

### Zadatak 461 (Franka, gimnazija)

Žičara vuče skijaša mase 75 kg na brdo visoko 300 m. Koliko je približno energije izgubljeno na svladavanje trenja ako je snaga žičare 1.2 kW, a vrijeme potrebno da skijaš dođe na vrh brda 4 minute? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 461

$$m = 75 \text{ kg}, \quad h = 300 \text{ m}, \quad P = 1.2 \text{ kW} = 1200 \text{ W}, \quad t = 4 \text{ min} = [4 \cdot 60] = 240 \text{ s}, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow W = P \cdot t.$$



Rad koji se utroši pri dizanju skijaša, mase  $m$ , na vrh brda, visine  $h$ , jednak je promjeni gravitacijske potencijalne energije. Dakle,

$$\left. \begin{array}{l} W_1 = E_{gp} \\ E_{gp} = m \cdot g \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow W_1 = m \cdot g \cdot h.$$

Rad koji obavi žičara snage  $P$  za vrijeme  $t$  iznosi:

$$W_2 = P \cdot t.$$

Približno je izgubljeno energije

$$\left. \begin{array}{l} \Delta E = \Delta W \\ \Delta W = W_2 - W_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta E = W_2 - W_1 \Rightarrow \Delta E = P \cdot t - m \cdot g \cdot h = \\ = 1200 \text{ W} \cdot 240 \text{ s} - 75 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 300 \text{ m} = 67275 \text{ J}.$$

#### Vježba 461

Žičara vuče skijaša mase 75 kg na brdo visoko 0.3 km. Koliko je približno energije izgubljeno na svladavanje trenja ako je snaga žičare 1.2 kW, a vrijeme potrebno da skijaš dođe na vrh brda 4 minute? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 67275 J.

### Zadatak 462 (Ante, srednja škola)

Projektil mase 50 g leti brzinom 500 m/s i probije zid debljine 5 cm te se nastavi gibati dalje brzinom 200 m/s. Kolika je sila otpora zida? Pretpostavite da je sila otpora zida stalna.

#### Rješenje 462

$$m = 50 \text{ g} = 0.05 \text{ kg}, \quad v_1 = 500 \text{ m/s}, \quad d = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, \quad v_2 = 200 \text{ m/s}, \quad F = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

Rad sile otpora zida jednak je promjeni kinetičke energije projektila.

$$\left. \begin{aligned} W &= F \cdot d \\ \Delta E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow [W = \Delta E_k] \Rightarrow F \cdot d = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cdot d = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow F \cdot d = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) / \frac{1}{d} \Rightarrow F = \frac{m}{2 \cdot d} \cdot (v_2^2 - v_1^2) =$$

$$= \frac{0.05 \text{ kg}}{2 \cdot 0.05 \text{ m}} \cdot \left( \left( 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left( 500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = -105000 \text{ N} = -105 \text{ kN}.$$

#### Vježba 462

Projektil mase 5 dag leti brzinom 0.5 km / s i probije zid debljine 50 mm te se nastavi gibati dalje brzinom 0.2 km / s. Kolika je sila otpora zida? Pretpostavite da je sila otpora zida stalna.

**Rezultat:** - 105 k N.

#### Zadatak 463 (Vjekoslav, gimnazija)

Skijaš se spušta niz padinu, krenuvši s mjesta s 200 m višom nadmorskom visinom od one na dnu padine. Njegova konačna brzina je 20 m / s. Koliko je postotaka njegove energije izgubljeno na trenje i otpor zraka? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m} / \text{s}^2$ )

#### Rješenje 463

$$\Delta h = 200 \text{ m}, \quad v = 20 \text{ m} / \text{s}, \quad g = 10 \text{ m} / \text{s}^2, \quad p = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.

Na primjer,

$$9 \% = \frac{9}{100}, \quad 81 \% = \frac{81}{100}, \quad 4.5 \% = \frac{4.5}{100}, \quad 547 \% = \frac{547}{100}, \quad p \% = \frac{p}{100}.$$

Kako u postotku izraziti smanjenje broja a za broj b?

$$p = \frac{a-b}{a} \cdot 100 \%.$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{E_{gp} - E_k}{E_{gp}} \cdot 100\% \Rightarrow p = \frac{m \cdot g \cdot \Delta h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{m \cdot g \cdot \Delta h} \cdot 100\% \Rightarrow p = \frac{m \cdot \left( g \cdot \Delta h - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right)}{m \cdot g \cdot \Delta h} \cdot 100\% \Rightarrow \\
&\Rightarrow p = \frac{m \cdot \left( g \cdot \Delta h - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right)}{m \cdot g \cdot \Delta h} \cdot 100\% \Rightarrow p = \frac{g \cdot \Delta h - \frac{1}{2} \cdot v^2}{g \cdot \Delta h} \cdot 100\% \Rightarrow \\
&\Rightarrow p = \left( \frac{g \cdot \Delta h - \frac{1}{2} \cdot v^2}{g \cdot \Delta h} \right) \cdot 100\% \Rightarrow p = \left( \frac{g \cdot \Delta h}{g \cdot \Delta h} - \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot \Delta h} \right) \cdot 100\% \Rightarrow p = \left( 1 - \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot \Delta h} \right) \cdot 100\% \Rightarrow \\
&\Rightarrow p = \left( 1 - \frac{\left( 20 \frac{m}{s} \right)^2}{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 200 m} \right) \cdot 100\% \Rightarrow p = 90\%.
\end{aligned}$$

### Vježba 463

Skijaš se spušta niz padinu, krenuvši s mjesta s 0.2 km višom nadmorskom visinom od one na dnu padine. Njegova konačna brzina je 20 m / s. Koliko je postotaka njegove energije izgubljeno na trenje i otpor zraka? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:** 90%.

