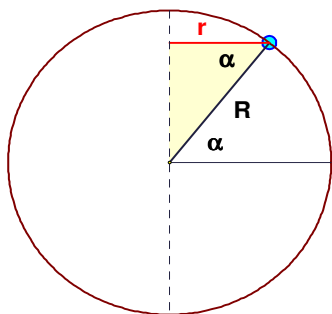


Zadatak 021 (Lily, gimnazija)

Kolikom se brzinom giba materijalna točka u Zagrebu zbog rotacije Zemlje? Polumjer Zemlje je 6470 km, a geografska širina Zagreba $45^\circ 59'$.

Rješenje 021

$$R = 6470 \text{ km} = 6.47 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \alpha = 45^\circ 59', \quad v = ?$$



Perioda Zemlje iznosi:

$$T = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s.}$$

Kutna brzina dana je izrazom:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}.$$

Obodna ili linearna brzina je brzina kojom se giba materijalna točka:

$$v = r \cdot \omega \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{r}{R} \\ r = R \cdot \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow v = R \cdot \cos \alpha \cdot \omega = R \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} =$$

$$= 6.47 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \cos 45^\circ 59' \cdot \frac{2 \cdot \pi}{8.64 \cdot 10^4 \text{ s}} = 326.94 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 021

Kolikom se brzinom giba materijalna točka u Bjelovaru zbog rotacije Zemlje? Polumjer Zemlje je 6470 km, a geografska širina Bjelovara $45^\circ 54'$.

Rezultat: $327.44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadatak 022 (Lily, gimnazija)

Kako se odnose obodne brzine v_1 i v_2 Zemlje i Venere koje imaju polumjere staza r_1 i r_2 pod pretpostavkom da su staze kružnice? ($r_1 = 149 \cdot 10^6 \text{ km}$, $r_2 = 108 \cdot 10^6 \text{ km}$)

Rješenje 022

$$r_1 = 149 \cdot 10^6 \text{ km}, \quad r_2 = 108 \cdot 10^6 \text{ km}, \quad v_2 : v_1 = ?$$



1. inačica

Obodna brzina definira se:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{v} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{v^2}.$$

Omjer obodnih brzina dobije se pomoću trećeg Keplerovog zakona:

$$\begin{aligned} T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3 &\Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^2}{v_1^2} : \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^2}{v_2^2} = r_1^3 : r_2^3 \Rightarrow \frac{r_1^2}{v_1^2} : \frac{r_2^2}{v_2^2} = r_1^3 : r_2^3 \Rightarrow \frac{r_1^2}{v_1^2} \cdot r_2^3 = \frac{r_2^2}{v_2^2} \cdot r_1^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{r_1^2}{v_1^2} \cdot r_2^3 &= \frac{r_2^2}{v_2^2} \cdot r_1^3 \quad / \cdot \frac{1}{r_1^2 \cdot r_2^2} \Rightarrow \frac{r_2}{v_1^2} = \frac{r_1}{v_2^2} \Rightarrow v_2^2 \cdot r_2 = v_1^2 \cdot r_1 \quad / \cdot \frac{1}{v_1^2 \cdot r_2} \Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{r_1}{r_2} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} &= \sqrt{\frac{149 \cdot 10^6 \text{ km}}{108 \cdot 10^6 \text{ km}}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{149}{108}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{149}}{\sqrt{108}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{12.21}{10.39} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{proširujemo s} \\ \text{približno 1.64} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} \approx \frac{20}{17}. \end{aligned}$$

2. inačica

Budući da je centripetalna sila jednaka gravitacijskoj sili Sunca i planeta, slijedi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1 \cdot v_1^2}{r_1} &= G \cdot \frac{m_1 \cdot M}{r_1^2} \\ \frac{m_2 \cdot v_2^2}{r_2} &= G \cdot \frac{m_2 \cdot M}{r_2^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{m_1 \cdot v_1^2}{r_1} = \frac{G \cdot m_1 \cdot M}{r_1^2} \Rightarrow \frac{m_1 \cdot v_1^2 \cdot r_2}{m_2 \cdot v_2^2 \cdot r_1} = \frac{m_1 \cdot r_2^2}{m_2 \cdot r_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 \cdot v_1^2 \cdot r_2}{m_2 \cdot v_2^2 \cdot r_1} = \frac{m_1 \cdot r_2^2}{m_2 \cdot r_1^2} \cdot \frac{m_2 \cdot r_1}{m_1 \cdot r_2} \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \sqrt{} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{149 \cdot 10^6 \text{ km}}{108 \cdot 10^6 \text{ km}}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{149}{108}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{149}}{\sqrt{108}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{12.21}{10.39} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{proširujemo s} \\ \text{približno 1.64} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} \approx \frac{20}{17}.$$

