

Zadatak 061 (Mala sirena, gimnazija)

Uteg mase 1 kg visi na niti koju smo iz vertikalnog položaja otklonili za kut $\alpha = 30^\circ$. Nađi napetost niti kad smo uteg ispustili te on prolazi položajem ravnoteže. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 061

$$m = 1 \text{ kg}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_N = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice i gdje je r polumjer kružnice.

Promatramo neko tijelo s obzirom na koordinatni sustav koji jednoliko rotira. Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Sa slike vidi se:

$$l = l \cdot \cos \alpha + h \Rightarrow h = l - l \cdot \cos \alpha \Rightarrow h = l \cdot (1 - \cos \alpha).$$

Nit napinje težina utega G i centrifugalna sila F_{cf} koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i kamen zajedno kruže. Kad uteg prođe vertikalnim položajem ukupna sila (napetost niti) F_N jest

$$F_N = G + F_{cf} \Rightarrow F_N = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{l}.$$

Budući da uteg sa visine h dolazi u vertikalni položaj,

njegova brzina iznosi (slobodan pad):

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

Zato je napetost niti F_N jednaka:

$$\left. \begin{array}{l} F_N = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{l} \\ v^2 = 2 \cdot g \cdot h, \quad h = l \cdot (1 - \cos \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_N = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{l} \\ v^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow F_N = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = m \cdot g + 2 \cdot m \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha) \Rightarrow F_N = m \cdot g + 2 \cdot m \cdot g - 2 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_N = 3 \cdot m \cdot g - 2 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot (3 - 2 \cdot \cos \alpha) = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3 - 2 \cdot \cos 30^\circ) = 12.44 \text{ N}.$$

Vježba 061

Uteg mase 2 kg visi na niti koju smo iz vertikalnog položaja otklonili za kut $\alpha = 30^\circ$. Nađi napetost niti kad smo uteg ispustili te on prolazi položajem ravnoteže. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 24.88 N.

Zadatak 062 (Mala sirena, gimnazija)

Čelična žica podnese najveći teret 300 kg. Na žici visi uteg mase 150 kg. Do kojega najvećeg kuta možemo otkloniti uteg na žici da bi žica izdržala?

Rješenje 062

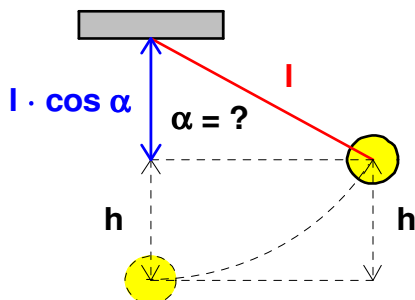
$$m = 300 \text{ kg}, \quad m_u = 150 \text{ kg}, \quad \alpha = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice i gdje je r polumjer kružnice..

Promatramo neko tijelo s obzirom na koordinatni sustav koji jednoliko rotira. Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.



Sa slike vidi se:

$$l = l \cdot \cos \alpha + h \Rightarrow h = l - l \cdot \cos \alpha \Rightarrow h = l \cdot (1 - \cos \alpha).$$

Nit napinje težina utega G i centrifugalna sila F_{cf} koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže. Kad uteg prođe vertikalnim položajem ukupna sila (napetost niti) F_N jest:

$$F_N = G + F_{cf} \Rightarrow F_N = m_u \cdot g + m_u \cdot \frac{v^2}{l}.$$

Budući da uteg sa visine h dolazi u vertikalni položaj,

njegova brzina iznosi (slobodan pad):

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

Zato je napetost niti F_N jednaka:

$$\left. \begin{array}{l} F_N = m_u \cdot g + m_u \cdot \frac{v^2}{l} \\ v^2 = 2 \cdot g \cdot h, \quad h = l \cdot (1 - \cos \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_N = m_u \cdot g + m_u \cdot \frac{v^2}{l} \\ v^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow F_N = m_u \cdot g + m_u \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = m_u \cdot g + 2 \cdot m_u \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha) \Rightarrow F_N = m_u \cdot g + 2 \cdot m_u \cdot g - 2 \cdot m_u \cdot g \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = m_u \cdot g \cdot (3 - 2 \cdot \cos \alpha).$$

Budući da čelična žica može podnijeti najveći teret mase m , maksimalna napetost žice iznosit će

$$F_N = m \cdot g.$$

Najveći kut do kojeg možemo otkloniti uteg na žici ima vrijednost:

$$\left. \begin{array}{l} F_N = m_u \cdot g \cdot (3 - 2 \cdot \cos \alpha) \\ F_N = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow m \cdot g = m_u \cdot g \cdot (3 - 2 \cdot \cos \alpha) \quad /:g \Rightarrow m = m_u \cdot (3 - 2 \cdot \cos \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 3 \cdot m_u - 2 \cdot m_u \cdot \cos \alpha \Rightarrow m = 3 \cdot m_u - 2 \cdot m_u \cdot \cos \alpha \Rightarrow 2 \cdot m_u \cdot \cos \alpha = 3 \cdot m_u - m \quad /: \frac{1}{2 \cdot m_u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3 \cdot m_u - m}{2 \cdot m_u} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{3 \cdot m_u - m}{2 \cdot m_u} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{3 \cdot 150 \text{ kg} - 300 \text{ kg}}{2 \cdot 150 \text{ kg}} \right) = 60^\circ.$$

Vježba 062

Čelična žica podnese najveći teret 600 kg. Na žici visi uteg mase 300 kg. Do kojega najvećeg kuta možemo otkloniti uteg na žici da bi žica izdržala?

Rezultat: 60° .

Zadatak 063 (Mala sirena, gimnazija)

Na niti duljine l visi uteg od 1 kg. Na koju visinu treba iz položaja ravnoteže otkloniti nit da bi uteg u položaju ravnoteže natezao nit silom 15 N? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

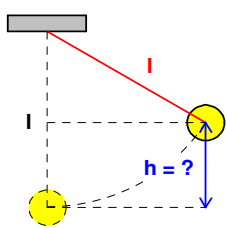
Rješenje 063

$$l, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad F_N = 15 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice i gdje je r polumjer kružnice..