### Zadatak 464 (Miro, srednja škola)

Tijelo iz mirovanja počinje kliziti niz kosinu ( $\alpha = 5.7^\circ$ ) i preivalivši put od 100 m postigne brzinu 5 m / s. Koliki se dio njegove potencijalne energije utrošio na trenje i otpor zraka? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

- A. 87.2%      B. 10.4%      C. 33%      D. 85%      E. 99%

### Rješenje 464

$$\alpha = 5.7^\circ, \quad l = 100 \text{ m}, \quad v = 5 \text{ m / s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad p = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak  $p$  je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.

Na primjer,

$$9\% = \frac{9}{100}, \quad 81\% = \frac{81}{100}, \quad 4.5\% = \frac{4.5}{100}, \quad 547\% = \frac{547}{100}, \quad p\% = \frac{p}{100}.$$

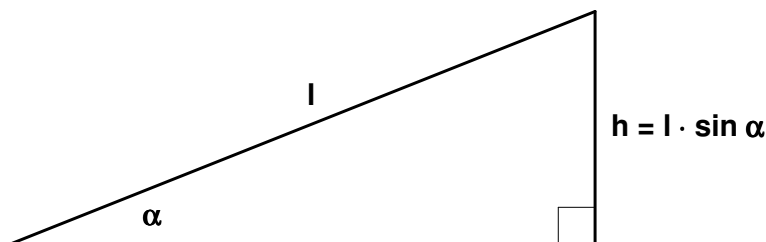
**Kako u postotku izraziti smanjenje broja  $a$  za broj  $b$ ?**

$$p = \frac{a-b}{a} \cdot 100\%.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Sinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.



Pomoću funkcije sinusa odredimo visinu kosine.

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \frac{h}{l} = \sin \alpha \Rightarrow \frac{h}{l} = \sin \alpha / l \Rightarrow h = l \cdot \sin \alpha.$$

Dalje slijedi:

$$p = \frac{E_{gp} - E_k}{E_{gp}} \cdot 100\% \Rightarrow p = \left( \frac{E_{gp}}{E_{gp}} - \frac{E_k}{E_{gp}} \right) \cdot 100\% \Rightarrow p = \left( \frac{E_{gp}}{E_{gp}} - \frac{E_k}{E_{gp}} \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \left( 1 - \frac{E_k}{E_{gp}} \right) \cdot 100\% \Rightarrow p = \left( 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{m \cdot g \cdot h} \right) \cdot 100\% \Rightarrow p = \left( 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{m \cdot g \cdot h} \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \left( 1 - \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot h} \right) \cdot 100\% \Rightarrow [h = l \cdot \sin \alpha] \Rightarrow p = \left( 1 - \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha} \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \left( 1 - \frac{\left( \frac{5 \frac{m}{s}}{2} \right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 100 m \cdot \sin 5.7^\circ} \right) \cdot 100\% \Rightarrow p = 87.2\%.$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 464

Tijelo iz mirovanja počinje kliziti niz kosinu ( $\alpha = 5.7^\circ$ ) i prealivši put od 0.1 km postigne brzinu 18 km/h. Koliki se dio njegove potencijalne energije utrošio na trenje i otpor zraka? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

- A. 87.2%      B. 10.4%      C. 33%      D. 85%      E. 99%

**Rezultat:** A.

### Zadatak 465 (Tonka, srednja škola)

Koliko se visoko popne tijelo mase 0.5 kg kad ga bacimo vertikalno uvis kinetičkom energijom od 20 J (zanemarimo otpor zraka)? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 465

$$m = 0.5 \text{ kg}, \quad E_k = 20 \text{ J}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o

međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Maksimalna visina dana je formulom

$$H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \Rightarrow v_0^2 = 2 \cdot g \cdot H.$$

1. inačica

Zbog zakona o očuvanju energije kinetička energija kojom je tijelo bačeno uvis jednaka je gravitacijskoj potencijalnoj energiji na maksimalnoj visini  $h$ .

$$\begin{aligned} E_k = E_{gp} &\Rightarrow E_{gp} = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{E_k}{m \cdot g} = \\ &= \frac{20 \text{ J}}{0.5 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4.08 \text{ m.} \end{aligned}$$

2. inačica

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= 2 \cdot g \cdot h \\ E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow E_k = m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{E_k}{m \cdot g} = \frac{20 \text{ J}}{0.5 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4.08 \text{ m.}$$

### Vježba 465

Koliko se visoko popne tijelo mase 50 dag kad ga bacimo vertikalno uvis kinetičkom energijom od 20 J (zanemarimo otpor zraka)? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 4.08 m.

### Zadatak 466 (Snježana, srednja škola)

Kuglicu, koja visi na niti dugoj 2 m, otklonimo iz položaja ravnoteže za kut  $15^\circ$  i pustimo. Koliku će brzinu imati kuglica u času kad prolazi kroz položaj ravnoteže? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A.  $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       B.  $1.16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       C.  $1.47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       D.  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### Rješenje 466

$$h = 2 \text{ m}, \quad \alpha = 15^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

