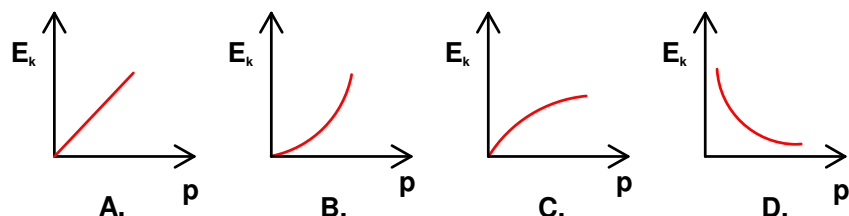


Zadatak 441 (Valentina, gimnazija)

Tijelo se giba jednoliko ubrzano. Koji graf prikazuje kako se kinetička energija tijela E_k mijenja ovisno o količini gibanja p ? Na početku je tijelo mirovalo.



Rješenje 441

$$E_k, \quad p$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Najjednostavniji oblik polinoma drugog stupnja je funkcija $f(x) = a \cdot x^2$. Njezin graf je krivulja koja se zove parabola. Ako je $a > 0$ parabola će imati 'otvor prema gore'.

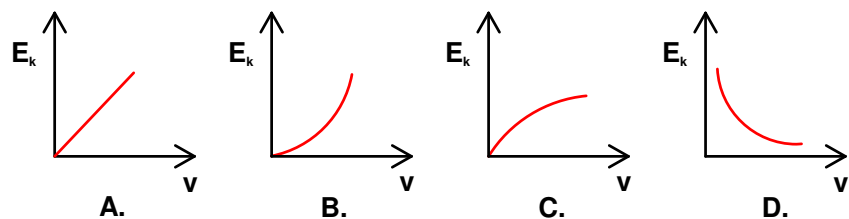
Preoblikujmo formulu za kinetičku energiju.

$$\begin{aligned} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cdot v^2}{m} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{(m \cdot v)^2}{m} \Rightarrow [p = m \cdot v] \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{m} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot p^2 \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2 \cdot m} \cdot p^2 \text{ fizika} \\ f(x) &= a \cdot x^2 \text{ matematika} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Kinetička energija tijela E_k razmjerna je s kvadratom količine gibanja p . Graf je parabola. Odgovor je pod B.

Vježba 441

Tijelo se giba jednoliko ubrzano. Koji graf prikazuje kako se kinetička energija tijela E_k mijenja ovisno o brzini v ? Na početku je tijelo mirovalo.



Rezultat: B.

Zadatak 442 (Pixy, tehnička škola)

Prvo tijelo mase m bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom v_0 i postiglo je maksimalnu visinu H_1 . Drugo tijelo mase $2 \cdot m$ bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom $3 \cdot v_0$ i postiglo je maksimalnu visinu H_2 . Koliki je omjer tih visina?

$$A. \frac{9}{4} \quad B. \frac{3}{2} \quad C. 3 \quad D. 9$$

Rješenje 442

$$m, \quad v_0, \quad H_1, \quad 2 \cdot m, \quad 3 \cdot v_0, \quad H_2, \quad \frac{H_2}{H_1} = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac uvis je gibanje složeno od jednolikoga pravocrtnog gibanja prema gore i slobodnog pada prema dolje. Najviši domet h što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je $v = 0$. Onda je

$$h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Mehanička energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije u mehaničkom sustavu, tj. energija koja ovisi o položaju i gibanju tijela zbog djelovanja sile.

1. inačica

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \\ H_2 &= \frac{(3 \cdot v_0)^2}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{\frac{(3 \cdot v_0)^2}{2 \cdot g}}{\frac{v_0^2}{2 \cdot g}} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{(3 \cdot v_0)^2}{v_0^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{(3 \cdot v_0)^2}{v_0^2} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{9 \cdot v_0^2}{v_0^2} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{9 \cdot v_0^2}{v_0^2} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = 9.$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

Zbog zakona očuvanja kinetička energija kojom je tijelo bačeno vertikalno uvis jednaka je gravitacijskoj potencijalnoj energiji koju tijelo ima na maksimalnoj visini. Iz sustava jednadžba slijedi:

$$\left. \begin{aligned} E_{k1} &= E_{gp1} \\ E_{k2} &= E_{gp2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 &= m \cdot g \cdot H_1 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot (3 \cdot v_0)^2 &= 2 \cdot m \cdot g \cdot H_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot (3 \cdot v_0)^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2} = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot H_2}{m \cdot g \cdot H_1} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot 9 \cdot v_0^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2} = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot H_2}{m \cdot g \cdot H_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot 9 \cdot v_0^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2} = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot H_2}{m \cdot g \cdot H_1} \Rightarrow \frac{18}{1} = \frac{2 \cdot H_2}{H_1} \Rightarrow \frac{2 \cdot H_2}{H_1} = \frac{18}{1} \Rightarrow \frac{2 \cdot H_2}{H_1} = \frac{18}{1} \quad / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{9}{1} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = 9.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 442

Prvo tijelo mase m bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom v_0 i postiglo je maksimalnu visinu H_1 . Drugo tijelo mase $3 \cdot m$ bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom $3 \cdot v_0$ i postiglo je maksimalnu visinu H_2 . Koliki je omjer tih visina?

A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 9

Rezultat: D.

Zadatak 443 (Pixy, tehnička škola)

Automobil se ubrza iz stanja mirovanja do brzine 30 m/s za 10 s . Kolika je masa automobila ako je srednja snaga motora potrebna za ubrzanje 4800 W ?