Promatramo neko tijelo s obzirom na koordinatni sustav koji jednoliko rotira. Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Nit napinje težina utega G i centrifugalna sila F_{cf} koja djeluje na uteg.

Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže. Kad uteg prođe vertikalnim položajem ukupna sila (napetost niti) F_N jest:

$$F_N = G + F_{cf} \Rightarrow F_N = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{l}$$

Budući da uteg sa visine h dolazi u vertikalni položaj (položaj ravnoteže), njegova brzina iznosi (slobodan pad):

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

Zato je visina h jednaka:

$$\left. \begin{aligned} F_N &= m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{l} \\ v^2 &= 2 \cdot g \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_N = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{l} \cdot l \Rightarrow l \cdot F_N = m \cdot g \cdot l + 2 \cdot m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot h = l \cdot F_N - m \cdot g \cdot l \cdot \frac{1}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{l \cdot F_N - m \cdot g \cdot l}{2 \cdot m \cdot g} = \frac{15 \cdot l - 1 \cdot 9.81 \cdot l}{2 \cdot 1 \cdot 9.81} = \frac{15 - 9.81}{19.62} \cdot l = 0.26 \cdot l$$

Vježba 063

Na niti duljine 10 m visi uteg od 1 kg. Na koju visinu treba iz položaja ravnoteže otkloniti nit da bi uteg u položaju ravnoteže natezao nit silom 15 N? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 2.6 m.

Zadatak 064 (Zozo, gimnazija)

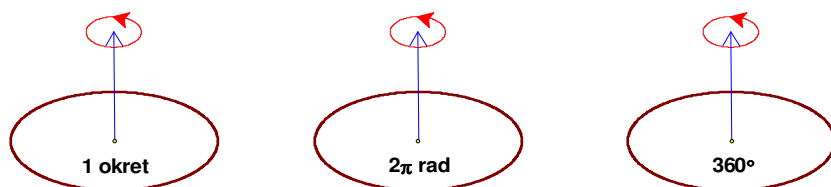
Izrazi:

- 30 okreta radijanima
- 84π radijana okretima
- 50 okr/s u rad/s
- 2100 okr/min u rad/s
- 2 rad/s u °/s (stupnjevim u sekundi)

Rješenje 064

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Ako se tijelo jednom okrene oko čvrste osi kažemo da je načinilo jedan okret ili " opisalo kut 2π rad ili 360° ". Vrijedi:

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$



a) $1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad}$

$$30 \text{ okreta} = 30 \cdot 2\pi \text{ rad} = 60\pi \text{ rad}.$$

b) $2\pi \text{ rad} = 1 \text{ okret}$

$$84\pi \text{ rad} = \frac{84\pi \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \cdot 1 \text{ okret} = 42 \text{ okreta}.$$

c) $1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad}$

$$50 \frac{\text{okr}}{\text{s}} = 50 \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

d) $1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad}$

$$2100 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 2100 \frac{\text{okr}}{60 \text{ s}} = 35 \frac{\text{okr}}{\text{s}} = 35 \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 70\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

e) $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$

$$2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 115^\circ.$$

Vježba 064

Izrazi: 60 okreta radijanima.

Rezultat: $120\pi \text{ rad}$.

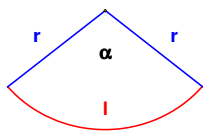
Zadatak 065 (Valentina, gimnazija)

Kuglica koja visi na niti duljine 50 cm opisala je luk 20 cm. Nađi pripadni kut α , izražen u radijanima i stupnjevima, što ga je opisala nit njihala.

Rješenje 065

$$r = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}, \quad l = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad \alpha = ?$$

Ako kuglica opiše veći luk l , pripadni kut α bit će veći. Znači da su te dvije veličine proporcionalne, razmjerne. Kada bi kuglica opisala puni kut 360° , duljina luka l bila bi jednaka opsegu kruga, $2 \cdot r \cdot \pi$. Stoga možemo postaviti razmjer:



$$\alpha : l = 360^\circ : (2 \cdot r \cdot \pi) \Rightarrow \alpha \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = l \cdot 360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{l \cdot 360^\circ}{2 \cdot r \cdot \pi} \Rightarrow \alpha = \frac{l \cdot 180^\circ}{r \cdot \pi} = \frac{0.2 \text{ m} \cdot 180^\circ}{0.5 \text{ m} \cdot \pi} = 22^\circ 55'.$$

U radijanima kut α iznosi:

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 22^\circ 55' = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \left(22 + \frac{55}{60}\right)^\circ = 0.4 \text{ rad}.$$

Vježba 065

Kuglica koja visi na niti duljine 100 cm opisala je luk 40 cm. Nađi pripadni kut α , izražen u radijanima i stupnjevima, što ga je opisala nit njihala.

Rezultat: $22^\circ 55'$, 0.4 rad .

Zadatak 066 (Vesna, gimnazija)

Kotač bicikla ima polumjer 36 cm. Kojom se brzinom kreće biciklist ako kotač učini 120 okreta u minuti?

Rješenje 066

$$r = 36 \text{ cm} = 0.36 \text{ m}, \quad n = 120 \text{ okreta}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad v = ?$$

U svakoj minuti prijeđe svaka točka kotača bicikla

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi = 120 \cdot 2 \cdot \pi = 240 \cdot \pi \text{ rad},$$

gdje je 2π kut jednog okreta kotača izražen u radijanima. Budući da je kutna brzina svake točke na kotaču

$$\omega = \frac{\varphi}{t},$$

obodna brzina je jednaka:



$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{\varphi}{t} \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow v = r \cdot \frac{\varphi}{t} = 0.36 \text{ m} \cdot \frac{240 \cdot \pi}{60 \text{ s}} = 4.52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vježba 066

Kotač bicikla ima polumjer 36 cm. Kojom se brzinom kreće biciklist ako kotač učini 240 okreta u 2 minute?