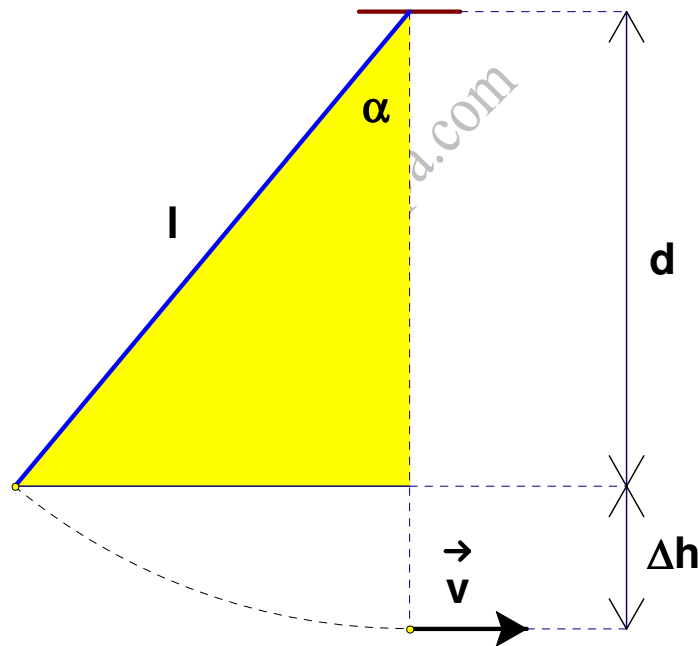
**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Kosinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



Iz pravokutnog trokuta s katetom  $d$  i hipotenuzom  $l$  pomoću funkcije kosinus dobije se:

$$\cos \alpha = \frac{d}{l} \Rightarrow \frac{d}{l} = \cos \alpha \Rightarrow \frac{d}{l} = \cos \alpha \cdot l \Rightarrow d = l \cdot \cos \alpha.$$

Tada je

$$\Delta h = l - d \Rightarrow \Delta h = l - l \cdot \cos \alpha \Rightarrow \Delta h = l \cdot (1 - \cos \alpha).$$

Zbog zakona o očuvanju energije vrijedi:

$$\begin{aligned} E_k = E_{gp} &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot \Delta h \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\Delta h = l \cdot (1 - \cos \alpha)] \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha) \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 2 \text{ m} \cdot (1 - \cos 15^\circ)} = 1.16 \frac{m}{s}$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 466

Kuglicu, koja visi na niti dugoj 200 cm, otklonimo iz položaja ravnoteže za kut  $15^\circ$  i pustimo. Koliku će brzinu imati kuglica u času kad prolazi kroz položaj ravnoteže? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

- A.  $8 \frac{m}{s}$       B.  $1.16 \frac{m}{s}$       C.  $1.47 \frac{m}{s}$       D.  $10 \frac{m}{s}$

**Rezultat:** B.

### Zadatak 467 (Lucija, gimnazija)

Dizalica treba podići jednolikom brzinom teret težine  $4.5 \cdot 10^4 \text{ N}$  na visinu 20 m. Snaga dizalice je 10 kW. Za koje vrijeme će dizalica dići teret? Otpori se zanemaruju.

- A. 4.5 s      B. 9 s      C. 45 s      D. 90 s

### Rješenje 467

$$G = 4.5 \cdot 10^4 \text{ N}, \quad h = 20 \text{ m}, \quad P = 10 \text{ kW} = 10^4 \text{ W}, \quad t = ?$$

Težina tijela  $G$  jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow W = P \cdot t.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

Rad dizalice jednak je gravitacijskoj potencijalnoj energiji tereta na visini  $h$ .

$$\begin{aligned} W = E_{gp} &\Rightarrow P \cdot t = m \cdot g \cdot h \Rightarrow P \cdot t = G \cdot h \Rightarrow P \cdot t = G \cdot h \cdot \frac{1}{P} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{G \cdot h}{P} = \frac{4.5 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 20 \text{ m}}{10^4 \text{ W}} = 90 \text{ s}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 467

Dizalica treba podići jednolikom brzinom teret težine  $9 \cdot 10^4 \text{ N}$  na visinu 10 m. Snaga dizalice je 10 kW. Za koje vrijeme će dizalica dići teret? Otpori se zanemaruju.

- A. 4.5 s      B. 9 s      C. 45 s      D. 90 s

**Rezultat:** D.

### Zadatak 468 (Danijel, gimnazija)

Posuda u obliku kocke brida  $a$  napunjena je do polovine tekućinom gustoće  $\rho$ . Kocka naliježe svojom plohom na horizontalnu podlogu. Koliki rad treba uložiti da bi se kocka okrenula oko svog brida? (ubrzanje slobodnog pada  $g$ ).

$$A. \rho \cdot g \cdot a^4 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{8} \right) \quad B. \rho \cdot g \cdot a^4 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) \quad C. \rho \cdot g \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$
$$D. 3 \cdot \rho \cdot g \cdot a^3 \quad E. 0$$

### Rješenje 468

$$a, \quad \rho, \quad g, \quad W = ?$$

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz omjera mase  $m$  tijela i njegova obujma  $V$ :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.**

$$W = \Delta E.$$

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

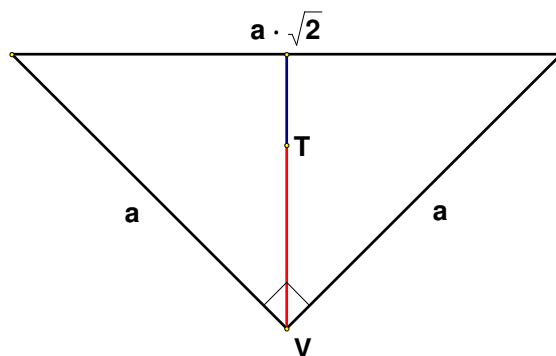
Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid  $a$ , tada je obujam (volumen):

$$V = a^3.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Kod jednakokravnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.



