

Zadatak 401 (Viki, gimnazija)

Zrakoplov, mase 10 t, pri uzlijetanju treba postići najmanju brzinu 80 km / h. Duljina uzletišta je 100 m, a koeficijent trenja 0.2. Gibanje zrakoplova pri uzlijetanju je jednoliko ubrzano. Kolika je najmanja snaga motora da bi uzlijetanje uspjelo? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 401

$m = 10 \text{ t} = 10000 \text{ kg}$, $v = 80 \text{ km / h} = [80 : 3.6] = 22.22 \text{ m / s}$, $s = 100 \text{ m}$, $\mu = 0.2$,
 $g = 9.81 \text{ m / s}^2$, $P = ?$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga se može izračunati izrazom

$$P = F \cdot v,$$

gdje je F sila u smjeru gibanja tijela, a v brzina tijela.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s},$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Rezultantna sila jednaka je razlici vučne sile F i sile trenja F_{tr} . Prema drugom Newtonovu poučku rezultantna sila koja uvjetuje gibanje jednaka je umnošku mase m zrakoplova i njegove akceleracije a .

$$m \cdot a = F - F_{tr} \Rightarrow F - F_{tr} = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot a + F_{tr} \Rightarrow F = m \cdot a + \mu \cdot m \cdot g.$$

Budući da je uzlijetanje jednoliko ubrzano gibanje, akceleracija je jednaka

$$a = \frac{v^2}{2 \cdot s}.$$

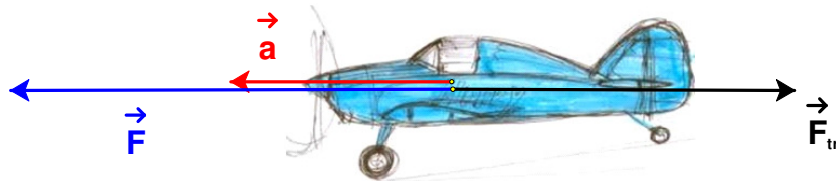
Iz sustava jednadžba dobije se F .

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{v^2}{2 \cdot s} \\ F = m \cdot a + \mu \cdot m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot s} + \mu \cdot m \cdot g.$$

Minimalna snaga P motora jednaka je snazi koju zrakoplov razvije u trenutku uzlijetanja.

$$P = F \cdot v \Rightarrow P = \left(m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot s} + \mu \cdot m \cdot g \right) \cdot v \Rightarrow P = m \cdot \left(\frac{v^3}{2 \cdot s} + \mu \cdot g \cdot v \right) =$$

$$= 10000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{\left(22.22 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^3}{2 \cdot 100 \text{ m}} + 0.2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 22.22 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 984488.65 \text{ W} \approx 984 \text{ kW}.$$



Vježba 401

Zrakoplov, mase 10 t, pri uzlijetanju treba postići najmanju brzinu 80 km / h. Duljina uzletišta je 0.1 km, a koeficijent trenja 0.2. Gibanje zrakoplova pri uzlijetanju je jednoliko ubrzano. Kolika je najmanja snaga motora da bi uzlijetanje uspjelo? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: 984 kW.

Zadatak 402 (Vesna, srednja škola)

Kolika je prosječna snaga potrebna da bi nepomično tijelo mase 10 kg postiglo količinu gibanja $60 \text{ kg} \cdot \text{m / s}$ za dvije sekunde?

Rješenje 402

$$m = 10 \text{ kg}, \quad p = 60 \text{ kg} \cdot \text{m / s}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad P = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

$$\left. \begin{array}{l} W = E_k \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{E_k}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot t} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{proširimo} \\ \text{sa } m \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{m^2 \cdot v^2}{2 \cdot m \cdot t} \Rightarrow P = \frac{(m \cdot v)^2}{2 \cdot m \cdot t} \Rightarrow [p = m \cdot v] \Rightarrow P = \frac{p^2}{2 \cdot m \cdot t} =$$

$$= \frac{\left(60 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 2 \text{ s}} = 90 \text{ W}.$$

Vježba 402

Kolika je prosječna snaga potrebna da bi nepomično tijelo mase 0.01 t postiglo količinu gibanja $60 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}$ za dvije sekunde?

Rezultat: 90 W.

Zadatak 403 (Dino, srednja škola)

Kojom početnom brzinom v_0 treba baciti loptu prema dolje sa visine h da bi odskočila na visinu $2 \cdot h$? Gubitke mehaničke energije zanemarite. (ubrzanje slobodnog pada g)

Rješenje 403

$$h, \quad 2 \cdot h, \quad g, \quad v_0 = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Mehanička energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije u mehaničkom sustavu, tj. energija koja ovisi o položaju i gibanju tijela zbog djelovanja sile.