Rezultat: $4.52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zadatak 067 (Ivan, gimnazija)

Na horizontalnoj ploči, koja se može okretati oko vertikalne osi, miruje tijelo na udaljenosti 2 m od središta ploče. Ploča se počinje okretati tako da joj brzina postupno raste. Koeficijent trenja između tijela i ploče iznosi 0.25. Odredi kutnu brzinu kojom se mora ploča okretati da bi tijelo upravo počelo klizati s ploče. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 067

$$r = 2 \text{ m}, \quad \mu = 0.25, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \omega = ?$$

Između obodne brzine v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega.$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

Budući da je trenje sila koja prisiljava tijelo da ne klizi s ploče koja se okreće oko vertikalne osi, slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} F_{cp} = F_{tr} \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot \frac{v^2}{r} = \mu \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{r}{m} \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v^2 = \mu \cdot g \cdot r \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow (r \cdot \omega)^2 = \mu \cdot g \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \cdot \omega^2 = \mu \cdot g \cdot r \quad / \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{\mu \cdot g}{r} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{r}} = \sqrt{\frac{0.25 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ m}}} = 1.11 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Vježba 067

Na horizontalnoj ploči, koja se može okretati oko vertikalne osi, miruje tijelo na udaljenosti 4 m od središta ploče. Ploča se počinje okretati tako da joj brzina postupno raste. Koeficijent trenja između tijela i ploče iznosi 0.5. Odredi kutnu brzinu kojom se mora ploča okretati da bi tijelo upravo počelo klizati s ploče. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

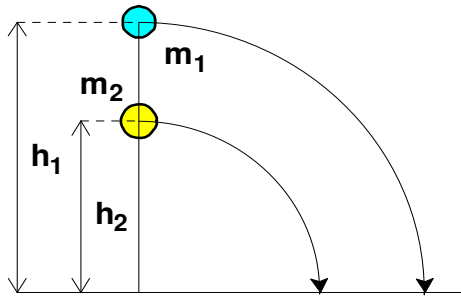
Rezultat: $1.11 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Zadatak 068 (Ivan, gimnazija)

Na površini Zemlje učvršćen je pomoću šarke lagani štاپ duljine h_1 u vertikalnom položaju. Na njemu su učvršćene dvije kugle mase m_1 i m_2 . Kugla mase m_1 nalazi se na gornjem kraju štapa, a kugla mase m_2 na udaljenosti h_2 od donjeg kraja štapa. Masu štapa možemo zanemariti u odnosu prema masi kugala. Kolika je brzina kugle mase m_1 kad padne na Zemlju ako je štاپ počeo padati brzinom 0?

Rješenje 068

$$h_1, \quad m_1, \quad m_2, \quad h_2, \quad v = 0, \quad v_1 = ?$$



Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Budući da je kugla mase m_1 na visini h_1 , a kugla mase m_2 na visini h_2 , njihove gravitacijske potencijalne energije iznose:

$$E_{gp1} = m_1 \cdot g \cdot h_1 \quad , \quad E_{gp2} = m_2 \cdot g \cdot h_2.$$

Kada štap padne na zemlju kugle će imati kinetičke energije:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 \quad , \quad E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2.$$

Zbog zakona održanja energije vrijedi:

$$E_{k1} + E_{k2} = E_{gp1} + E_{gp2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = m_1 \cdot g \cdot h_1 + m_2 \cdot g \cdot h_2.$$

Budući da kugle imaju jednake kutne brzine (pri rotaciji tijela sve čestice koje se gibaju imaju jednake kutne brzine), vrijedi:

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \frac{v_1}{h_1} = \frac{v_2}{h_2} \Rightarrow v_2 = \frac{h_2}{h_1} \cdot v_1.$$

Brzina kugle mase m_1 kad padne na zemlju iznosi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 &= m_1 \cdot g \cdot h_1 + m_2 \cdot g \cdot h_2 \quad / \cdot 2 \\ v_2 &= \frac{h_2}{h_1} \cdot v_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 &= 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot h_1 + 2 \cdot m_2 \cdot g \cdot h_2 \\ v_2 &= \frac{h_2}{h_1} \cdot v_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1} \cdot v_1 \right)^2 = 2 \cdot g \cdot (m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2) \Rightarrow m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \cdot v_1^2 = 2 \cdot g \cdot (m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^2 \cdot \left(m_1 + m_2 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \right) = 2 \cdot g \cdot (m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2) \Rightarrow v_1^2 = \frac{2 \cdot g \cdot (m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2)}{m_1 + m_2 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2)}{m_1 + m_2 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2}}.$$

Vježba 068

Na površini Zemlje učvršćen je pomoću šarke lagani štap duljine h_1 u vertikalnom položaju. Na njemu su učvršćene dvije kugle mase m_1 i m_2 . Kugla mase m_1 nalazi se na gornjem kraju štapa, a kugla mase m_2 na udaljenosti h_2 od donjeg kraja štapa. Masu štapa možemo zanemariti u odnosu prema masi kugala. Kolika je brzina kugle mase m_2 kad padne na Zemlju ako je štap počeo padati brzinom 0?

Rezultat:
$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2)}{m_1 \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + m_2}}$$

Zadatak 069 (Mario, gimnazija)

Kotač zamašnjak jednoliko povećava brzinu okretaja te nakon 10 sekundi ima 720 okreta u minuti. Izračunaj kutnu akceleraciju i linearnu akceleraciju točke koja je 1 m udaljena od središta zamašnjaka.