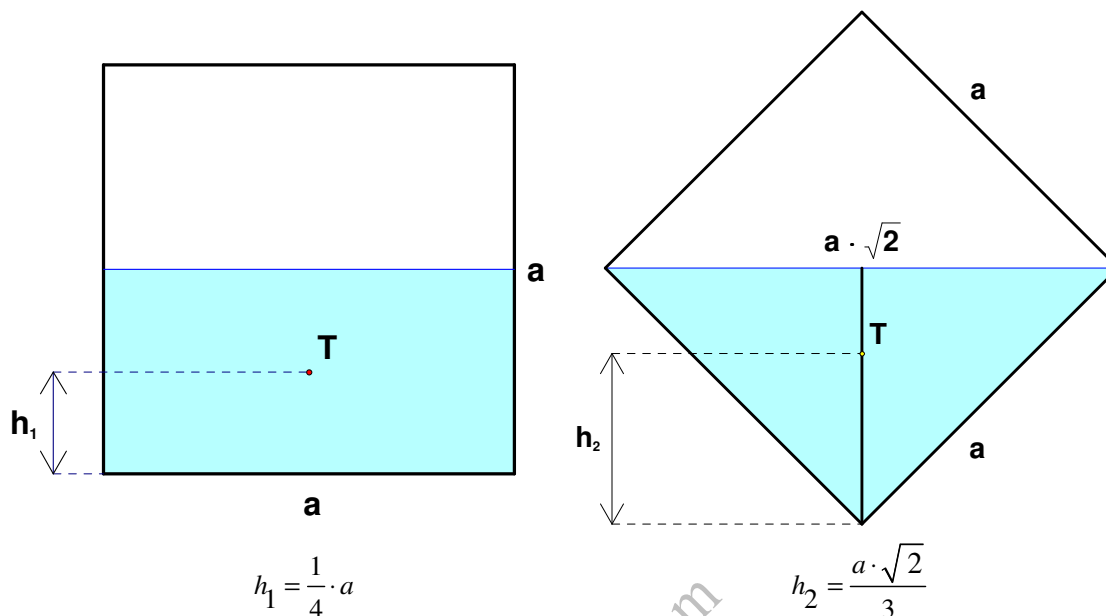
$$|TV| = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{3}.$$



Prvo odredimo masu vode u posudi.

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot a^3 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot a^3.$$

Visine  $h_1$  i  $h_2$  su visine težišta vode u oba položaja kocke.



Za okretanje posude u obliku kocke potrebno je uložiti rad  $W$  koji je jednak promjeni gravitacijske potencijalne energije vode u posudi.

$$\begin{aligned} W &= E_{gp2} - E_{gp1} \Rightarrow W = m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow W = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} h_2 = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{3} \\ h_1 = \frac{1}{4} \cdot a \end{array} \right] \Rightarrow W = m \cdot g \cdot \left( \frac{a \cdot \sqrt{2}}{3} - \frac{1}{4} \cdot a \right) \Rightarrow W = m \cdot g \cdot a \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ m = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot a^3 \right] \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot a^3 \cdot g \cdot a \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow W = \rho \cdot g \cdot a^4 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{8} \right). \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 468

Odmor!

**Rezultat:** ...

### Zadatak 469 (Davor, tehnička škola)

Kuglicu mase 200 g izbacimo početnom brzinom 5 m/s sa visine 1.75 m. Koliko iznosi kinetička energija kuglice kada se nalazi na visini 0.6 m iznad tla? Zanemarite gubitak energije. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

- A. 2.5 J      B. 4.8 J      C. 6 J      D. 7.2 J

### Rješenje 469

$$m = 200 \text{ g} = 0.2 \text{ kg}, \quad v_0 = 5 \text{ m/s}, \quad h = 1.75 \text{ m}, \quad h_1 = 0.6 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \\ E_k = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je brzina nakon prijednog puta  $h$  dana izrazom

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h.$$

1. inačica

Na visini  $h$  kuglica izbačena početnom brzinom  $v_0$  ima ukupnu energiju

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h.$$

Pri padanju kinetička energija povećava se, a gravitacijska potencijalna smanjuje. Na visini  $h_1$  njezina gravitacijska potencijalna energija je

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h_1.$$

Tada kinetička energija iznosi:

$$\begin{aligned} E_k &= E - E_{gp} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow E_k = m \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot v_0^2 + g \cdot h - g \cdot h_1 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_k &= m \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot v_0^2 + g \cdot (h - h_1) \right) = 0.2 \text{ kg} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \left( 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1.75 \text{ m} - 0.6 \text{ m}) \right) = 4.8 \text{ J}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

Kada se kuglica baci početnom brzinom  $v_0$  sa visine  $h$ , njezina će brzina na visini  $h_1$  iznositi

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_1).$$

Tada kinetička energija iznosi:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left( v_0^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_1) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.2 \text{ kg} \cdot \left( \left( 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1.75 \text{ m} - 0.6 \text{ m}) \right) = 4.8 \text{ J}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 469

Kuglicu mase 20 dag izbacimo početnom brzinom 5 m/s sa visine 175 cm. Koliko iznosi kinetička energija kuglice kada se nalazi na visini 60 cm iznad tla? Zanimarite gubitak energije. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

A. 2.5 J      B. 4.8 J      C. 6 J      D. 7.2 J

**Rezultat:** B.

**Zadatak 470 (Tomislav, tehnička škola)**

Dizalica stalnom brzinom podiže teret mase 2 t na visinu 4 m. Koliki je uloženi rad dizalice ako je korisnost 40 %? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