Rješenje 443

$$v_1 = 0 \text{ m/s}, \quad v_2 = 30 \text{ m/s}, \quad t = 10 \text{ s}, \quad P = 4800 \text{ W}, \quad m = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju.

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

$$\left. \begin{array}{l} W = \Delta E_k \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{\Delta E_k}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{2 \cdot t} \Rightarrow \frac{m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{2 \cdot t} = P \Rightarrow \frac{m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{2 \cdot t} = P \quad / \cdot \frac{2 \cdot t}{v_2^2 - v_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{2 \cdot t \cdot P}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{2 \cdot 10 \text{ s} \cdot 4800 \text{ W}}{\left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 100 \text{ kg}.$$

Vježba 443

Automobil se ubrza iz stanja mirovanja do brzine 30 m/s za 10 s . Kolika je masa automobila ako je srednja snaga motora potrebna za ubrzanje 4.8 kW ?

Rezultat: 100 kg.

Zadatak 444 (Ana, medicinska škola)

Gumena lopta mase 100 g padne na vodoravnu površinu stola s visine 25.6 cm i odskočivši od nje podigne se na visinu 19.6 cm. Koliku je energiju izgubila lopta pri udaru u površinu stola? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

- A. 0.09 J B. 0.02 J C. 0.04 J D. 0.06 J

Rješenje 444

$$m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}, \quad h_1 = 25.6 \text{ cm} = 0.256 \text{ m}, \quad h_2 = 19.6 \text{ cm} = 0.196 \text{ m}, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

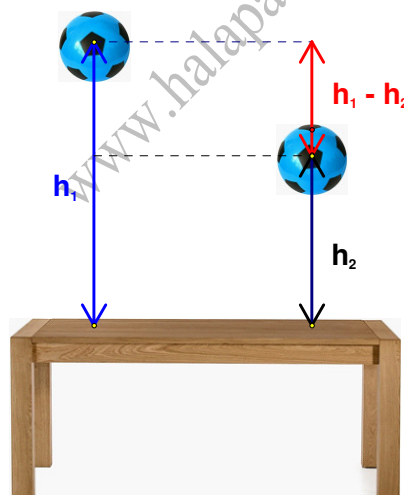
$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Gubitak energije lopte jednak je razlici gravitacijske potencijalne energije koju ona ima na visini h_1 i visini h_2 .

$$\Delta E = E_{gp1} - E_{gp2} \Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot h_1 - m \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = \\ = 0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0.256 \text{ m} - 0.196 \text{ m}) = 0.06 \text{ J}.$$

Odgovor je pod D.



Vježba 444

Gumena lopta mase 100 g padne na vodoravnu površinu stola s visine 25.3 cm i odskočivši od nje podigne se na visinu 19.3 cm. Koliku je energiju izgubila lopta pri udaru u površinu stola? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

- A. 0.09 J B. 0.02 J C. 0.04 J D. 0.06 J

Rezultat: D.

Zadatak 445 (Petra, medicinska škola)

Vagon mase 10 t giba se stalnom brzinom od 20 km / h. Drugi vagon, mase 12 t, sustigne ga brzinom od 29.2 km / h, a zatim se gibaju zajedno. Kolikom će se brzinom gibati oba vagona zajedno?

A. $20.0 \frac{km}{h}$ B. $24.0 \frac{km}{h}$ C. $25.0 \frac{km}{h}$ D. $26.0 \frac{km}{h}$

Rješenje 445

$$m_1 = 10 \text{ t} = 10^4 \text{ kg}, \quad v_1 = 20 \text{ km / h}, \quad m_2 = 12 \text{ t} = 1.2 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad v_2 = 29.2 \text{ km / h},$$
$$v_1 = v_2 = v = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Savršeno neelastičan sudar

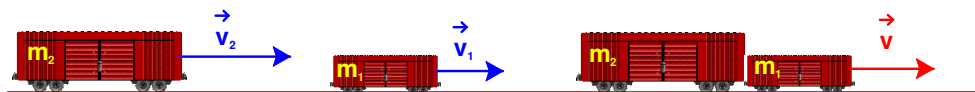
Dva tijela masa m_1 i m_2 i brzina v_1 i v_2 centralno se sudare pa se nakon sudara gibaju zajedno brzinom v .

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v.$$

Budući da je sudar neelastičan, brzina v kojom se vagoni zajedno gibaju nakon sudara iznosi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} =$$
$$= \frac{10^4 \text{ kg} \cdot 20 \frac{km}{h} + 1.2 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 29.2 \frac{km}{h}}{10^4 \text{ kg} + 1.2 \cdot 10^4 \text{ kg}} = 25.0 \frac{km}{h}.$$

Odgovor je pod C.



Vježba 445

Vagon mase 20 t giba se stalnom brzinom od 20 km / h. Drugi vagon, mase 24 t, sustigne ga brzinom od 29.2 km / h, a zatim se gibaju zajedno. Kolikom će se brzinom gibati oba vagona zajedno?

A. $20.0 \frac{km}{h}$ B. $24.0 \frac{km}{h}$ C. $25.0 \frac{km}{h}$ D. $26.0 \frac{km}{h}$

Rezultat: C.

Zadatak 446 (Ante, tehnička škola)

Kamion mase 3 t i brzine 54 km / h sudari se s automobilom mase 1 t, brzine 90 km / h. Nakon sudara se kamion i automobil gibaju zajedno. Kolika je energija deformacije?