Rješenje 069

$$t = 10 \text{ s}, \quad n = 720 \text{ okreta}, \quad t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad r = 1 \text{ m}, \quad \alpha = ?, \quad a = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Ako se tijelo jednom okrene oko čvrste osi kažemo da je načinilo jedan okret ili " opisalo kut 2π rad ili 360° ". Vrijedi:

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Kut φ koji zamašnjak opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi$$

Budući da je kut φ opisan za vrijeme t_1 , kutna brzina ω glasi:

$$\omega = \frac{\varphi}{t_1} \Rightarrow \omega = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{t_1}$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko ubrzano gibanje			
Bez početne brzine		Bez početne kutne brzine	
$v = a \cdot t$		$\omega = \alpha \cdot t$	

Za kutnu akceleraciju α vrijedi izraz:

$$\alpha = \frac{\omega}{t}$$

Kutna akceleracija α točke na zamašnjaku je:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{t_1} \\ \alpha = \frac{\omega}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{t_1}}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{t \cdot t_1} = \frac{720 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}}{10 \text{ s} \cdot 60 \text{ s}} = 2.4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Za linearnu ili obodnu akceleraciju a vrijedi:

$$a = r \cdot \alpha = 1 \text{ m} \cdot 2.4 \cdot \pi \frac{1}{\text{s}^2} = 7.54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Vježba 069

Kotač zamašnjak jednoliko povećava brzinu okretaja te nakon 10 sekundi ima 1440 okreta u 2 minute. Izračunaj kutnu akceleraciju i linearnu akceleraciju točke koja je 100 cm udaljena od središta zamašnjaka.

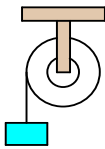
Rezultat: $2.4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, $7.54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Zadatak 070 (Ivan, gimnazija)

Oko nepomične koloture polumjera 20 cm namotana je nit na kojoj visi uteg. Utteg najprije miruje, a onda počinje padati akceleracijom 2 cm/s^2 pri čemu se nit odmotava. Nađi kutnu brzinu koloture u času kad je uteg prešao put 100 cm.

Rješenje 070

$$r = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad a = 2 \text{ cm/s}^2 = 0.02 \text{ m/s}^2, \quad s = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}, \quad \omega = ?$$



Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje pri kojemu vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su v i s , brzina odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Između obodne brzine v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega.$$

Kutna brzina koloture iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v^2 = 2 \cdot a \cdot s \quad / \sqrt{\quad} \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} \\ \omega = \frac{v}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{2 \cdot a \cdot s}}{r} = \frac{\sqrt{2 \cdot 0.02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m}}}{0.2 \text{ m}} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Vježba 070

Oko nepomične koloture polumjera 40 cm namotana je nit na kojoj visi uteg. Utteg najprije miruje, a onda počinje padati akceleracijom 2 cm/s^2 pri čemu se nit odmotava. Nađi kutnu brzinu koloture u času kad je uteg prešao put 4 m.

Rezultat: $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Zadatak 071 (Ana, srednja škola)

Kotač se vrti stalnom akceleracijom 8 rad/s^2 . Koliko okreta učini u 5 s?

Rješenje 071

$$\alpha = 8 \text{ rad/s}^2, \quad t = 5 \text{ s}, \quad n = ?$$

Kut φ koji kotač opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu. Za opisani kut φ vrijedi izraz:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2.$$

Broj okreta n kotača iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = n \cdot 2 \cdot \pi \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow n \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow n = \frac{\alpha \cdot t^2}{4 \cdot \pi} = \frac{8 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot (5 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi} = 15.915 \approx 16 \text{ okreta}.$$

Vježba 071

Kotač se vrti stalnom akceleracijom 16 rad/s^2 . Koliko okreta učini u 5 s?

Rezultat: 32 okreta.

Zadatak 072 (Petra, gimnazija)

Kotač zamašnjak okreće se brzinom 98 okr/min. Dvije minute pošto je isključen stroj koji ga je pokrenuo kotač se zaustavio. Izračunaj kojom se kutnom akceleracijom zaustavljao kotač i koliko je okreta učinio za vrijeme zaustavljanja. Pretpostavimo da je zaustavljanje bilo jednoliko usporeno.

Rješenje 072

$$\omega_0 = 98 \text{ okr/min} = 98 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad/60 s} = 49 \cdot \pi \text{ rad/15 s}, \quad t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}, \quad \omega = 0 \text{ rad/s},$$
$$\alpha = ?, \quad n = ?$$

Kut φ koji kotač zamašnjak opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
put	s	kut	φ
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko usporeno gibanje			
Početna brzina v_0		Početna kutna brzina ω_0	
$v = v_0 - a \cdot t$		$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t$	
$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s$		$\omega^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$	
$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$		$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t$	

Za kutnu brzinu ω pri jednoliko usporenoj rotaciji vrijedi izraz:

$$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t.$$

Kutna akceleracija α kojom se zaustavlja kotač zamašnjak iznosi:

$$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_0 - \omega \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{49 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{120 \text{ s}} = 0.0855 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Izvodimo formulu za opisani kut φ :

$$\left. \begin{array}{l} \omega^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \\ \omega = \omega_0 - \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot \alpha \cdot \varphi = \omega_0^2 - \omega^2 \\ \alpha \cdot t = \omega_0 - \omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot \alpha \cdot \varphi}{\alpha \cdot t} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0 - \omega} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{u brojniku je} \\ \text{razlika kvadrata} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot \varphi}{t} = \frac{(\omega_0 - \omega) \cdot (\omega_0 + \omega)}{\omega_0 - \omega} \Rightarrow \frac{2 \cdot \varphi}{t} = \omega_0 + \omega \quad / \cdot \frac{t}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{(\omega_0 + \omega) \cdot t}{2}.$$

Broj okreta n kotača zamašnjaka za vrijeme zaustavljanja iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = n \cdot 2 \cdot \pi \\ \varphi = \frac{(\omega_0 + \omega) \cdot t}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow n \cdot 2 \cdot \pi = \frac{(\omega_0 + \omega) \cdot t}{2} \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow n = \frac{(\omega_0 + \omega) \cdot t}{4 \cdot \pi} =$$
$$= \frac{\left(\frac{49 \cdot \pi \text{ rad}}{15 \text{ s}} + 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \cdot 120 \text{ s}}{4 \cdot \pi} = 98 \text{ okreta.}$$

Vježba 072

Kotač zamašnjak okreće se brzinom 196 okr/min. Četiri minute pošto je isključen stroj koji ga je pokrenuo kotač se zaustavio. Izračunaj kojom se kutnom akceleracijom zaustavljao kotač i koliko je okreta učinio za vrijeme zaustavljanja. Pretpostavimo da je zaustavljanje bilo jednoliko usporeno.