Vježba 022

Kako se odnose obodne brzine v_1 i v_2 dva planeta koji imaju polumjere staza r_1 i r_2 pod pretpostavkom da su staze kružnice? ($r_1 = 400 \cdot 10^6 \text{ km}$, $r_2 = 100 \cdot 10^6 \text{ km}$)

Rezultat: 2 : 1.

Zadatak 023 (Mario, gimnazija)

Kružni kamen za brušenje promjera 40 cm i mase 3 kg rotira brzinom 2400 okreta u minuti. Kolika mu je kinetička energija?

Rješenje 023

$$2 \cdot r = 40 \text{ cm} \Rightarrow r = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad m = 3 \text{ kg}, \quad n = 2400, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad E_k = ?$$

Kružna ploča polumjera r , s obzirom na os koja prolazi okomito njezinim središtem ima moment inercije

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Kamen ima oblik kružne ploče.

Kinetička energija tijela, koje rotira kutnom brzinom ω , je:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2.$$

Zato je:

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2, \quad v = \frac{n}{t} \\ \omega &= 2 \cdot \pi \cdot v, \quad E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{n}{t} \right)^2 =$$

$$= m \cdot r^2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{n}{t} \right)^2 = 3 \text{ kg} \cdot (0.2 \text{ m})^2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{2400}{60 \text{ s}} \right)^2 = 1893 \text{ J}.$$

Vježba 023

Kružni kamen za brušenje promjera 40 cm i mase 6 kg rotira brzinom 2400 okreta u minuti. Kolika mu je kinetička energija?

Rezultat: 3786 J.

Zadatak 024 (Mario, gimnazija)

Koliko okreta u minuti učine kotači vagona kada vlak vozi brzinom 108 km/h? Promjer kotača je 0.74 m.

Rješenje 024

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad v = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}, \quad 2 \cdot r = 0.74 \text{ m} \Rightarrow r = 0.37 \text{ m},$$

$$n = ?$$

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{n}{t}, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow v = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \Rightarrow v \cdot t = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot n \Rightarrow n = \frac{v \cdot t}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{30 \frac{m}{s} \cdot 60 s}{2 \cdot 0.37 m \cdot 3.14} = 775.$$

2. inačica

Nađemo frekvenciju kotača vagona (broj okretaja u 1 sekundi):

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ v = r \cdot \omega \end{array} \right\} \Rightarrow v = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow v = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{30 \frac{m}{s}}{2 \cdot 0.37 m \cdot 3.14} = 12.91 \frac{1}{s}.$$

U jednoj minuti bit će 60 puta više okretaja:

$$n = 60 \cdot v = 60 s \cdot 12.91 \frac{1}{s} = 775.$$

Vježba 024

Koliko okreta u minuti učine kotači vagona kada vlak vozi brzinom 144 km/h? Promjer kotača je 0.74 m.

Rezultat: $n = 1033.$

Zadatak 025 (Mario, gimnazija)

Kojom najvećom kutnom brzinom može rotirati tijelo mase 2 kg ako rotira na kraju užeta duljine 2 m? Uže može izdržati najveću silu 200 N, a da ne pukne.

Rješenje 025

$$m = 2 \text{ kg}, \quad r = 2 \text{ m}, \quad F = 200 \text{ N}, \quad \omega = ?$$

Napetost užeta F po iznosu jednaka je centripetalnoj sili F_{cp} :



$$\left. \begin{array}{l} F = F_{cp} \\ F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot r \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{F}{m \cdot r} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{200 \text{ N}}{2 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m}}} = 7.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Vježba 025

Kojom najvećom kutnom brzinom može rotirati tijelo mase 1 kg ako rotira na kraju užeta duljine 2 m? Uže može izdržati najveću silu 200 N, a da ne pukne.