Rješenje 446

$$m_1 = 3 \text{ t} = 3000 \text{ kg}, \quad v_1 = 54 \text{ km / h} = [54 : 3.6] = 15 \text{ m / s}, \quad m_2 = 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg},$$

$$v_2 = 90 \text{ km/h} = [90 : 3.6] = 25 \text{ m/s}, \quad Q = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'.$$

Savršeno neelastičan sudar

Dva tijela masa m_1 i m_2 i brzina v_1 i v_2 centralno se sudare pa se nakon sudara gibaju zajedno brzinom v .

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v.$$

Pri sudaru vrijedi zakon očuvanja količine gibanja, dok kinetička energija nije očuvana jer se dio energije gubi na promjenu unutarnje energije, dakle, pri sudaru dolazi do 'gubitka' mehaničke energije. Ukupna energija Q pretvorena u druge oblike je:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2$$

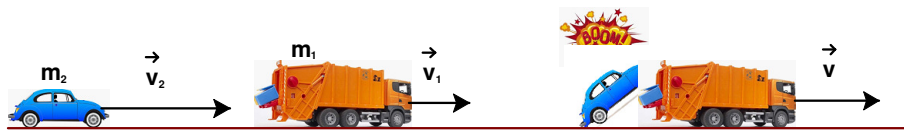
ili

$$Q = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)^2}{m_1 + m_2}$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)^2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3000 \text{ kg} \cdot \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(3000 \text{ kg} \cdot 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1000 \text{ kg} \cdot 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{3000 \text{ kg} + 1000 \text{ kg}} =$$

$$= 37500 \text{ J} = 37.5 \text{ kJ}.$$



Vježba 446

Nema zadatka.

Rezultat: !

Zadatak 447 (Darko, srednja škola)

Komad bakra i komad aluminija jednakih volumena nalaze se na jednakoj visini. Koja od ove dvije kovine ima veću gravitacijsku potencijalnu energiju i koliko puta veću? (gustoća bakra $\rho_1 = 8900 \text{ kg/m}^3$, gustoća aluminija $\rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 447

$$V_1 = V_2 = V, \quad h_1 = h_2 = h, \quad \rho_1 = 8900 \text{ kg / m}^3, \quad \rho_2 = 2700 \text{ kg / m}^3, \quad \frac{E_{gp1}}{E_{gp2}} = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase m tijela i njegova obujma V :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

$$\begin{aligned} \frac{E_{gp1}}{E_{gp2}} &= \frac{m_1 \cdot g \cdot h_1}{m_2 \cdot g \cdot h_2} \Rightarrow \frac{E_{gp1}}{E_{gp2}} = \frac{\rho_1 \cdot V_1 \cdot g \cdot h_1}{\rho_2 \cdot V_2 \cdot g \cdot h_2} \Rightarrow \frac{E_{gp1}}{E_{gp2}} = \frac{\rho_1 \cdot V \cdot g \cdot h}{\rho_2 \cdot V \cdot g \cdot h} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{E_{gp1}}{E_{gp2}} = \frac{\rho_1 \cdot V \cdot g \cdot h}{\rho_2 \cdot V \cdot g \cdot h} \Rightarrow \frac{E_{gp1}}{E_{gp2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \Rightarrow \frac{E_{gp1}}{E_{gp2}} = \frac{8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \Rightarrow \frac{E_{gp1}}{E_{gp2}} = 3.3. \end{aligned}$$

Vježba 447

Komad srebra i komad čelika jednakih volumena nalaze se na jednakoj visini. Koja od ove dvije kovine ima veću gravitacijsku potencijalnu energiju i koliko puta veću? (gustoća srebra $\rho_1 = 10500 \text{ kg / m}^3$, gustoća čelika $\rho_2 = 7700 \text{ kg / m}^3$)

Rezultat: 1.36.

Zadatak 448 (Darko, srednja škola)

Tri kugle od aluminija, bakra i zlata imaju jednake volumene. Na kojoj visini trebaju biti ove kugle da imaju jednake gravitacijske potencijalne energije, ako se zna da je kugla od aluminija na visini 10 m? (gustoća aluminija $\rho_1 = 2700 \text{ kg / m}^3$, gustoća bakra $\rho_2 = 8900 \text{ kg / m}^3$, gustoća zlata $\rho_3 = 19300 \text{ kg / m}^3$)

Rješenje 448

$$V_1 = V_2 = V_3 = V, \quad h_1 = 10 \text{ m}, \quad \rho_1 = 2700 \text{ kg / m}^3, \quad \rho_2 = 8900 \text{ kg / m}^3, \\ \rho_3 = 19300 \text{ kg / m}^3, \quad h_2 = ?, \quad h_3 = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase m tijela i njegova obujma V :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