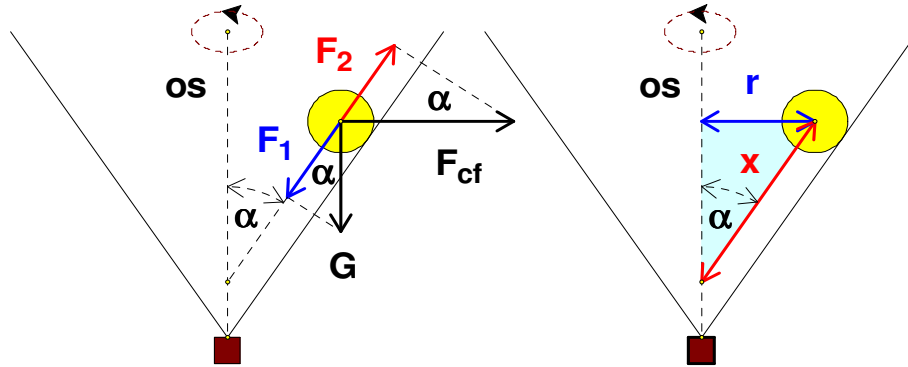
Rezultat: $0.0855 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, 196 okreta.

Zadatak 073 (Tony, student)

Žlijeb rotira stalnom kutnom brzinom 30 okr/min oko vertikalne osi. Nagibni kut između žlijeba i vertikalne osi je 45° . Na kojoj će udaljenosti od donjeg kraja žlijeba mala kuglica biti u ravnoteži ako ona rotira zajedno sa žlijebom? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 073

$$\omega = 30 \text{ okr/min} = 30 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}/60 \text{ s} = \pi \text{ rad/s}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad x = ?$$



Na kuglicu djeluju sila teža $G = m \cdot g$ i centrifugalna sila $F_{cf} = m \cdot r \cdot \omega^2$. Budući da je kuglica u ravnoteži (ne kotrlja se po žlijebu), slijedi da su tangencijalne komponente sile teže i centrifugalne sile jednake po iznosu, a suprotnih smjerova.

- Tangencijalna komponenta sile teže G iznosi:

$$\cos \alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow F_1 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

- Tangencijalna komponenta centrifugalne sile F_{cf} iznosi:

$$\sin \alpha = \frac{F_2}{F_{cf}} \Rightarrow F_2 = F_{cf} \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha.$$

Zato slijedi:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow m \cdot g \cdot \cos \alpha = m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{m \cdot \cos \alpha} \Rightarrow g = r \cdot \omega^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow g = r \cdot \omega^2 \cdot \text{tg } \alpha.$$

Sa slike vidi se (iz pravokutnog trokuta):

$$\sin \alpha = \frac{r}{x} \Rightarrow r = x \cdot \sin \alpha.$$

Računamo udaljenost x :

$$\left. \begin{array}{l} g = r \cdot \omega^2 \cdot \text{tg } \alpha \\ r = x \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow g = x \cdot \sin \alpha \cdot \omega^2 \cdot \text{tg } \alpha \Rightarrow x = \frac{g}{\omega^2 \cdot \sin \alpha \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\left(\pi \frac{1}{\text{s}}\right)^2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \text{tg } 45^\circ} = 1.406 \text{ m}.$$

Vježba 073

Žlijeb rotira stalnom kutnom brzinom 60 okreta u 2 minute oko vertikalne osi. Nagibni kut između žlijeba i vertikalne osi je 45° . Na kojoj će udaljenosti od donjeg kraja žlijeba mala kuglica biti u ravnoteži ako ona rotira zajedno sa žlijebom? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.406 m.

Zadatak 074 (Ivona, gimnazija)

Za uže, duljine 70 cm, vezano je tijelo mase 500 g. Kolikom najvećom kutnom brzinom smije rotirati tijelo u horizontalnoj ravnini pod uvjetom da uže ne pukne? Nit može izdržati najveću silu 20 N.

Rješenje 074

$$r = 70 \text{ cm} = 0.7 \text{ m}, \quad m = 500 \text{ g} = 0.5 \text{ kg}, \quad F_{\max} = 20 \text{ N}, \quad \omega = ?$$

Budući da tijelo rotira u horizontalnoj ravnini, uže zateže samo centrifugalna sila

$$F_{cf} = m \cdot r \cdot \omega^2.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\begin{aligned} F_{cf} = F_{\max} &\Rightarrow m \cdot r \cdot \omega^2 = F_{\max} \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{F_{\max}}{m \cdot r} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F_{\max}}{m \cdot r}} = \\ &= \sqrt{\frac{20 \text{ N}}{0.5 \text{ kg} \cdot 0.7 \text{ m}}} = 7.56 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Vježba 074

Za uže, duljine 70 cm, vezano je tijelo mase 1000 g. Kolikom najvećom kutnom brzinom smije rotirati tijelo u horizontalnoj ravnini pod uvjetom da uže ne pukne? Nit može izdržati najveću silu 40 N.