Rezultat: $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$

Zadatak 026 (Slavica, gimnazija)

Kružna ploča polumjera 1 m i mase 200 kg vrti se brzinom 1 okr/s oko svoje osi zbog ustrajnosti. Na rubu ploče stoji koza mase 50 kg. Kolikom će se brzinom okretati ploča ako koza s ruba ode pola metra bliže središtu?

Rješenje 026

$$r = 1 \text{ m}, \quad m = 200 \text{ kg}, \quad v_1 = 1 \text{ s}^{-1}, \quad m_1 = 50 \text{ kg}, \quad r_1 = 1 \text{ m} - 0.5 \text{ m} = 0.5 \text{ m}, \quad v = ?$$

Moment tromosti materijalne točke mase m na udaljenosti r od osi rotacije:

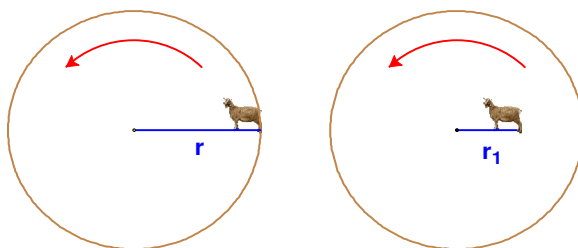
$$I = m \cdot r^2.$$

Moment tromosti kružne ploče polumjera r s obzirom na os koja prolazi okomito na ploču njezinim središtem:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Ako na tijelo ne djeluje vanjski moment sila, vrijedi zakon o očuvanju količine gibanja:

$$\begin{aligned}
 I_1 \cdot \omega_1 &= I_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 + m_1 \cdot r^2\right)}_{\text{KOZA STOI NA RUBU PLOČE}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot v_1 = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 + m_1 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2\right)}_{\text{KOZA SE POMAKLA BLIŽE SREDIŠTU}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow \\
 &\Rightarrow r^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m + m_1\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot v_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 + m_1 \cdot \frac{r^2}{4}\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow \\
 &\Rightarrow r^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m + m_1\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot v_1 = r^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{m_1}{4}\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot m + m_1\right) \cdot v_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{m_1}{4}\right) \cdot v \Rightarrow v = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot m + m_1\right) \cdot v_1}{\frac{1}{2} \cdot m + \frac{m_1}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 200 \text{ kg} + 50 \text{ kg}\right) \cdot 1 \frac{1}{s}}{\frac{1}{2} \cdot 200 \text{ kg} + \frac{50 \text{ kg}}{4}} = 1.33 \text{ Hz}.
 \end{aligned}$$



Vježba 026

Kružna ploča polumjera 1 m i mase 200 kg vrti se brzinom 2 okr/s oko svoje osi zbog ustrajnosti. Na rubu ploče stoji čovjek mase 50 kg. Kolikom će se brzinom okretati ploča ako čovjek s ruba ode pola metra bliže središtu?

Rezultat: 2.67 Hz.

Zadatak 027 (Slavica, gimnazija)

Kolika je brzina krajnje točke propelera zrakoplova ako se zrakoplov giba po pisti brzinom 120 km/h, a propeler se okreće brzinom 600 okreta u minuti? Krajnja je točka propelera na udaljenosti 1.5 m od osi okretanja.

Rješenje 027

$$v_1 = 120 \text{ km/h} = [120 : 3.6] = 33.33 \text{ m/s}, \quad n = 600, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad r = 1.5 \text{ m}, \quad v = ?$$



Obodna (linearna) brzina krajnje točke propelera iznosi:

$$v_2 = r \cdot \omega = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot n}{t}.$$

Budući da su brzina zrakoplova v_1 i obodna brzina krajnje točke propelera v_2 međusobno okomite, rezultantnu brzinu v možemo izračunati iz Pitagorina poučka:

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{v_1^2 + \left(\frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot n}{t}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(33.33 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 1.5 \text{ m} \cdot \pi \cdot 600}{60 \text{ s}}\right)^2} = 99.97 \frac{\text{m}}{\text{s}}.
 \end{aligned}$$

Vježba 027

Kolika je brzina krajnje točke propelera zrakoplova ako se zrakoplov giba po pisti brzinom 120 km/h, a propeler se okreće brzinom 800 okreta u minuti? Krajnja je točka propelera na udaljenosti 1.5 m od osi okretanja.