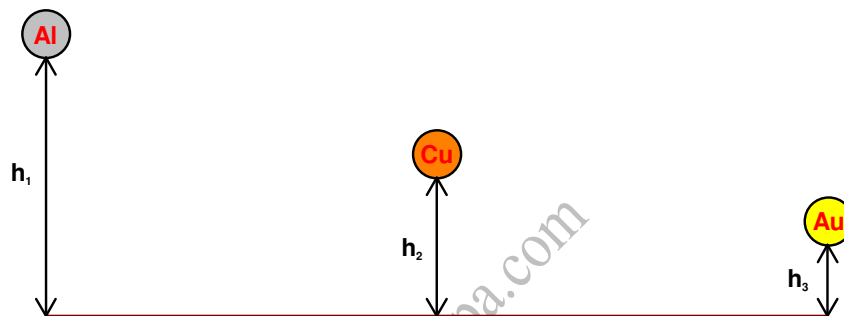
gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kugla od aluminija nalazi se na visini h_1 . Budući da sve tri kugle imaju jednaku gravitacijsku potencijalnu energiju, vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} E_{gp2} &= E_{gp1} \\ E_{gp3} &= E_{gp1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m_2 \cdot g \cdot h_2 &= m_1 \cdot g \cdot h_1 \\ m_3 \cdot g \cdot h_3 &= m_1 \cdot g \cdot h_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \rho_2 \cdot V_2 \cdot g \cdot h_2 &= \rho_1 \cdot V_1 \cdot g \cdot h_1 \\ \rho_3 \cdot V_3 \cdot g \cdot h_3 &= \rho_1 \cdot V_1 \cdot g \cdot h_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \rho_2 \cdot V \cdot g \cdot h_2 = \rho_1 \cdot V \cdot g \cdot h_1 \\ \rho_3 \cdot V \cdot g \cdot h_3 = \rho_1 \cdot V \cdot g \cdot h_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \rho_2 \cdot V \cdot g \cdot h_2 = \rho_1 \cdot V \cdot g \cdot h_1 \cdot \frac{1}{\rho_2 \cdot V \cdot g} \\ \rho_3 \cdot V \cdot g \cdot h_3 = \rho_1 \cdot V \cdot g \cdot h_1 \cdot \frac{1}{\rho_3 \cdot V \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} h_2 = \frac{\rho_1 \cdot h_1}{\rho_2} \\ h_3 = \frac{\rho_1 \cdot h_1}{\rho_3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h_2 = \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \text{ m}}{8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \\ h_3 = \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \text{ m}}{19300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h_2 = 3.03 \text{ m} \\ h_3 = 1.40 \text{ m} \end{array} \right\}.$$



Vježba 448

Tri kugle od aluminija, bakra i zlata imaju jednake volumene. Na kojoj visini trebaju biti ove kugle da imaju jednake gravitacijske potencijalne energije, ako se zna da je kugla od aluminija na visini 100 dm? (gustoća aluminija $\rho_1 = 2700 \text{ kg / m}^3$, gustoća bakra $\rho_2 = 8900 \text{ kg / m}^3$, gustoća zlata $\rho_3 = 19300 \text{ kg / m}^3$)

Rezultat: $h_2 = 3.03 \text{ m}$, $h_3 = 1.40 \text{ m}$.

Zadatak 449 (Ante, tehnička škola)

Automobil mase 1 t ubrza se iz stanja mirovanja do brzine 25 m / s za 10 s. Kolika je srednja snaga motora potrebna za ubrzavanje?

Rješenje 449

$$m = 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}, \quad v_1 = 0 \text{ m / s}, \quad v_2 = 25 \text{ m / s}, \quad t = 10 \text{ s}, \quad P = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} W &= \Delta E_k \\ P &= \frac{W}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \frac{\Delta E_k}{t} \Rightarrow P = \frac{E_{k2} - E_{k1}}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2}{t} \Rightarrow \\
 \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(\left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{10 \text{ s}} = 31250 \text{ W}.
 \end{aligned}$$

Vježba 449

Automobil mase 1 t ubrza se iz stanja mirovanja do brzine 90 km / h za 10 s. Kolika je srednja snaga motora potrebna za ubrzavanje?

Rezultat: 31250 W.

Zadatak 450 (Ante, tehnička škola)

Dizalica snage 3.5 kW podiže tijelo mase 250 kg na visinu 16 m. Koliko dugo traje podizanje? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 450

$$P = 3.5 \text{ kW} = 3500 \text{ W}, \quad m = 250 \text{ kg}, \quad h = 16 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad t = ?$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} W &= E_{gp} \\ P &= \frac{W}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \frac{E_{gp}}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \cdot \frac{t}{P} \Rightarrow t = \frac{m \cdot g \cdot h}{P} = \\
 = \frac{250 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 16 \text{ m}}{3500 \text{ W}} = 11.21 \text{ s}.
 \end{aligned}$$

Vježba 450

Dizalica snage 7.0 kW podiže tijelo mase 500 kg na visinu 16 m. Koliko dugo traje podizanje? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: 11.21 s.

Zadatak 451 (Vesna, srednja škola)

Automobil mase 1200 kg ubrza iz mirovanja do brzine 90 km / h za 8 s. Kolika je prosječna snaga motora toga automobila? Zanimarite trenje.

Rješenje 451

$$m = 1200 \text{ kg}, \quad v_1 = 0 \text{ m / s}, \quad v_2 = 90 \text{ km / h} = [90 : 3.6] = 25 \text{ m / s}, \quad t = 8 \text{ s}, \quad P = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

$$\left. \begin{array}{l} W = \Delta E_k \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{\Delta E_k}{t} \Rightarrow P = \frac{E_{k2} - E_{k1}}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2}{t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1200 \text{ kg} \cdot \left(\left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{8 \text{ s}} = 46875 \text{ W}.$$

Vježba 451

Automobil mase 2400 kg ubrzava iz mirovanja do brzine 90 km/h za 16 s. Kolika je prosječna snaga motora toga automobila? Zanimarite trenje.

Rezultat: 46875 W.

Zadatak 452 (Ana, srednja škola)

Na kojoj će se udaljenosti zaustaviti automobil koji se giba brzinom 54 km/h, nakon gašenja motora, ako je koeficijent trenja 0.05? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 452

$$v = 54 \text{ km/h} = [54 : 3.6] = 15 \text{ m/s}, \quad \mu = 0.05, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Sila trenja pri gibanju automobila je

$$F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Rad je jednak promjeni kinetičke energije pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} W = E_k \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Iz formule za rad odredimo put s.

$$W = F_{tr} \cdot s \Rightarrow F_{tr} \cdot s = W \Rightarrow F_{tr} \cdot s = W \cdot \frac{1}{F_{tr}} \Rightarrow s = \frac{W}{F_{tr}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow s = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(15 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0.05 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 229.36 m.$$

Vježba 452

Na kojoj će se udaljenosti zaustaviti automobil koji se giba brzinom 54 km / h, nakon gašenja motora, ako je koeficijent trenja 0.03? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: 382.26 m.