Rezultat: $7.56 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Zadatak 075 (Zlata, Vesna, srednja škola)

Preko kolutura (Atwoodova padostroja) u obliku diska mase 300 g i polumjera 10 cm prebačena je tanka čelična žica na čijim krajevima vise utezi mase 0.18 kg i 0.22 kg. Izračunajte akceleraciju utega i napetosti niti. Zanimajte masu žice te trenje u osovini kolutura. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 075

$$m = 300 \text{ g} = 0.3 \text{ kg}, \quad r = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad m_1 = 0.18 \text{ kg}, \quad m_2 = 0.22 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$
$$a = ?, \quad N_1 = ?, \quad N_2 = ?$$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = r \cdot F.$$

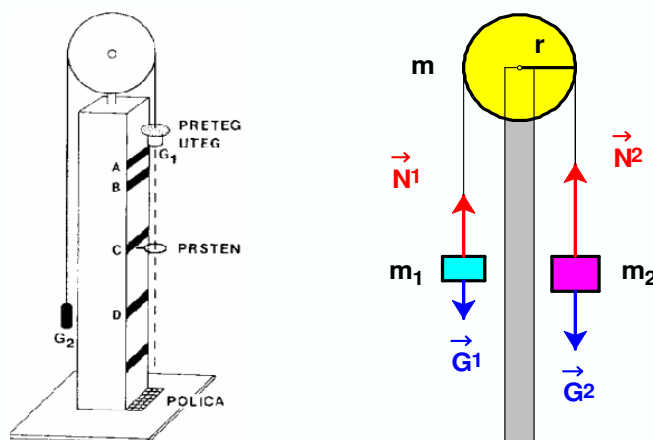
Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije glasi:

$$M = \alpha \cdot I \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I},$$

tj. kutna akceleracija rotacije proporcionalna je s momentom sile koja zakreće tijelo, a obrnuto proporcionalna s momentom tromosti I tijela s obzirom na os rotacije.

Moment tromosti kružne ploče polumjera r s obzirom na os koja prolazi okomito na ploču njezinim središtem je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$



Prema uvjetu zadatka masa kolotura je zadana pa napetosti niti N_1 i N_2 nisu jednake:

$$N_1 \neq N_2.$$

Uteg manje mase m_1 gibat će se jednoliko ubrzano nagore pod djelovanjem rezultantne sile:

$$F_1 = N_1 - G_1 \Rightarrow F_1 = N_1 - m_1 \cdot g.$$

Uteg veće mase m_2 gibat će se jednoliko ubrzano nadolje pod djelovanjem rezultantne sile:

$$F_2 = G_2 - N_2 \Rightarrow F_2 = m_2 \cdot g - N_2.$$

Prema drugom Newtonovom poučku možemo pisati:

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = m_1 \cdot a \\ F_2 = m_2 \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m_1 \cdot a = N_1 - m_1 \cdot g \\ m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - N_2 \end{array} \right\}.$$

Budući da na kolotur djeluje moment sile

$$M = (N_2 - N_1) \cdot r$$

daje mu kutnu akceleraciju

$$\alpha = \frac{a}{r}.$$

Iz osnovne jednačbe rotacije slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} M = (N_2 - N_1) \cdot r, \quad M = I \cdot \alpha \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2, \quad \alpha = \frac{a}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (N_2 - N_1) \cdot r = M = I \cdot \alpha \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2, \quad \alpha = \frac{a}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow (N_2 - N_1) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{a}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (N_2 - N_1) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r \cdot a \quad /: r \Rightarrow N_2 - N_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a.$$

Akceleracija a utega dobije se iz sustava jednačbi:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot a = N_1 - m_1 \cdot g \\ m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - N_2 \\ N_2 - N_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N_1 = m_1 \cdot a + m_1 \cdot g \\ N_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a \\ N_2 - N_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a \quad /: 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N_1 = m_1 \cdot a + m_1 \cdot g \\ N_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a \\ 2 \cdot (N_2 - N_1) = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N_1 = m_1 \cdot a + m_1 \cdot g \\ N_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a \\ m \cdot a = 2 \cdot (N_2 - N_1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot a = 2 \cdot (m_2 \cdot g - m_2 \cdot a - m_1 \cdot a - m_1 \cdot g) \Rightarrow m \cdot a = 2 \cdot m_2 \cdot g - 2 \cdot m_2 \cdot a - 2 \cdot m_1 \cdot a - 2 \cdot m_1 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot a + 2 \cdot m_2 \cdot a + 2 \cdot m_1 \cdot a = 2 \cdot g \cdot (m_2 - m_1) \Rightarrow a \cdot (2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + m) = 2 \cdot g \cdot (m_2 - m_1) \quad /: 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot \left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2} \right) = g \cdot (m_2 - m_1) \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \cdot g = \frac{0.22 \text{ kg} - 0.18 \text{ kg}}{0.18 \text{ kg} + 0.22 \text{ kg} + \frac{0.3 \text{ kg}}{2}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.713 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Napetosti niti iznose:

$$\bullet \left. \begin{array}{l} a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \cdot g \\ N_1 = m_1 \cdot a + m_1 \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow N_1 = m_1 \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \cdot g + m_1 \cdot g \Rightarrow N_1 = m_1 \cdot g \cdot \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} + 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 = m_1 \cdot g \cdot \frac{m_2 - m_1 + m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \Rightarrow N_1 = m_1 \cdot g \cdot \frac{2 \cdot m_2 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} =$$

$$= 0.18 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{2 \cdot 0.22 \text{ kg} + \frac{0.3 \text{ kg}}{2}}{0.18 \text{ kg} + 0.22 \text{ kg} + \frac{0.3 \text{ kg}}{2}} = 1.894 \text{ N}.$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \cdot g \\ N_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow N_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \cdot g \Rightarrow N_2 = m_2 \cdot g \cdot \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2 = m_1 \cdot g \cdot \frac{m_1 + m_2 + \frac{m}{2} - m_2 + m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \Rightarrow N_2 = m_2 \cdot g \cdot \frac{2 \cdot m_1 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} =$$

$$= 0.22 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{2 \cdot 0.18 \text{ kg} + \frac{0.3 \text{ kg}}{2}}{0.18 \text{ kg} + 0.22 \text{ kg} + \frac{0.3 \text{ kg}}{2}} = 2.0 \text{ N}.$$

Vježba 075

Preko kolotura (Atwoodova padostroja) u obliku diska mase 600 g i polumjera 10 cm prebačena je tanka čelična žica na čijim krajevima vise utezi mase 0.36 kg i 0.44 kg. Izračunajte akceleraciju utega. Zanimarite masu žice te trenje u osovine kolotura. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $0.713 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Zadatak 076 (Martina, gimnazija)

Na kotač polumjera 0.72 m, momenta tromosti $4.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, djeluje tangencijalno na rub stalna sila 10 N. Nađi:

- kutnu akceleraciju,
- kutnu brzinu na kraju četvrte sekunde,
- broj okreta za vrijeme te četiri sekunde,
- Pokaži da je rad koji moramo uložiti u rotaciju kotača jednak kinetičkoj energiji koju kotač ima na kraju četvrte sekunde.