Rezultat: $130 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

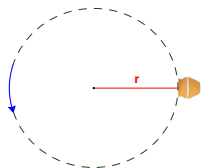
Zadatak 028 (Slavica, gimnazija)

Posudu s vodom vrtimo po vertikalnoj kružnici polumjera 2.5 m. Koliko mora najmanje iznositi frekvencija kruženja da se voda ne prolije? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 028

$$r = 2.5 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Budući da se voda ne smije prolići, mora njezina težina po iznosu biti jednaka centripetalnoj sili:



$$G = F_{cp} \Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad / \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = r \cdot g \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v = r \cdot \omega \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 = r \cdot g \Rightarrow 4 \cdot r^2 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 = r \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{4 \cdot r^2 \cdot \pi^2} \Rightarrow \nu^2 = \frac{r \cdot g}{4 \cdot r^2 \cdot \pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu^2 = \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \nu = \sqrt{\frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2.5 \text{ m}}} = 0.32 \text{ Hz.}$$

Vježba 028

Posudu s vodom vrtimo po vertikalnoj kružnici polumjera 5 m. Koliko mora najmanje iznositi frekvencija kruženja da se voda ne prolije? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

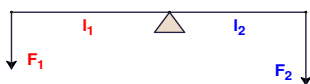
Rezultat: 0.22 Hz.

Zadatak 029 (Slavica, gimnazija)

Pri mjerenju mase vagom tijelo se postavi na lijevu stranu vage, a na desnu utezi. Tada je masa 30.2 g. Zatim suprotno, a masa je 30.4 g. Kolika je točno masa tijela?

Rješenje 029

$$m_1 = 30.2 \text{ g}, \quad m_2 = 30.4 \text{ g}, \quad m = ?$$



Kraci su vage nejednaki. Uporabit ćemo zakon dvostrane poluge:

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2.$$



$$\left. \begin{array}{l} G \cdot l_1 = G_1 \cdot l_2 \\ G_2 \cdot l_1 = G \cdot l_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot g \cdot l_1 = m_1 \cdot g \cdot l_2 \quad / : g \\ m_2 \cdot g \cdot l_1 = m \cdot g \cdot l_2 \quad / : g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot l_1 = m_1 \cdot l_2 \\ m_2 \cdot l_1 = m \cdot l_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot l_1}{m_2 \cdot l_1} = \frac{m_1 \cdot l_2}{m \cdot l_2} \Rightarrow \frac{m}{m_2} = \frac{m_1}{m} \Rightarrow m^2 = m_1 \cdot m_2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow m = \sqrt{m_1 \cdot m_2} = \sqrt{30.2 \text{ g} \cdot 30.4 \text{ g}} = 30.3 \text{ g.}$$

Vježba 029

Pri mjerenju mase vagom tijelo se postavi na lijevu stranu vage, a na desnu utezi. Tada je masa 30.1 g. Zatim suprotno, a masa je 30.4 g. Kolika je točno masa tijela?

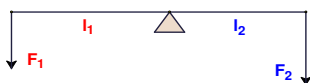
Rezultat: 30.25 g.

Zadatak 030 (Slavica, gimnazija)

Na vagi, kojoj kraci nisu idealno jednaki, važe se masa m . Kada je m na lijevoj strani, masa utega je $m_1 = 10 \text{ kg}$. Kada je m na desnoj strani, masa utega je $m_2 = 10.5 \text{ kg}$. Koliki je omjer duljina lijevog i desnog kraka vage?