Zadatak 453 (Zlatka, srednja škola)

Željezni predmet ($c = 460 \text{ J / (kg} \cdot \text{°C)}$) pao je s visine 25 metara. Za koliko se zagrijao ako se pola njegove kinetičke energije pri padu pretvori u toplinu za grijanje tog predmeta? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 453

$$c = 460 \text{ J / (kg} \cdot \text{°C)}, \quad h = 25 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad \Delta t = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Toplina Q je onaj dio unutrašnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t,$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela.

Zbog zakona očuvanja energije gravitacijska potencijalna energija na visini h jednaka je kinetičkoj energiji pri padu predmeta. Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\frac{1}{2} \cdot E_k = Q \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvjet} \\ E_k = E_{gp} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot E_{gp} = Q \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \cdot E_{gp} \Rightarrow m \cdot c \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot c \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot h \cdot \frac{1}{m \cdot c} \Rightarrow \Delta t = \frac{g \cdot h}{2 \cdot c} = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 25 m}{2 \cdot 460 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}} = 0.27 ^\circ C.$$

Vježba 453

Željezni predmet ($c = 460 \text{ J / (kg} \cdot ^\circ\text{C)}$) pao je s visine 250 dm. Za koliko se zagrijao ako se pola njegove kinetičke energije pri padu pretvori u toplinu za grijanje tog predmeta? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: $0.27 ^\circ\text{C}$.

Zadatak 454 (Marijana, maturantica)

Automobil iz stanja mirovanja akcelerira do brzine 10 m / s . Zatim dolazi na autocestu i akcelerira od brzine 10 m / s do brzine 20 m / s . Energija koja je potrebna za promjenu brzina automobila:

A. jednaka je u oba slučaja

B. veća je u slučaju kad ubrzava od $0 \frac{m}{s}$ do $10 \frac{m}{s}$

C. veća je u slučaju kad ubrzava od $10 \frac{m}{s}$ do $20 \frac{m}{s}$

Rješenje 454

$$v_0 = 0 \text{ m / s}, \quad v_1 = 10 \text{ m / s}, \quad v_2 = 20 \text{ m / s}, \quad \Delta E_{k1} = ?, \quad \Delta E_{k2} = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Računamo promjene kinetičke energije kada automobil akcelerira:

- od brzine v_0 do brzine v_1

$$\Delta E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow \Delta E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_0^2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbog jednostavnosti} \\ \text{mjernu jedinicu za} \\ \text{brzinu izostavljamo} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (10^2 - 0^2) \Rightarrow \Delta E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 100 \Rightarrow \Delta E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 100 \Rightarrow \Delta E_{k1} = 50 \cdot m$$

- od brzine v_1 do brzine v_2

$$\Delta E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow \Delta E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbog jednostavnosti} \\ \text{mjernu jedinicu za} \\ \text{brzinu izostavljamo} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (20^2 - 10^2) \Rightarrow \Delta E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (400 - 100) \Rightarrow \Delta E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 300 \Rightarrow \Delta E_{k2} = 150 \cdot m.$$

Budući da je

$$\Delta E_{k2} > \Delta E_{k1},$$

energija koja je potrebna za promjenu brzina automobila veća je u slučaju kad ubrzava od 10 m / s do 20 m / s .

Odgovor je pod C.

Vježba 454

Automobil iz stanja mirovanja akcelerira do brzine 12 m/s . Zatim dolazi na autocestu i akcelerira od brzine 12 m/s do brzine 20 m/s . Energija koja je potrebna za promjenu brzina automobila:

A. jednaka je u oba slučaja

B. veća je u slučaju kad ubrzava od $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

C. veća je u slučaju kad ubrzava od $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Rezultat: C.

Zadatak 455 (Marijana, maturantica)

Tijelo mase m giba se brzinom 10 m/s po podlozi, bez trenja i udara u nepomično tijelo jednake mase. Nakon sudara tijela se gibaju zajedno. Kolika je zajednička brzina tijela nakon sudara?

A. $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ B. $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ C. $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ D. $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Rješenje 455

$$m_1 = m_2 = m, \quad v_1 = 10 \text{ m/s}, \quad v_2 = 0 \text{ m/s} \text{ drugo tijelo je mirovalo}, \quad v_1' = v_2' = v = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m \cdot v_1 + m \cdot v_2 = m \cdot v + m \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot (v_1 + v_2) = 2 \cdot m \cdot v \Rightarrow 2 \cdot m \cdot v = m \cdot (v_1 + v_2) \Rightarrow 2 \cdot m \cdot v = m \cdot (v_1 + v_2) / \cdot \frac{1}{2 \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odgovor je pod D.

Vježba 455

Tijelo mase m giba se brzinom 20 m/s po podlozi, bez trenja i udara u nepomično tijelo jednake mase. Nakon sudara tijela se gibaju zajedno. Kolika je zajednička brzina tijela nakon sudara?

A. $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ B. $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ C. $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ D. $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Rezultat: A.