U zatvorenome sustavu zbroj potencijalne i kinetičke energije je konstantan.

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

gdje je h visina pada, v trenutna brzina.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom v_0 i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je trenutna brzina dana izrazom

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}.$$

1. inačica

Zbog zakona očuvanja energije zbroj gravitacijske potencijalne energije koju lopta ima na visini h i kinetičke energije koju ima zbog brzine v_0 mora biti jednak gravitacijskoj potencijalnoj energiji kada odskoči na visinu $2 \cdot h$.

$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 &= m \cdot g \cdot (2 \cdot h) \Rightarrow m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = 2 \cdot m \cdot g \cdot h \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = 2 \cdot m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v_0^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v_0^2 = 2 \cdot g \cdot h \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \end{aligned}$$

2. inačica

Kada lopta padne sa visine h bačena početnom brzinom v_0 konačna brzina je

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}.$$

Jednaku brzinu imat će i ako slobodno pada sa visine $2 \cdot h$.

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (2 \cdot h)} \Rightarrow v_2 = \sqrt{4 \cdot g \cdot h}.$$

Tada je:

$$\begin{aligned} v_1 = v_2 &\Rightarrow \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{4 \cdot g \cdot h} \Rightarrow \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{4 \cdot g \cdot h} / 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} \right)^2 = \left(\sqrt{4 \cdot g \cdot h} \right)^2 \Rightarrow v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h = 4 \cdot g \cdot h \Rightarrow v_0^2 = 4 \cdot g \cdot h - 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_0^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v_0^2 = 2 \cdot g \cdot h / \sqrt{\quad} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \end{aligned}$$

Vježba 403

Kojom početnom brzinom v_0 treba baciti loptu prema dolje sa visine h da bi odskočila na visinu $3 \cdot h$? Gubitke mehaničke energije zanemarite. (ubrzanje slobodnog pada g)

Rezultat: $v_0 = 2 \cdot \sqrt{g \cdot h}.$

Zadatak 404 (Una, gimnazija)

Tane mase 20 g ispali se početnom brzinom 1000 m/s . Pri padu na zemlju ima brzinu 200 m/s . Kolika je energija taneta utrošena na svladavanje sile trenja i sile otpora prilikom njegova gibanja zrakom?

Rješenje 404

$$m = 20 \text{ g} = 0.02 \text{ kg}, \quad v_1 = 1000 \text{ m/s}, \quad v_2 = 200 \text{ m/s}, \quad \Delta E_k = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Energija ΔE_k taneta utrošena na svladavanje sile trenja i sile otpora prilikom njegova gibanja zrakom jednaka je razlici kinetičke energije E_{k1} kada se tane ispali početnom brzinom v_1 i kinetičke energije E_{k2} pri padu na zemlju brzinom v_2 .

$$\begin{aligned} \Delta E_k = E_{k1} - E_{k2} &\Rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \Rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.02 \text{ kg} \cdot \left(\left(1000 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = 9600 \text{ J} = 9.6 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Vježba 404

Tane mase 2 dag ispali se početnom brzinom 1 km/s . Pri padu na zemlju ima brzinu 200 m/s . Kolika je energija taneta utrošena na svladavanje sile trenja i sile otpora prilikom njegova gibanja zrakom?

Rezultat: $9.6 \text{ kJ}.$

Zadatak 405 (Ante, tehnička škola)

Tane mase m zabije se u komad drveta mase M koji visi na niti duljine l i ostane u njemu. Odredite kut α za koji se komad drveta sa tanetom pomakne, ako brzina taneta iznosi v . (ubrzanje slobodnog pada g)

Rješenje 405

$$m_1 = m, \quad m_2 = M, \quad v_1 = v, \quad v_2 = 0, \quad v_1' = v_2' = v', \quad l, \quad g, \quad \alpha = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska

veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad , \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Pomoću zakona o očuvanju količine gibanja odredimo brzinu v' komada drveta sa tanetom.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m \cdot v + M \cdot 0 = m \cdot v' + M \cdot v' \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot v &= (m + M) \cdot v' \Rightarrow (m + M) \cdot v' = m \cdot v \Rightarrow (m + M) \cdot v' = m \cdot v \cdot \frac{1}{m + M} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v' = \frac{m \cdot v}{m + M}. \end{aligned}$$