A. 20 kJ      B. 32 kJ      C. 80 kJ      D. 200 kJ

**Rješenje 470**

$$m = 2 \text{ t} = 2000 \text{ kg}, \quad h = 4 \text{ m}, \quad \eta = 40\% = 0.40, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad W_u = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.**

$$W = \Delta E.$$

Korisnost  $\eta$  stroja ili uređaja je količnik korisnog rada (iskorištene energije ili snage) i uloženog rada (dovedene ili uložene energije ili snage).

$$\eta = \frac{W_i}{W_u}.$$

Razlika gravitacijske potencijalne energije na visini  $h$  i na površini zemlje jednaka je obavljenom radu  $W_i$ .

$$W_i = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot 0 \Rightarrow W_i = m \cdot g \cdot h.$$

Računamo uloženi rad  $W_u$ .

$$\eta = \frac{W_i}{W_u} \Rightarrow \eta = \frac{W_i}{W_u} \cdot \frac{W_u}{\eta} \Rightarrow W_u = \frac{W_i}{\eta} \Rightarrow W_u = \frac{m \cdot g \cdot h}{\eta} = \frac{2000 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ m}}{0.40} = 200000 \text{ J} = 200 \text{ kJ}.$$

Odgovor je pod D.



**Vježba 470**

Dizalica stalnom brzinom podiže teret mase 1 t na visinu 8 m. Koliki je uloženi rad dizalice ako je korisnost 40 %? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

A. 20 kJ      B. 32 kJ      C. 80 kJ      D. 200 kJ

**Rezultat:** D.

**Zadatak 471 (Dalibor, gimnazija)**

Granata leti brzinom 400 m/s. Pri eksploziji razleti se u dva dijela jednakih masa. Svaki od njih nastavlja gibanje po pravcu koji zatvara kut od 30° u odnosu na početni smjer. Kolike su brzine dijelova granate?

### Rješenje 471

$$v = 400 \text{ m/s}, \quad m, \quad m_1 = m_2 = \frac{1}{2} \cdot m, \quad \alpha = 30^\circ, \quad v_1 = ?, \quad v_2 = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

#### Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

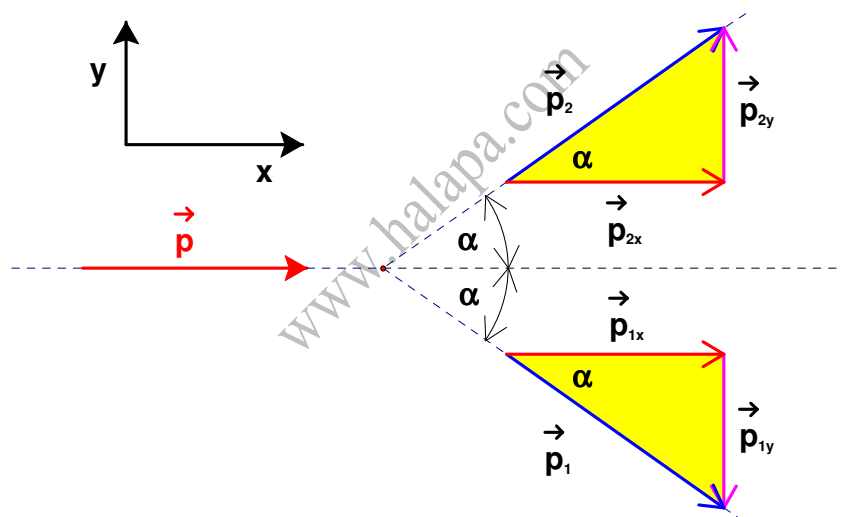
$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Sinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

**Kosinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



Količina gibanja granate prije eksplozije je

$$p = m \cdot v.$$

Rastaviti zadani vektor na komponente znači napisati ga kao zbroj od nekoliko vektora. Svaki vektor količine gibanja dijelova granate  $\vec{p}_1$  i  $\vec{p}_2$  rastavit ćemo na komponente u smjeru x i y osi. Količine gibanja dijelova granate nakon eksplozije iznose:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = m_1 \cdot v_1 \\ p_2 = m_2 \cdot v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \\ p_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \end{array} \right\}.$$

Njihove komponente u smjeru x i y osi glase:

$$\bullet \left. \begin{array}{l} p_{1x} = p_1 \cdot \cos \alpha \\ p_{2x} = p_2 \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_{1x} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \cos \alpha \\ p_{2x} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \cos \alpha \end{array} \right\}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} p_{1y} = p_1 \cdot \sin \alpha \\ p_{2y} = p_2 \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_{1y} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \sin \alpha \\ p_{2y} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \sin \alpha \end{array} \right\}$$

U skalarnom zapisu zakon očuvanja količine gibanja može se zapisati pomoću dvije jednačbe:

$$p = p_{1x} + p_{2x} \quad (\text{u smjeru } x \text{ osi})$$

$$0 = -p_{1y} + p_{2y} \quad (\text{u smjeru } y \text{ osi}).$$

Iz sustava izračunamo tražene brzine.

$$\left. \begin{array}{l} p = p_{1x} + p_{2x} \\ 0 = -p_{1y} + p_{2y} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot v = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \cos \alpha \\ 0 = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot v = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \cos \alpha \quad / \cdot \frac{2}{m \cdot \cos \alpha} \\ 0 = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \sin \alpha \quad / \cdot \frac{2}{m \cdot \sin \alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{2 \cdot v}{\cos \alpha} = v_1 + v_2 \\ 0 = -v_1 + v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot v}{\cos \alpha} = 2 \cdot v_2 \Rightarrow 2 \cdot v_2 = \frac{2 \cdot v}{\cos \alpha} \Rightarrow 2 \cdot v_2 = \frac{2 \cdot v}{\cos \alpha} \quad / : 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{v}{\cos \alpha} = \frac{400 \frac{m}{s}}{\cos 30^\circ} = 461.88 \frac{m}{s}$$

Računamo  $v_1$ .

$$0 = -v_1 + v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 = 461.88 \frac{m}{s}$$

### Vježba 471

Granata leti brzinom 0.4 km / s. Pri eksploziji razleti se u dva dijela jednakih masa. Svaki od njih nastavlja gibanje po pravcu koji zatvara kut od 60° u odnosu na početni smjer. Kolike su brzine dijelova granate?