Rješenje 030

$$m_1 = 10 \text{ kg}, \quad m_2 = 10.5 \text{ kg}, \quad l_1 : l_2 = ?$$



Kraci su vage nejednaki. Uporabit ćemo zakon dvostrane poluge:

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2.$$



$$\left. \begin{array}{l} G \cdot l_1 = G_1 \cdot l_2 \\ G_2 \cdot l_1 = G \cdot l_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot g \cdot l_1 = m_1 \cdot g \cdot l_2 \quad / : g \\ m_2 \cdot g \cdot l_1 = m \cdot g \cdot l_2 \quad / : g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot l_1 = m_1 \cdot l_2 \\ m_2 \cdot l_1 = m \cdot l_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot m_2 \cdot l_1^2 = m \cdot m_1 \cdot l_2^2 \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot m_2 \cdot l_2^2} \Rightarrow \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{m_1}{m_2} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{10 \text{ kg}}{10.5 \text{ kg}}} = 0.976.$$

Vježba 030

Na vagi, kojoj kraci nisu idealno jednaki, važe se masa m . Kada je m na lijevoj strani, masa utega je $m_1 = 10 \text{ kg}$. Kada je m na desnoj strani, masa utega je $m_2 = 10.2 \text{ kg}$. Koliki je omjer duljina lijevog i desnog kraka vage?

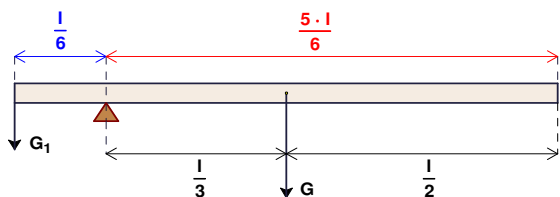
Rezultat: 0.990.

Zadatak 031 (Kristina – Kiki, medicinska škola)

Homogena greda je vodoravno oslonjena na potporanj tako da je omjer duljina krakova 1 : 5. Kolika je masa grede ako je za uravnoteženje potrebno staviti uteg mase 10 kg na kraj kraćeg kraka?

Rješenje 031

$$l_1 : l_2 = 1 : 5, \quad m_1 = 10 \text{ kg}, \quad m = ?$$



Na polugu djeluju dvije sile: sila teža

$$G = m \cdot g$$

s hvatištem u težištu koje se nalazi na polovini duljine cijele poluge i uteg svojom težinom

$$G_1 = m_1 \cdot g.$$

Ravnoteža na gredi bit će ako je:

$$G \cdot \frac{1}{3} \cdot l = G_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot l \Rightarrow m \cdot g \cdot \frac{1}{3} \cdot l = m_1 \cdot g \cdot \frac{1}{6} \cdot l \quad / \cdot \frac{3}{g \cdot l} \Rightarrow m = m_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 \Rightarrow m = 10 \text{ kg} \cdot \frac{3}{6} = 5 \text{ kg}.$$

Vježba 031

Homogena greda je vodoravno oslonjena na potporanj tako da je omjer duljina krakova 1 : 6. Kolika je masa grede ako je za uravnoteženje potrebno staviti uteg mase 10 kg na kraj kraćeg kraka?

Rezultat: 4 kg.

Zadatak 032 (Matea, gimnazija)

Nađi omjer linearnih brzina v_1 i v_2 dva planeta koji imaju polumjere staza oko Sunca r_1 i r_2 , pod pretpostavkom da su staze kružnice.

Rješenje 032

$$r_1, \quad r_2, \quad v_1 : v_2 = ?$$

1. inačica

Problem ćemo riješiti u općem slučaju uporabom relacija za obodnu (linearnu) brzinu kod jednolikog gibanja po kružnici i trećeg Keplerovog zakona. Iz formule za linearnu brzinu dobije se perioda:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \quad / \cdot 2 \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{v^2}.$$

Zamjenom perioda dva planeta u Keplerovom zakonu eliminira se T_1 i T_2 :

$$\left. \begin{aligned} T_1^2 &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^2}{v_1^2}, \quad T_2^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^2}{v_2^2} \\ \frac{T_1^2}{T_2^2} &= \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad \text{Keplerov zakon} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^2}{v_1^2}}{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^2}{v_2^2}} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Rightarrow \frac{v_2^2 \cdot r_1^2}{v_1^2 \cdot r_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad / \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{r_1}{r_2} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}} \Rightarrow v_1 : v_2 = \sqrt{r_2} : \sqrt{r_1}.$$

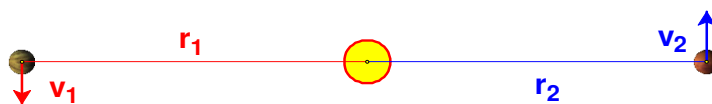
2. inačica

Neka su:

- m_1 masa prvog planeta, r_1 udaljenost prvog planeta od Sunca,
- m_2 masa drugog planeta, r_2 udaljenost drugog planeta od Sunca,
- M masa Sunca.

