100 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad M = ?$$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

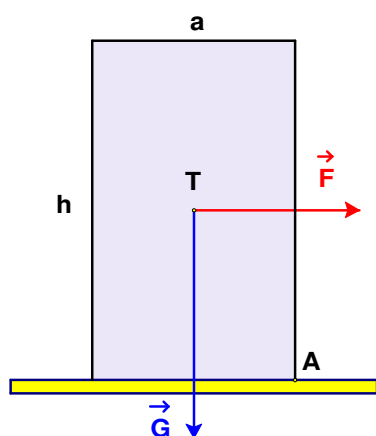
Moment M sile F u odnosu prema osi jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = r \cdot F.$$

Tlak je omjer sile što jednoliko raspoređena djeluje okomito na neku površinu i te površine:

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S.$$

Sa slike vidi se:



Moment sile vjetra F s obzirom na točku A iznosi:

$$\left. \begin{aligned} S &= a \cdot h, & F &= p \cdot S \\ M &= F \cdot \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F &= p \cdot a \cdot h \\ M &= F \cdot \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M = p \cdot a \cdot h \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2} \cdot p \cdot a \cdot h^2 = \frac{1}{2} \cdot 300 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1 \text{ m} \cdot (2 \text{ m})^2 = 600 \text{ Nm}.$$

Moment sile teže G na sanduk s obzirom na točku A iznosi:

$$\left. \begin{aligned} G &= m \cdot g \\ M &= G \cdot \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M = m \cdot g \cdot \frac{a}{2} = 100 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1 \text{ m}}{2} = 490.5 \text{ Nm}.$$

Sanduk će se prevrnuti jer je moment sile vjetra veći od momenta sile teže.

Vježba 099

Sanduk visine 2 m stoji na horizontalnom podu svojim podnožjem dimenzija 1 m · 1 m. S bočne strane na njega puše vjetar i tlači ga 300 N/m². Hoće li vjetar prevrnuti sanduk mase 400 kg?

Rezultat: Sanduk se neće prevrnuti jer je moment sile vjetra manji od momenta sile teže.

Zadatak 100 (Malena, gimnazija)

Na dasci dugačkoj 5 m, mase 40 kg, njišu se dva dječaka od 25 kg i 45 kg. Na kojemu mjestu treba dasku poduprijeti ako dječaci sjede na njezinim krajevima?

Rješenje 100

$$d = 5 \text{ m}, \quad m = 40 \text{ kg}, \quad m_1 = 25 \text{ kg}, \quad m_2 = 45 \text{ kg}, \quad x = ?$$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

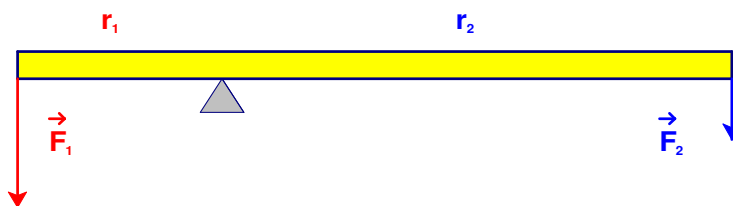
Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

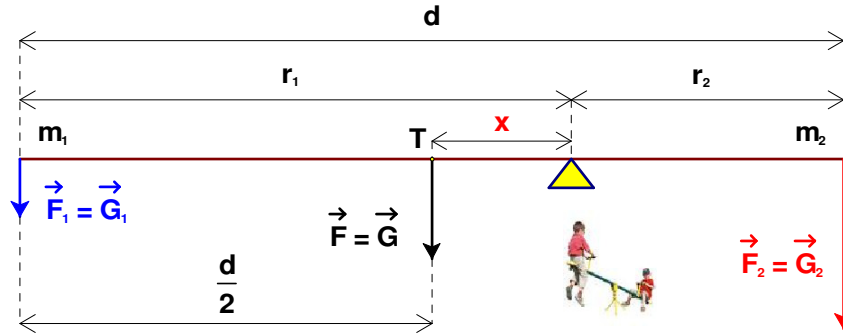
Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje zakreću tijelo u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.

Dvostrana poluga je u ravnoteži kad je

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2.$$



Na dasku mase m i na dječake masa m₁ i m₂ djeluje sila teža. Sa slike vidi se:



$$\left. \begin{array}{l} F_1 = G_1, F = G, F_2 = G_2 \\ r_1 + r_2 = d, r_1 = \frac{d}{2} + x, r_2 = \frac{d}{2} - x \\ F_1 \cdot r_1 + F \cdot x = F_2 \cdot r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow G_1 \cdot \left(\frac{d}{2} + x \right) + G \cdot x = G_2 \cdot \left(\frac{d}{2} - x \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_1 \cdot \frac{d}{2} + G_1 \cdot x + G \cdot x = G_2 \cdot \frac{d}{2} - G_2 \cdot x \Rightarrow G_1 \cdot x + G \cdot x + G_2 \cdot x = G_2 \cdot \frac{d}{2} - G_1 \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (G_1 + G + G_2) = \frac{d}{2} \cdot (G_2 - G_1) \Rightarrow x = \frac{\frac{d}{2} \cdot (G_2 - G_1)}{G_1 + G + G_2} \Rightarrow x = \frac{\frac{d}{2} \cdot (m_2 \cdot g - m_1 \cdot g)}{m_1 \cdot g + m \cdot g + m_2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{d}{2} \cdot g \cdot (m_2 - m_1)}{g \cdot (m_1 + m + m_2)} \Rightarrow x = \frac{\frac{d}{2} \cdot g \cdot (m_2 - m_1)}{g \cdot (m_1 + m + m_2)} \Rightarrow x = \frac{\frac{d}{2} \cdot (m_2 - m_1)}{m_1 + m + m_2} = \frac{5 \text{ m}}{2} \cdot \frac{(45 \text{ kg} - 25 \text{ kg})}{25 \text{ kg} + 40 \text{ kg} + 45 \text{ kg}} = 0.45 \text{ m}.$$

Daska je poduprta 0.45 m daleko od težišta T daske prema kraju gdje sjedi teži dječak.

Vježba 100

Na dasci dugačkoj 500 cm, mase 40 kg, njišu se dva dječaka od 25 kg i 45 kg. Na kojemu mjestu treba dasku poduprijeti ako dječaci sjede na njezinim krajevima?

Rezultat: Daska je poduprta 0.45 m daleko od težišta T daske prema kraju gdje sjedi teži dječak.