**Rezultat:**  $v_1 = v_2 = 800 \frac{m}{s}$ .

### Zadatak 472 (Ivana, gimnazija)

Lopta je ispuštena s visine 128 cm. Vrijeme između prvih dvaju odskoka je 0.9 s. Koliki dio energije lopta gubi sudarom sa podlogom i u zraku? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m} / \text{s}^2$ )

### Rješenje 472

$$h = 128 \text{ cm} = 1.28 \text{ m}, \quad t = 0.9 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m} / \text{s}^2, \quad p = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Vertikalni hitac prema gore (uvis) sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. **Let do najviše točke traje koliko i pad s te točke, tj. za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.**

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.

Na primjer,

$$9\% = \frac{9}{100}, \quad 81\% = \frac{81}{100}, \quad 4.5\% = \frac{4.5}{100}, \quad 547\% = \frac{547}{100}, \quad p\% = \frac{p}{100}.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.

Na primjer,

$$9\% = \frac{9}{100}, \quad 81\% = \frac{81}{100}, \quad 4.5\% = \frac{4.5}{100}, \quad 547\% = \frac{547}{100}, \quad p\% = \frac{p}{100}.$$

**Koliki je postotak broja a od broja b?**

$$\frac{a}{b} \cdot 100\%$$

Budući da je kod vertikalnog hica uvis potrebno jednako vrijeme za uzdizanje i padanje lopte s iste visine, nalazimo da je za vrijeme  $\frac{t}{2}$  lopta na visini  $h_1$ .

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

Gravitacijska potencijalna energija koju lopta ima na visini  $h_1$  izražena u postotku u odnosu na visinu h iznosi:

$$\eta = \frac{E_{gp1}}{E_{gp}} \cdot 100\% \Rightarrow \eta = \frac{m \cdot g \cdot h_1}{m \cdot g \cdot h} \cdot 100\% \Rightarrow \eta = \frac{m \cdot g \cdot h_1}{m \cdot g \cdot h} \cdot 100\% \Rightarrow \eta = \frac{h_1}{h} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2}{h} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(\frac{0.9 s}{2}\right)^2}{1.28 m} \cdot 100\% = 77.60\%.$$

Gubitak energije iznosi:

$$p = 100\% - 77.60\% = 22.40\%.$$

### Vježba 472

Lopta je ispuštena s visine 12.8 dm. Vrijeme između prvih dvaju odskoka je 0.8 s. Koliki dio energije lopta gubi sudarom sa podlogom i u zraku? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 38.69 %.

### Zadatak 473 (Zlatko, srednja škola)

Gumena lopta ispuštena s visine 120 cm odskoči na visinu 90 cm. Kolikom je brzinom treba baciti da s visine 120 cm odskoči na 120 cm? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 473

$h_1 = 120 \text{ cm} = 1.20 \text{ m}$ ,  $h_2 = 90 \text{ cm} = 0.90 \text{ m}$ ,  $h_3 = 120 \text{ cm} = 1.20 \text{ m}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  
 $v = ?$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.

Na primjer,

$$9\% = \frac{9}{100}, \quad 81\% = \frac{81}{100}, \quad 4.5\% = \frac{4.5}{100}, \quad 547\% = \frac{547}{100}, \quad p\% = \frac{p}{100}.$$

Koliki je postotak broja a od broja b?

$$\frac{a}{b} \cdot 100\%.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Gravitacijska potencijalna energija lopte iznosi na:

- visini  $h_1$

$$E_{gp1} = m \cdot g \cdot h_1$$

- visini  $h_2$

$$E_{gp2} = m \cdot g \cdot h_2.$$

Dio energije koji preostaje nakon pada lopte s visine  $h_1$  i uzdizanja do visine  $h_2$  izražen u postotku iznosi:

$$\eta = \frac{E_{gp2}}{E_{gp1}} \Rightarrow \eta = \frac{m \cdot g \cdot h_2}{m \cdot g \cdot h_1} \Rightarrow \eta = \frac{m \cdot g \cdot h_2}{m \cdot g \cdot h_1} \Rightarrow \eta = \frac{h_2}{h_1}.$$

Bacimo li loptu brzinom v sa visine  $h_1$ , imat će ukupnu energiju

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h_1.$$

Dio te energije

$$\eta \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h_1 \right)$$

bit će pretvoren u gravitacijsku potencijalnu energiju koju će lopta imati kada odskoči do visine  $h_3$ .

$$\eta \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h_1 \right) = m \cdot g \cdot h_3.$$

Računamo brzinu v.