Rješenje 076

$r = 0.72 \text{ m}$, $I = 4.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $F = 10 \text{ N}$, $t = 4 \text{ s}$, $\alpha = ?$, $\omega_4 = ?$, $n = ?$,
 $W = E_k = ?$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I},$$

tj. kutna akceleracija rotacije α proporcionalna je s momentom sile M koja zakreće tijelo, a obrnuto proporcionalna s momentom tromosti I tijela s obzirom na os rotacije.

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Kut φ koji kotač opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi.$$

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
put	s	kut	φ
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α

Jednoliko ubrzano gibanje bez početne brzine	
$v = a \cdot t$	$\omega = \alpha \cdot t$
$v^2 = 2 \cdot a \cdot s$	$\omega^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$
$s = \frac{v}{2} \cdot t$	$\varphi = \frac{\omega}{2} \cdot t$
$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$
Analogija za silu	
$F = m \cdot a$	$M = I \cdot \alpha$
Analogija za rad	
$W = F \cdot s$	$W = M \cdot \varphi$
Analogija za kinetičku energiju	
$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$

a) Kutna akceleracija iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ M = F \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot I = F \cdot r \Rightarrow \alpha = \frac{F \cdot r}{I} = \frac{10 \text{ N} \cdot 0.72 \text{ m}}{4.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 1.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

b) Kutna brzina na kraju četvrte sekunde je:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \alpha \cdot t \\ \alpha = \frac{F \cdot r}{I} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{F \cdot r}{I} \cdot t = \frac{10 \text{ N} \cdot 0.72 \text{ m}}{4.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \cdot 4 \text{ s} = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

c) Broj okreta za vrijeme četiri sekunde iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = n \cdot 2 \cdot \pi, \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ \alpha = \frac{F \cdot r}{I} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ \alpha = \frac{F \cdot r}{I} \end{array} \right\} \Rightarrow n \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot r}{I} \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{F \cdot r \cdot t^2}{4 \cdot \pi \cdot I} = \frac{10 \text{ N} \cdot 0.72 \text{ m} \cdot (4 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi \cdot 4.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 1.91 \text{ okreta} \approx 2 \text{ okreta}.$$

d) Pokazat ćemo da je rad uložen u rotaciju kotača jednak kinetičkoj energiji kotača:

- rad

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{F \cdot r}{I}, \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ M = F \cdot r, W = M \cdot \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot r}{I} \cdot t^2 \\ W = F \cdot r \cdot \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow W = F \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot r}{I} \cdot t^2 \Rightarrow W = \frac{(F \cdot r \cdot t)^2}{2 \cdot I} =$$

$$= \frac{(10 \text{ N} \cdot 0.72 \text{ m} \cdot 4 \text{ s})^2}{2 \cdot 4.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 86.4 \text{ J}.$$

- kinetička energija

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{F \cdot r}{I}, \omega = \alpha \cdot t \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \omega = \frac{F \cdot r}{I} \cdot t \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left(\frac{F \cdot r}{I} \cdot t \right)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{(F \cdot r \cdot t)^2}{I^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{(F \cdot r \cdot t)^2}{2 \cdot I} = \frac{(10 \text{ N} \cdot 0.72 \text{ m} \cdot 4 \text{ s})^2}{2 \cdot 4.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 86.4 \text{ J}.$$

Vježba 076

Na kotač polumjera 0.72 m, momenta tromosti $2.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, djeluje tangencijalno na rub stalna sila 5 N. Nađi kutnu akceleraciju.

Rezultat: $1.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

Zadatak 077 (Goran, gimnazija)

Rotor motora ima moment tromosti $6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Koliki stalni moment sile mora djelovati na rotor da bi povećao brzinu rotora od 120 okr/min na 540 okr/min u vremenu 6 s?

Rješenje 077

$$I = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad \omega_1 = 120 \text{ okr/min} = 120 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}/60 \text{ s} = 4 \cdot \pi \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 540 \text{ okr/min} = 540 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}/60 \text{ s} = 18 \cdot \pi \text{ rad/s}, \quad t = 6 \text{ s}, \quad M = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
put	s	kut	φ
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko ubrzano gibanje s početnom brzinom			
$a = \frac{v_2 - v_1}{t}$		$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t}$	

Moment sile koji djeluje na rotor iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \\ M = \alpha \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow M = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \cdot I = \frac{18 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{6 \text{ s}} \cdot 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 14 \cdot \pi \text{ Nm}.$$

Vježba 077

Rotor motora ima moment tromosti $8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Koliki stalni moment sile mora djelovati na rotor da bi povećao brzinu rotora od 120 okr/min na 540 okr/min u vremenu 8 s?

Rezultat: $14 \cdot \pi \text{ Nm}$.

Zadatak 078 (Dragan, gimnazija)

Kružna se ploča, promjera 1.6 m i mase 490 kg, vrti i čini 600 okr/min. Na njezinu oblu površinu pritišće kočnica silom 196 N. Faktor trenja kočnice o ploču jest 0.4. Koliko će okretaja učiniti ploča dok se ne zaustavi?