Zadatak 456 (Marijana, maturantica)

S tornja visokog 100 m ispušten je kamen mase 15 kg bez početne brzine. Kolika mu je ukupna energija prema tlu nakon 4 s padanja? Zanimarite silu otpora. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 456

$$h = 100 \text{ m}, \quad m = 15 \text{ kg}, \quad t = 4 \text{ s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad E = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Mehanička energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije u mehaničkom sustavu, tj. energija koja ovisi o položaju i gibanju tijela zbog djelovanja sile.

U zatvorenome sustavu zbroj potencijalne i kinetičke energije je konstantan.

Na visini h kamen ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h = 15 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100 \text{ m} = 15000 \text{ J} = 15 \text{ kJ},$$

a kinetička energija jednaka je nula.

Prilikom padanja gravitacijska potencijalna energija smanjuje se, a povećava kinetička. Zbog zakona o očuvanju energije zbroj gravitacijske potencijalne i kinetičke energije stalan je i iznosi

$$E = 15 \text{ kJ}.$$

Dakle, ukupna energija prema tlu je 15 kJ.

Vježba 456

S tornja visokog 100 m ispušten je kamen mase 18 kg bez početne brzine. Kolika mu je ukupna energija prema tlu nakon 3 s padanja? Zanimarite silu otpora. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 18 kJ.

Zadatak 457 (Marijana, maturantica)

Metak mase 5 g izlijeće brzinom 500 m/s iz puške mase 4 kg. Kolika je kinetička energija puške u trenutku kad metak izleti? Odredite domet metka ako strijelac pušku drži u visini ramena (160 cm). (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 457

$$m_1 = 5 \text{ g} = 0.005 \text{ kg}, \quad v_1 = 500 \text{ m/s}, \quad m_2 = 4 \text{ kg}, \quad h = 160 \text{ cm} = 1.6 \text{ m}, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad E_k = ?, \quad D = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Domet kod horizontalnog hica računa se po formuli

$$D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

gdje je h početna visina.

Brzinu puške nakon pucnja dobijemo iz zakona o održanju količine gibanja. Budući da su početne brzine obaju tijela (puške i metka) bile jednake nuli, taj zakon glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 / \frac{1}{m_2} \Rightarrow v_2 = -\frac{m_1 \cdot v_1}{m_2}$$

Pomak puške je protivnog smjera u odnosu na brzinu gibanja metka pa je brzina v_2 negativnog predznaka. Znak minus u tom izrazu možemo izostaviti jer nas zanima samo veličina brzine, a ne njezin smjer. Kinetička energija puške iznosi:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1}{m_2} \right)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{(m_1 \cdot v_1)^2}{m_2^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{(m_1 \cdot v_1)^2}{m_2^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 \cdot v_1)^2}{m_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(0.005 \text{ kg} \cdot 500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{4 \text{ kg}} = 0.781 \text{ J} \end{aligned}$$

Kada strijelac pušku drži u visini ramena (na visini h) domet metka je

$$D = v_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 285.57 \text{ m}$$

Vježba 457

Metak mase 0.5 dag izlijeće brzinom 500 m / s iz puške mase 4 kg. Kolika je kinetička energija puške u trenutku kad metak izleti? Odredite domet metka ako strijelac pušku drži u visini ramena (16 dm). (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m} / \text{s}^2$)

Rezultat: 0.781 J, 285.57 m.

Zadatak 458 (Marijana, maturantica)

Dijete mase 48 kg vozi se na skateboardu mase 4 kg brzinom 8 m / s. Dijete iskoči naprijed tako da je njegova brzina nakon skoka u odnosu na skateboard 13 m / s. Kolike su brzine skateboarda i djeteta s obzirom na tlo nakon skoka?

Rješenje 458

$m_1 = 48 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$, $v_1 = v_2 = v = 8 \text{ m} / \text{s}$, $v' = ?$ brzina skateboarda s obzirom na tlo, $u = 13 \text{ m} / \text{s} + v' = ?$ brzina djeteta s obzirom na tlo

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Gibanje je svuda oko nas. Nema apsolutnog mirovanja. To je jedno od osnovnih svojstava materije. Gibanje je neprekidno mijenjanje položaja tijela (ili njegovih čestica) prema okolišu. Gibanje tijela uvijek promatramo u odnosu prema okolišu. S različitih stajališta isto gibanje pokazuje nam se različito pa gdjekad čak i kao mirovanje. Referentni sustav je koordinatni sustav u kojem promatramo gibanje. Referentni sustav je vezan uz ono tijelo za koje se uvjetno dogovorimo da miruje i spram kojeg se promatra gibanje nekih drugih tijela.

Kada se dva tijela gibaju **usporredno u suprotnom smjeru**, relativna brzina v u kojoj se prvo tijelo giba u odnosu na drugo tijelo jednaka je zbroju brzina v_1 i v_2 pa iznosi:

$$v = v_1 + v_2$$

Brzinu skateboarda, nakon skoka djeteta, dobijemo iz zakona o održanju količine gibanja.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot u + m_2 \cdot v' \Rightarrow m_1 \cdot v + m_2 \cdot v = m_1 \cdot \left(13 \frac{m}{s} + v'\right) + m_2 \cdot v' \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v &= 13 \frac{m}{s} \cdot m_1 + m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v' \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v = 13 \frac{m}{s} \cdot m_1 + (m_1 + m_2) \cdot v' \Rightarrow \\ \Rightarrow 13 \frac{m}{s} \cdot m_1 + (m_1 + m_2) \cdot v' &= (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v' = (m_1 + m_2) \cdot v - 13 \frac{m}{s} \cdot m_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v' &= (m_1 + m_2) \cdot v - 13 \frac{m}{s} \cdot m_1 \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v' = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v - 13 \frac{m}{s} \cdot m_1}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{(48 \text{ kg} + 4 \text{ kg}) \cdot 8 \frac{m}{s} - 13 \frac{m}{s} \cdot 48 \text{ kg}}{48 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} = -4 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Brzina djeteta iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v' = -4 \frac{m}{s} \\ u = 13 \frac{m}{s} + v' \end{array} \right\} \Rightarrow u = 13 \frac{m}{s} + \left(-4 \frac{m}{s}\right) = 9 \frac{m}{s}$$