$$\eta \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h_1 \right) = m \cdot g \cdot h_3 \Rightarrow \left[ \eta = \frac{h_2}{h_1} \right] \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h_1 \right) = m \cdot g \cdot h_3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot h_1 \right) = m \cdot g \cdot h_3 \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot h_1 \right) = m \cdot g \cdot h_3 \cdot \frac{h_1}{m \cdot h_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot h_1 = \frac{g \cdot h_3 \cdot h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot h_1 = \frac{g \cdot h_3 \cdot h_1}{h_2} \cdot 2 \Rightarrow v^2 + 2 \cdot g \cdot h_1 = \frac{2 \cdot g \cdot h_3 \cdot h_1}{h_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h_3 \cdot h_1}{h_2} - 2 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h_3 \cdot h_1}{h_2} - 2 \cdot g \cdot h_1 \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_3 \cdot h_1}{h_2} - 2 \cdot g \cdot h_1} \Rightarrow v = \sqrt{g \cdot h_1 \cdot \left( \frac{2 \cdot h_3}{h_2} - 2 \right)} = \\ &= \sqrt{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1.20 m \cdot \left( \frac{2 \cdot 1.20 m}{0.90 m} - 2 \right)} = 2.80 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

### Vježba 473

Gumena lopta ispuštena s visine 12 dm odskoči na visinu 9 dm. Kolikom je brzinom treba baciti da s visine 12 dm odskoči na 12 dm? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 2.80 m/s.

### Zadatak 474 (Pascal, gimnazija)

Na dva nepomična tijela masa  $m$  i  $4 \cdot m$  počinje djelovati jednaka sila  $F$  na putu  $s$ . Koliki je omjer kinetičkih energija na kraju puta  $s$ ?

### Rješenje 474

$$m_1 = m, \quad m_2 = 4 \cdot m, \quad F, \quad s, \quad \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je  $s$  put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$ .

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{k1}}{E_{k2}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2}{\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2} \Rightarrow \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2}{\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2} \Rightarrow \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{m_2 \cdot v_2^2} \Rightarrow \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot a_1 \cdot s}{m_2 \cdot 2 \cdot a_2 \cdot s} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot a_1 \cdot s}{m_2 \cdot 2 \cdot a_2 \cdot s} \Rightarrow \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{m_1 \cdot a_1}{m_2 \cdot a_2} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} F = m_1 \cdot a_1 \\ F = m_2 \cdot a_2 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{F}{F} \Rightarrow \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{F}{F} \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = 1 \Rightarrow E_{k1} = E_{k2}.$$

Kinetičke energije su jednake.

### Vježba 474

Na dva nepomična tijela masa  $m$  i  $5 \cdot m$  počinje djelovati jednaka sila  $F$  na putu  $s$ . Koliki je omjer kinetičkih energija na kraju puta  $s$ ?

**Rezultat:**      Jednake su.

### Zadatak 475 (Asterix, gimnazija)

Tijelo se giba pravocrtno po vodoravnoj površini i ima kinetičku energiju od 24 J. Na tijelo u suprotnom smjeru od smjera gibanja počinje djelovati stalna vodoravna sila iznosa 4.0 N. Koliki put prijeđe tijelo do zaustavljanje? Trenje zanemarite.

### Rješenje 475

$$E_k = 24 \text{ J} \quad , \quad F = 4.0 \text{ N}, \quad s = ?$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Rad  $W$  koji obavi sila  $F$  na putu  $s$  da zaustavi tijelo mora biti jednaka njegovoj kinetičkoj energiji.

$$W = E_k \Rightarrow F \cdot s = E_k \Rightarrow F \cdot s = E_k \cdot \frac{1}{F} \Rightarrow s = \frac{E_k}{F} = \frac{24 \text{ J}}{4.0 \text{ N}} = 6 \text{ m}.$$

### Vježba 475

Tijelo se giba pravocrtno po vodoravnoj površini i ima kinetičku energiju od 48 J. Na tijelo u suprotnom smjeru od smjera gibanja počinje djelovati stalna vodoravna sila iznosa 8.0 N. Koliki put prijeđe tijelo do zaustavljanje? Trenje zanemarite.

**Rezultat:**      6 m.

### Zadatak 476 (Luka, tehnička škola)

U otvorena prazna kolica mase 800 kg, koja se gibaju horizontalno brzinom 1.5 m / s, upadne okomito odozgo vreća od 600 kg šljunka. Kolika je brzina kolica napunjenih šljunkom?

$$A. 1.50 \frac{m}{s} \quad B. 2.00 \frac{m}{s} \quad C. 1.02 \frac{m}{s} \quad D. 0.86 \frac{m}{s} \quad E. 0.63 \frac{m}{s}$$

### Rješenje 476

$m_1 = 800 \text{ kg}$  masa kolica,       $v_1 = 1.5 \text{ m/s}$  brzina kolica,       $m_2 = 600 \text{ kg}$  masa šljunka,  
 $v_2 = 0 \text{ m/s}$  početna brzina šljunka u horizontalnom smjeru,       $v = ?$  zajednička brzina kolica i šljunka

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad , \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

### Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'.$$

Savršeno neelastičan sudar

Dva tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  i brzina  $v_1$  i  $v_2$  centralno se sudare pa se nakon sudara gibaju zajedno brzinom  $v$ .

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v.$$

Budući da je sudar neelastičan zajednička brzina kolica i šljunka u njima iznosi:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v &= m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{800 \text{ kg} \cdot 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 600 \text{ kg} \cdot 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{800 \text{ kg} + 600 \text{ kg}} = 0.86 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 476

U otvorena prazna kolica mase 0.8 t, koja se gibaju horizontalno brzinom 5.4 km / h, upadne okomito odozgo vreća od 0.6 t šljunka. Kolika je brzina kolica napunjenih šljunkom?