Rješenje 078

$$2 \cdot r = 1.6 \text{ m} \Rightarrow r = 0.8 \text{ m}, \quad m = 490 \text{ kg}, \quad \omega = 600 \text{ okr/min} = 600 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}/60 \text{ s} = 20 \cdot \pi \text{ rad/s}, \quad F = 196 \text{ N}, \quad \mu = 0.4, \quad n = ?$$

Kut φ koji kružna ploča opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi.$$

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I},$$

tj. kutna akceleracija rotacije α proporcionalna je s momentom sile M koja zakreće tijelo, a obrnuto proporcionalna s momentom tromosti I tijela s obzirom na os rotacije.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

Moment tromosti kružne ploče polumjera r s obzirom na os koja prolazi okomito na ploču njezinim središtem:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
put	s	kut	φ
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje			
Bez početne brzine		Bez početne brzine	
$v^2 = 2 \cdot a \cdot s$		$\omega^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$	

Izvedemo formulu za kutnu brzinu ω kao funkciju broja okreta n :

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = n \cdot 2 \cdot \pi \\ \omega^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \omega^2 = 2 \cdot \alpha \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \Rightarrow \omega^2 = 4 \cdot \alpha \cdot n \cdot \pi.$$

Budući da sila trenja F_{tr} koči ploču, moment sile trenja M je:

$$\left. \begin{array}{l} F_{tr} = \mu \cdot F \\ M = F_{tr} \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow M = \mu \cdot F \cdot r.$$

Iz definicije momenta sile M i momenta tromosti I kružne ploče dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Pomoću formula za moment sile odredimo kružnu akceleraciju α :

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ M = \mu \cdot F \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = \mu \cdot F \cdot r \quad / \cdot \frac{2}{m \cdot r^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \mu \cdot F}{m \cdot r}.$$

Računamo broj okreta kružne ploče n :

$$\left. \begin{array}{l} \omega^2 = 4 \cdot \alpha \cdot n \cdot \pi \\ \alpha = \frac{2 \cdot \mu \cdot F}{m \cdot r} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega^2 = 4 \cdot \frac{2 \cdot \mu \cdot F}{m \cdot r} \cdot n \cdot \pi \Rightarrow \omega^2 = \frac{8 \cdot \mu \cdot F \cdot n \cdot \pi}{m \cdot r} \quad / \cdot \frac{m \cdot r}{8 \cdot \mu \cdot F \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\omega^2 \cdot m \cdot r}{8 \cdot \mu \cdot F \cdot \pi} = \frac{\left(20 \cdot \pi \frac{1}{s}\right)^2 \cdot 490 \text{ kg} \cdot 0.8 \text{ m}}{8 \cdot 0.4 \cdot 196 \text{ N} \cdot \pi} = 785.4 \text{ okreta.}$$

Vježba 078

Kružna se ploča, promjera 160 cm i mase 0.49 t, vrti i čini 1200 okreta u 2 minute. Na njezinu oblu površinu pritišće kočnica silom 196 N. Faktor trenja kočnice o ploču jest 0.4. Koliko će okretaja učiniti ploča dok se ne zaustavi?

Rezultat: 785.4 okreta.

Zadatak 079 (Ema, gimnazija)

Na zamašnjak polumjera 1 m djeluje zakretni moment 392 Nm. Koliku masu mora imati zamašnjak da bi uz zadani moment dobio kutnu akceleraciju 0.4 rad/s^2 ? Masa zamašnjaka raspoređena je po njegovu obodu.

Rješenje 079

$$r = 1 \text{ m}, \quad M = 392 \text{ Nm}, \quad \alpha = 0.4 \text{ rad/s}^2, \quad m = ?$$

Budući da je masa zamašnjaka raspoređena po njegovu obodu (rubu), možemo to poistovjetiti s tankim prstenom mase m i polumjera r . Moment tromosti tankog prstena mase m i polumjera r s obzirom na os koja prolazi kroz središte prstena okomito na ravninu prstena je:

$$I = m \cdot r^2.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$



Masa m zamašnjaka iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = m \cdot r^2 \\ M = \alpha \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow M = \alpha \cdot m \cdot r^2 \Rightarrow m = \frac{M}{\alpha \cdot r^2} = \frac{392 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.4 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot (1 \text{ m})^2} = 980 \text{ kg}.$$

Vježba 079

Na zamašnjak polumjera 1 m djeluje zakretni moment 784 Nm. Koliku masu mora imati zamašnjak da bi uz zadani moment dobio kutnu akceleraciju 0.8 rad/s^2 ? Masa zamašnjaka raspoređena je po njegovu obodu.

Rezultat: 980 kg.

Zadatak 080 (Ema, gimnazija)

Homogeni štاپ dug 1 m, mase 0.5 kg, okreće se u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi koja prolazi sredinom štapa. Koliku će kutnu akceleraciju imati štاپ ako je zakretni moment $9.8 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}$?

Rješenje 080

$$l = 1 \text{ m}, \quad m = 0.5 \text{ kg}, \quad M = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}, \quad \alpha = ?$$

Moment tromosti štapa duljine l s obzirom na os koja prolazi njegovom sredinom i okomita je na njegovu duljinu iznosi:

$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I},$$

tj. kutna akceleracija rotacije α proporcionalna je s momentom sile M koja zakreće tijelo, a obrnuto proporcionalna s momentom tromosti I tijela s obzirom na os rotacije.

Računamo kutnu akceleraciju α :



$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 \\ M = \alpha \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 \cdot 12 \Rightarrow 12 \cdot M = \alpha \cdot m \cdot l^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{12 \cdot M}{m \cdot l^2} = \frac{12 \cdot 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}}{0.5 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2} = 2.352 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 080

Homogeni štap dug 1 m, mase 1 kg, okreće se u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi koja prolazi sredinom štapa. Koliku će kutnu akceleraciju imati štap ako je zakretni moment $1.96 \cdot 10^{-1} \text{ N} \cdot \text{m}$?

Rezultat: $2.352 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

www.halapa.com