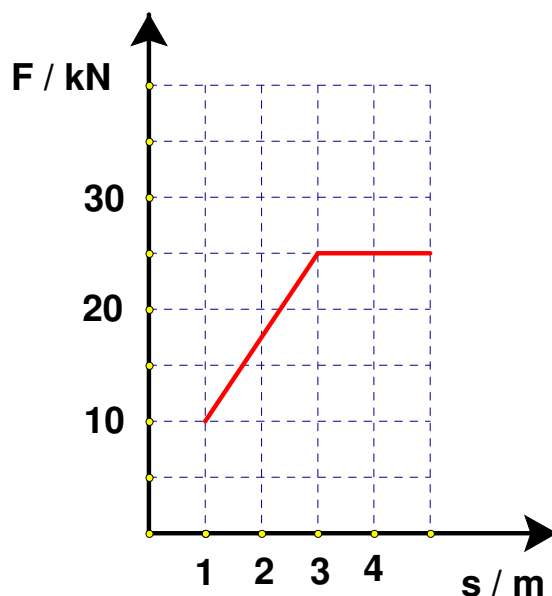
Vježba 458

Dijete mase 24 kg vozi se na skateboardu mase 2 kg brzinom 8 m / s. Dijete iskoči naprijed tako da je njegova brzina nakon skoka u odnosu na skateboard 13 m / s. Kolike su brzine skateboarda i djeteta s obzirom na tlo nakon skoka?

Rezultat: $-4 \text{ m / s}, 9 \text{ m / s}$.

Zadatak 459 (Marijana, maturantica)

Izračunajte rad sile čija je ovisnost o putu prikazana na grafu.



- A. 75 J B. 85 kJ C. 65 kJ D. 85 J E. 75 kJ

Rješenje 459

$$W = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.

Trapez je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice usporedne (paralelne). Usporedne stranice zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v,$$

gdje je a donja osnovica (dulja osnovica), c gornja osnovica (kraća osnovica), v je visina trapeza.

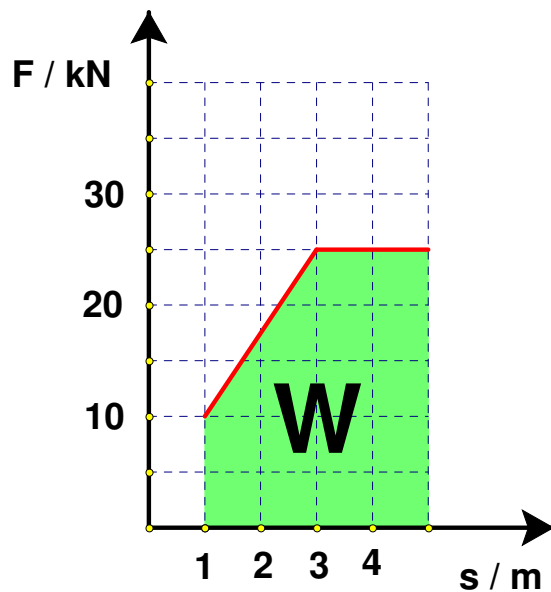
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90°).

Ploština pravokutnika je jednaka produktu njegove duljine a i širine b .

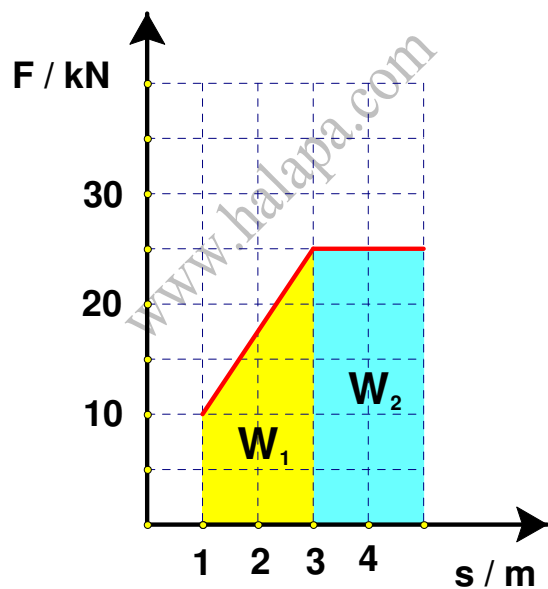
$$P = a \cdot b.$$

Iz grafa koji prikazuje ovisnost sile F o putu s dobivamo rad W . On odgovara osjenčanoj površini ispod krivulje.



1. inačica

Na grafu je rad jednak ploštini osjenčanih geometrijskih likova: trapeza i pravokutnika.