Za oba planeta moraju centripetalne sile biti jednake gravitacijskoj sili Sunca i planeta:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1 \cdot v_1^2}{r_1} &= G \cdot \frac{m_1 \cdot M}{r_1^2} \\ \frac{m_2 \cdot v_2^2}{r_2} &= G \cdot \frac{m_2 \cdot M}{r_2^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{m_1 \cdot v_1^2}{r_1} = \frac{m_1 \cdot M}{r_1^2} \Rightarrow \frac{m_1 \cdot v_1^2 \cdot r_2}{m_2 \cdot v_2^2 \cdot r_1} = \frac{m_1 \cdot r_2^2}{m_2 \cdot r_1^2} \cdot \frac{m_2 \cdot r_1}{m_1 \cdot r_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \sqrt{} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}} \Rightarrow v_1 : v_2 = \sqrt{r_2} : \sqrt{r_1}$$



Vježba 032

Nađi omjer linearnih brzina v_1 i v_2 dva planeta koji imaju polumjere staza oko Sunca r i $4r$, pod pretpostavkom da su staze kružnice.

Rezultat: 2 : 1.

Zadatak 033 (Deny, strojarska škola)

Na kotač zamašnjak djeluje moment sile (zakretni moment) 0.5 Nm. Koliki se rad uloži za svaki njegov okret?

Rješenje 033

$$M = 0.5 \text{ Nm}, \quad \varphi = 2 \cdot \pi, \quad W = ?$$

Uloženi rad za svaki okret iznosi:

$$W = M \cdot \varphi = 0.5 \text{ Nm} \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad} = 3.14 \text{ J.}$$

Vježba 033

Na kotač zamašnjak djeluje moment sile (zakretni moment) 1 Nm. Koliki se rad uloži za svaki njegov okret?

Rezultat: 6.28 J.

Zadatak 034 (Deny, strojarska škola)

Da bi neki sustav rotirao kutnom brzinom 3000 okr/min, na njega mora djelovati moment sile (zakretni moment) 200 Nm. Kolika je potrebna snaga pokretačkog stroja?

Rješenje 034

$$\omega = 3000 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = 3000 \frac{2 \cdot \pi}{60 \text{ s}} = 100 \cdot \pi \frac{1}{\text{s}}, \quad M = 200 \text{ Nm}, \quad P = ?$$

Snaga stroja iznosi:

$$P = M \cdot \omega = 200 \text{ Nm} \cdot 100 \cdot \pi \frac{1}{\text{s}} = 6.28 \cdot 10^4 \text{ W.}$$

Vježba 034

Da bi neki sustav rotirao kutnom brzinom 3000 okr/min, na njega mora djelovati moment sile (zakretni moment) 400 Nm. Kolika je potrebna snaga pokretačkog stroja?

Rezultat: $1.257 \cdot 10^5 \text{ W.}$

Zadatak 035 (Deny, strojarska škola)

Tri tijela masa m , $3m$ i $4m$ nalaze se u vrhovima jednakostraničnog trokuta duljine stranice a . Nađite središte mase sustava. (Gledaj sliku!)

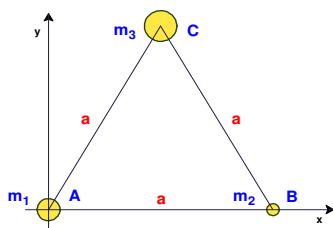
Rješenje 035

$$m_1 = 3m, \quad m_2 = m, \quad m_3 = 4m, \quad x_S = ?, \quad y_S = ?$$

Koordinate središta mase sustava tri točkasta tijela, čije su mase m_1, m_2, m_3 iznose:

$$x_S = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_S = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

gdje su x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$) – koordinate točkastih tijela.