A.  $1.50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$     B.  $2.00 \frac{\text{m}}{\text{s}}$     C.  $1.02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$     D.  $0.86 \frac{\text{m}}{\text{s}}$     E.  $0.63 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

**Rezultat:** D.

### Zadatak 477 (Branka, maturantica)

Brzina vozila mase 12 t na cesti s koeficijentom trenja 0.7 smanji se sa 90 km / h na 54 km / h. Odredi zaustavni put. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

### Rješenje 477

$$\begin{aligned} m &= 12 \text{ t} = 1.2 \cdot 10^4 \text{ kg}, & \mu &= 0.7, & v_1 &= 90 \text{ km / h} = [90 : 3.6] = 25 \text{ m / s}, \\ v_2 &= 54 \text{ km / h} = [54 : 3.6] = 15 \text{ m / s}, & g &= 9.81 \text{ m / s}^2, & s &= ? \end{aligned}$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

Težina tijela  $G$  jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine  $G$  iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Rad sile trenja jednak je promjeni kinetičke energije vozila.

$$W_{tr} = \Delta E_k \Rightarrow F_{tr} \cdot s = E_{k1} - E_{k2} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_2^2) \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_2^2) \cdot \frac{1}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot g} \cdot (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2 \cdot 0.7 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} \cdot \left( \left( 25 \frac{m}{s} \right)^2 - \left( 15 \frac{m}{s} \right)^2 \right) = 29.12 \text{ m.}$$

### Vježba 477

Brzina vozila mase 12 t na cesti s koeficijentom trenja 0.9 smanji se sa 90 km / h na 54 km / h. Odredi zaustavni put. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:** 22.65 m.

### Zadatak 478 (Branka, maturantica)

Učenik mase 60 kg je trčeći najvećom brzinom na 200 m postigao energiju od 1 kJ. Za koje je vrijeme pretrčao tih 200 m?

### Rješenje 478

$$m = 60 \text{ kg}, \quad s = 200 \text{ m}, \quad E_k = 1 \text{ kJ} = 1000 \text{ J}, \quad t = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v},$$

gdje je  $v$  stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$\left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ t = \frac{s}{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_k \\ t = \frac{s}{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_k \cdot \frac{2}{m} \\ t = \frac{s}{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v^2 = \frac{2 \cdot E_k}{m} \\ t = \frac{s}{v} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} v^2 = \frac{2 \cdot E_k}{m} \\ t = \frac{s}{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} \\ t = \frac{s}{v} \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = s \cdot \sqrt{\frac{m}{2 \cdot E_k}} = 200 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{60 \text{ kg}}{2 \cdot 1000 \text{ J}}} = 34.64 \text{ s.}$$

### Vježba 478

Čovjek mase 120 kg je trčeći najvećom brzinom na 200 m postigao energiju od 2 kJ. Za koje je vrijeme pretrčao tih 200 m?

**Rezultat:** 34.64 s.

### Zadatak 479 (Branka, maturantica)

Automobil mase 1 t poveća kinetičku energiju za 126 kJ povećanjem brzine za 6 m / s. Kolika je bila brzina automobila?

### Rješenje 479

$$m = 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}, \quad \Delta E_k = 126 \text{ kJ} = 1.26 \cdot 10^5 \text{ J}, \quad \Delta v = 6 \text{ m / s}, \quad v = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Neka je  $v$  brzina automobila. Njezinim povećanjem za  $\Delta v$  povećala se i kinetička energija automobila pa vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \Delta E_k \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \Delta E_k \quad / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow (v + \Delta v)^2 - v^2 &= \frac{2 \cdot \Delta E_k}{m} \Rightarrow v^2 + 2 \cdot v \cdot \Delta v + (\Delta v)^2 - v^2 = \frac{2 \cdot \Delta E_k}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 + 2 \cdot v \cdot \Delta v + (\Delta v)^2 - v^2 &= \frac{2 \cdot \Delta E_k}{m} \Rightarrow 2 \cdot v \cdot \Delta v + (\Delta v)^2 = \frac{2 \cdot \Delta E_k}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot v \cdot \Delta v &= \frac{2 \cdot \Delta E_k}{m} - (\Delta v)^2 \Rightarrow 2 \cdot v \cdot \Delta v = \frac{2 \cdot \Delta E_k}{m} - (\Delta v)^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \Delta v} \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= \frac{\Delta E_k}{m \cdot \Delta v} - \frac{\Delta v}{2} = \frac{1.26 \cdot 10^5 \text{ J}}{1000 \text{ kg} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} - \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

### Vježba 479

Automobil mase 1.2 t poveća kinetičku energiju za 126 kJ povećanjem brzine za 6 m / s. Kolika je bila brzina automobila?

**Rezultat:** 14.5 m / s.

### Zadatak 480 (Luka, gimnazija)

Tijelo mase 0.2 kg klizi niz kosinu i prijeđe visinsku razliku od 10 m. Izračunajte kinetičku energiju tijela na kraju puta, ako je krenulo iz stanja mirovanja, a sila trenja je zanemariva. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

A. 0.2 J      B. 1.96 J      C. 19.62 J      D. 2 J

### Rješenje 480

$$m = 0.2 \text{ kg}, \quad h = 10 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad E_k = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Kinetička energija tijela pri dnu kosine bit će jednaka gravitacijskoj potencijalnoj energiji na vrhu kosine.

$$E_k = E_{gp} \Rightarrow E_k = m \cdot g \cdot h = 0.2 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 19.62 \text{ J}.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 480

Tijelo mase 20 dag klizi niz kosinu i prijeđe visinsku razliku od 100 dm. Izračunajte kinetičku energiju tijela na kraju puta, ako je krenulo iz stanja mirovanja, a sila trenja je zanemariva. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

- A. 0.2 J      B. 1.96 J      C. 19.62 J      D. 2 J

**Rezultat:** C.

[www.halapa.com](http://www.halapa.com)