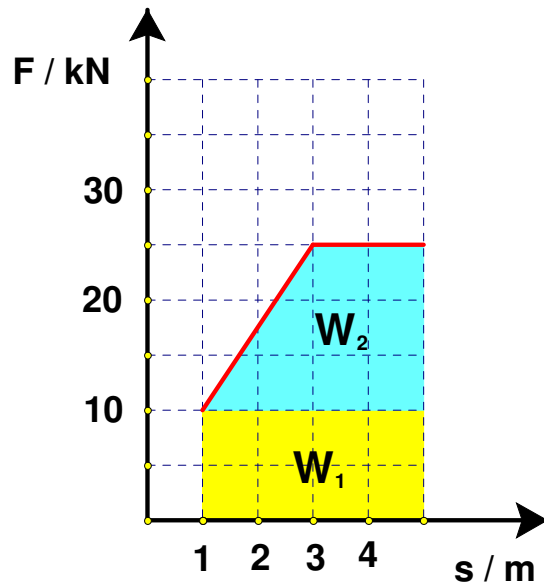


$$\begin{aligned}
 W &= W_1 + W_2 \Rightarrow W = \frac{25 \text{ kN} + 10 \text{ kN}}{2} \cdot 2 \text{ m} + 2 \text{ m} \cdot 25 \text{ kN} \Rightarrow \\
 \Rightarrow W &= \frac{35 \text{ kN}}{2} \cdot 2 \text{ m} + 50 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow W = \frac{35 \text{ kN}}{2} \cdot 2 \text{ m} + 50 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \\
 \Rightarrow W &= 35 \text{ kN} \cdot \text{m} + 50 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow W = 85 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow W = 85 \text{ kJ}.
 \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

Na grafu je rad jednak ploštini osjenčanih geometrijskih likova: pravokutnika i trapeza.

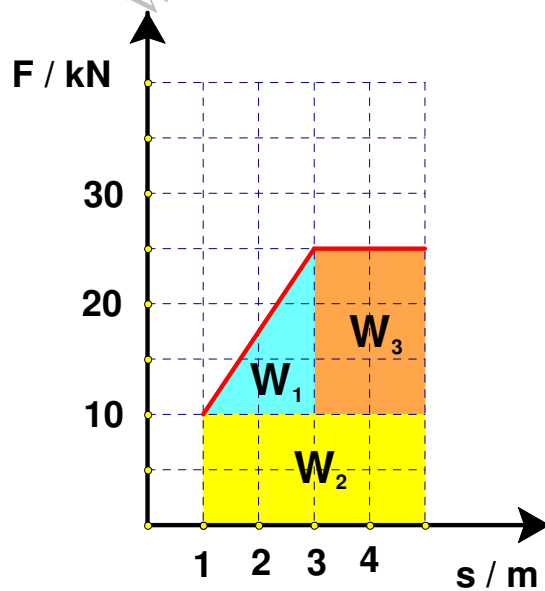


$$\begin{aligned}
 W &= W_1 + W_2 \Rightarrow W = 4 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} + \frac{4 \text{ m} + 2 \text{ m}}{2} \cdot 15 \text{ kN} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow W = 40 \text{ kN} \cdot \text{m} + \frac{6 \text{ m}}{2} \cdot 15 \text{ kN} \Rightarrow W = 40 \text{ kN} \cdot \text{m} + \frac{6 \text{ m}}{2} \cdot 15 \text{ kN} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow W = 40 \text{ kN} \cdot \text{m} + 3 \text{ m} \cdot 15 \text{ kN} \Rightarrow W = 40 \text{ kN} \cdot \text{m} + 45 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow W = 85 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow W = 85 \text{ kJ}.
 \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

3. inačica

Na grafu je rad jednak ploštini osjenčanih geometrijskih likova: pravokutnog trokuta i dva pravokutnika.



$$W = W_1 + W_2 + W_3 \Rightarrow W = \frac{2 \text{ m} \cdot 15 \text{ kN}}{2} + 4 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} + 2 \text{ m} \cdot 15 \text{ kN} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{2 \cdot m \cdot 15 \text{ kN}}{2} + 40 \text{ kN} \cdot m + 30 \text{ kN} \cdot m \Rightarrow W = 15 \text{ kN} \cdot m + 40 \text{ kN} \cdot m + 30 \text{ kN} \cdot m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = 85 \text{ kN} \cdot m \Rightarrow W = 85 \text{ kJ}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 459

Ne radite, odmorite se!

Rezultat: ☺

Zadatak 460 (Ivica, gimnazija)

Koliku masu zraka u jednoj sekundi mora propeler helikoptera gurati prema tlu brzinom 40 m/s da bi helikopter mase 800 kg lebdio na mjestu? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 460

$$\Delta v = 40 \text{ m/s}, \quad m = 800 \text{ kg}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad \frac{m}{\Delta t} = ?$$

Umnožak

$$I = F \cdot t$$

zovemo impulsom sile F , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase m . Kad početna brzina nije nula, vrijedi

$$F \cdot \Delta t = \Delta(m \cdot v),$$

tj. promjena količine gibanja jednaka je impulsu sile koji je tu promjenu uzrokovao. Ako je masa stalna, možemo pisati

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v,$$

gdje je Δv promjena brzine tijela u vremenskom intervalu Δt .

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljinog privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \Rightarrow m \cdot \Delta v = F \cdot \Delta t \Rightarrow m \cdot \Delta v = F \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{\Delta v \cdot \Delta t} \Rightarrow \frac{m}{\Delta t} = \frac{F}{\Delta v} \Rightarrow [F = G] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\Delta t} = \frac{G}{\Delta v} \Rightarrow \frac{m}{\Delta t} = \frac{m \cdot g}{\Delta v} \Rightarrow \frac{m}{\Delta t} = \frac{800 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow \frac{m}{\Delta t} = 196 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Vježba 460

Koliku masu zraka u jednoj sekundi mora propeler helikoptera gurati prema tlu brzinom 80 m/s da bi helikopter mase 1600 kg lebdio na mjestu? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 196 kg/s .