Sa slike se vidi:

$$\left. \begin{aligned} A(x_1, y_1) &= A(0, 0) & B(x_2, y_2) &= B(a, 0) \\ C(x_3, y_3) &= C\left(\frac{a}{2}, \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$m_1 = 3 \cdot m, \quad m_2 = m, \quad m_3 = 4 \cdot m$$

$$\left. \begin{aligned} x_S &= \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ y_S &= \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_S &= \frac{3 \cdot m \cdot 0 + m \cdot a + 4 \cdot m \cdot \frac{a}{2}}{3 \cdot m + m + 4 \cdot m} \\ y_S &= \frac{3 \cdot m \cdot 0 + m \cdot 0 + 4 \cdot m \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}}{3 \cdot m + m + 4 \cdot m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_S &= \frac{3 \cdot m \cdot a}{8 \cdot m} \\ y_S &= \frac{2 \cdot m \cdot a \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x_S &= \frac{3 \cdot a}{8} \\ y_S &= \frac{a \cdot \sqrt{3}}{4} \end{aligned} \right\}$$

Vježba 035

Tri tijela masa m , $3m$ i $4m$ nalaze se u vrhovima jednakostraničnog trokuta duljine stranice 1 . Nađite središte mase sustava. (Gledaj sliku!)

Rezultat: $x_S = \frac{3}{8}, \quad y_S = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Zadatak 036 (Mario, elektrotehnička škola)

Na užetu duljine 1 m obješen je uteg mase 1 kg. Uže može izdržati najveću silu 11 N. Koliko visoko možemo podići uteg iz ravnotežnog položaja, a da se pri njihanju uža ne prekine? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 036

$$r = 1 \text{ m}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad F = 11 \text{ N}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Nit napinje težina utega G i centrifugalna sila koja djeluje na uteg. Centrifugalna sila djeluje zato što nit i uteg zajedno kruže. Ukupna sila je:

$$F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Budući da je $v^2 = 2 \cdot g \cdot h$, slijedi:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= 2 \cdot g \cdot h \\ F &= m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{r} \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{r} = F - m \cdot g \quad / \cdot \frac{r}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{r}{2 \cdot m \cdot g} \cdot (F - m \cdot g) =$$

$$= \frac{1 \text{ m}}{2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \left(11 \text{ N} - 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}.$$

Vježba 036

Na užetu duljine 2 m obješen je uteg mase 1 kg. Uže može izdržati najveću silu 11 N. Koliko visoko možemo podići uteg iz ravnotežnog položaja, a da se pri njihanju uža ne prekine? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.1 m.

Zadatak 037 (Ivan, elektrotehnička škola)

Osovina motora ubrza se jednoliko od 1000 okretaja/min na 4000 okretaja/min za vrijeme od 15 s. Koliki je broj okretaja motora za vrijeme tog ubrzanja?

Rješenje 037

$$v_1 = 1000 \text{ okr / min} = \frac{1000}{60 \text{ s}} = \frac{50}{3 \text{ s}}, \quad v_2 = 4000 \text{ okr / min} = \frac{4000}{60 \text{ s}} = \frac{200}{3 \text{ s}}, \quad t = 15 \text{ s}, \quad n = ?$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu. Tako za opisani kut φ vrijedi:

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow \varphi = \omega_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \cdot t^2 \Rightarrow \varphi = \omega_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (\omega_2 - \omega_1) \cdot t \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{2 \cdot \omega_1 \cdot t + \omega_2 \cdot t - \omega_1 \cdot t}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\omega_1 \cdot t + \omega_2 \cdot t}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot t \Rightarrow [\omega = 2 \cdot \pi \cdot v] \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \pi \cdot v_1 + 2 \cdot \pi \cdot v_2) \cdot t \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (v_1 + v_2) \cdot t \Rightarrow \varphi = \pi \cdot (v_1 + v_2) \cdot t. \end{aligned}$$

Broj okretaja motora iznosi:

$$n = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \Rightarrow n = \frac{\pi \cdot (v_1 + v_2) \cdot t}{2 \cdot \pi} \Rightarrow n = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t = \frac{\frac{50}{3 \text{ s}} + \frac{200}{3 \text{ s}}}{2} \cdot 15 \text{ s} = \frac{50 + 200}{6 \text{ s}} \cdot 15 \text{ s} = 625.$$

Vježba 037

Osovina motora ubrza se jednoliko od 1000 okretaja/min na 4000 okretaja/min za vrijeme od 30 s. Koliki je broj okretaja motora za vrijeme tog ubrzanja?

Rezultat: 1250.

Zadatak 038 (Ivan, elektrotehnička škola)

Kotač promjera 480 mm okrene se 70 puta u 2 minute i 5 sekundi. Nađite njegovu tangencijalnu brzinu.

Rješenje 038

$$2 \cdot r = 480 \text{ mm} = 0.48 \text{ m}, \quad n = 70, \quad t = 2 \text{ min } 5 \text{ s} = [2 \cdot 60 + 5] = 125 \text{ s}, \quad v = ?$$

Obodna (ili ophodna ili tangencijalna ili linearna) brzina pri jednolikom kruženju je

$$v = \frac{\text{opseg kružne staze}}{\text{period kruženja}} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}.$$

Zbog $v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}$ i $v = \frac{1}{T}$ slijedi da je $v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v$.

Tangencijalna brzina iznosi:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{n}{t} \\ v &= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} = 0.48 \text{ m} \cdot \pi \cdot \frac{70}{125 \text{ s}} = 0.84 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 038

Kotač promjera 480 mm okrene se 140 puta u 2 minute i 5 sekundi. Nađite njegovu tangencijalnu brzinu.

Rezultat: 1.69 m/s.

Zadatak 039 (Max, gimnazija)

Koliko bi trebao biti dugačak dan da tijela na ekvatoru ne pritišću na površinu Zemlje? Polumjer Zemlje je 6370 km, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rješenje 039

$$R = 6370 \text{ km} = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad T = ?$$

Budući da tijela na ekvatoru ne pritišću na površinu Zemlje, mora težina po iznosu biti jednaka centripetalnoj sili:

$$\begin{aligned} G = F_{cp} &\Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} \cdot \frac{T^2}{m \cdot g} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{g} \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{6.37 \cdot 10^6 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 5014.753435 \text{ s} = [5014.753435 : 3600] = 1.392987065 \text{ h} = 1 \text{ h} + 0.392987065 \text{ h} = \\ &= 1 \text{ h} + 0.392987065 \cdot 60 = 1 \text{ h} + 23.57922392 \text{ min} = 1 \text{ h} + 23 \text{ min} + 0.57922392 \text{ min} = \\ &= 1 \text{ h} + 23 \text{ min} + 0.57922392 \cdot 60 = 1 \text{ h} + 23 \text{ min} + 34.7534352 \text{ s} \approx 1 \text{ h} + 23 \text{ min} + 35 \text{ s} \approx 1 \text{ h} 23 \text{ min} 35 \text{ s}. \end{aligned}$$

Vježba 039

Koliko bi trebao biti dugačak dan da tijela na ekvatoru ne pritišću na površinu Zemlje? Polumjer Zemlje je 6370 km, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Rezultat: 1 h 24 min 23 s.

Zadatak 040 (Max, gimnazija)

Koliki put prijeđe automobil za 30 minuta jednolikoga gibanja ako točka na obodu gume opsega 1.8 m ima ubrzanje 30 m/s^2 ?

Rješenje 040

$$t = 30 \text{ min} = 1800 \text{ s}, \quad O = 1.8 \text{ m}, \quad a_{cp} = 30 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

$$\left. \begin{aligned} s &= v \cdot t \text{ put jednolikoga gibanja} \\ v &= \omega \cdot r \text{ obodna brzina} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \omega \cdot r \cdot t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{centripetalna akceleracija} \\ a_{cp} = r \cdot \omega^2 \end{array} \right] \Rightarrow s = \sqrt{\frac{a_{cp}}{r}} \cdot r \cdot t \Rightarrow \\ \Rightarrow s &= \sqrt{\frac{a_{cp}}{r}} \cdot r^2 \cdot t \Rightarrow s = \sqrt{r \cdot a_{cp}} \cdot t \Rightarrow \left[r = \frac{O}{2 \cdot \pi} \right] \Rightarrow s = \sqrt{\frac{O}{2 \cdot \pi}} \cdot a_{cp} \cdot t = \\ &= \sqrt{\frac{1.8 \text{ m}}{2 \cdot \pi}} \cdot 30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1800 \text{ s} = 5276.9 \text{ m}. \end{aligned}$$

Vježba 040

Koliki put prijeđe automobil za 10 minuta jednolikoga gibanja ako točka na obodu gume opsega 1.8 m ima ubrzanje 30 m/s^2 ?

Rezultat: 1759 m.