Kinetička energija E_k koju posjeduju komad drveta i tane kada se gibaju brzinom v' iznosi:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot (v')^2 \Rightarrow \left[v' = \frac{m \cdot v}{m + M} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot \left(\frac{m \cdot v}{m + M} \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot \frac{m^2 \cdot v^2}{(m + M)^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot \frac{m^2 \cdot v^2}{(m + M)^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cdot v^2}{m + M}. \end{aligned}$$

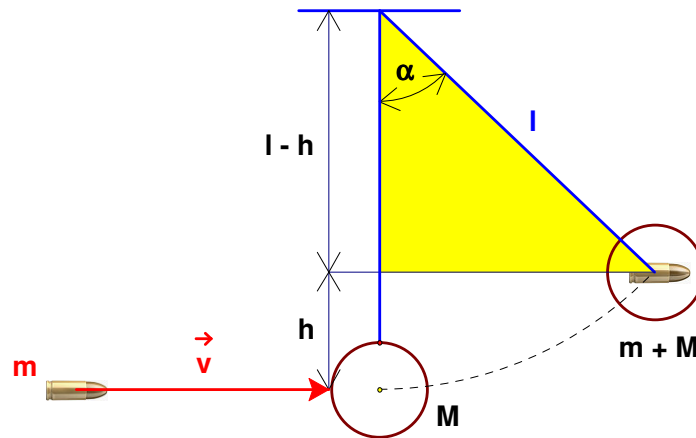
Gravitacijska potencijalna energija E_{gp} kada se komad drveta sa tanetom podigne na visinu h je:

$$E_{gp} = (m + M) \cdot g \cdot h.$$

Kinetička energija E_k zbog zakona o očuvanju energije jednaka je gravitacijskoj potencijalnoj energiji E_{gp} .

$$E_k = E_{gp} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cdot v^2}{m+M} = (m+M) \cdot g \cdot h \Rightarrow (m+M) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cdot v^2}{m+M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+M) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cdot v^2}{m+M} \cdot l \cdot \frac{1}{g \cdot (m+M)} \Rightarrow h = \frac{m^2 \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot (m+M)^2}$$



Uočimo pravokutan trokut sa katetom $l - h$ i hipotenuzom l te pomoću funkcije kosinus izračunamo veličinu kuta α .

$$\cos \alpha = \frac{l-h}{l} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{l-h}{l} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{l-h}{l} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{h}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[h = \frac{m^2 \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot (m+M)^2} \right] \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{\frac{m^2 \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot (m+M)^2}}{l} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{\frac{m^2 \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot (m+M)^2}}{\frac{l}{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{m^2 \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot l \cdot (m+M)^2} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(1 - \frac{m^2 \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot l \cdot (m+M)^2} \right)$$

Vježba 405

Tane mase m zabije se u komad drveta mase m koji visi na niti duljine l i ostane u njemu. Odredite kut α za koji se komad drveta sa tanetom pomakne, ako brzina taneta iznosi v . (ubrzanje slobodnog pada g)

Rezultat: $\alpha = \cos^{-1} \left(1 - \frac{v^2}{8 \cdot g \cdot l} \right)$

Zadatak 406 (Ante, tehnička škola)

Kamion mase 2 t giba se brzinom 54 km/h i treba se zaustaviti na putu od 25 m . Kolika treba biti sila kočnja F ako se pretpostavlja da je konstantna za vrijeme kočnja?

Rješenje 406

$$m = 2 \text{ t} = 2000 \text{ kg}, \quad v = 54 \text{ km/h} = [54 : 3.6] = 15 \text{ m/s}, \quad s = 25 \text{ m}, \quad F = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Ista formula vrijedi i kod jednoliko usporenog gibanja.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

1. inačica

Kamen jednoliko usporava pa deceleraciju (negativnu akceleraciju) dobijemo iz formule

$$a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$$

Sila kočenja F iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{v^2}{2 \cdot s} \\ F = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot s} = 2000 \text{ kg} \cdot \frac{\left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 25 \text{ m}} = 9000 \text{ N} = 9 \text{ kN}.$$

Zadatak smo riješili uporabom drugoga Newtonova poučka. Budući da nas zanima samo iznos sile, nismo pisali predznak minus koji označava da je sila kočenja suprotnog smjera od gibanja kamiona.

2. inačica

Zadatak se može riješiti pomoću zakona o očuvanju energije. Kočenjem se kinetička energija kamiona smanjuje zbog rada sile trenja.

$$\begin{aligned} W = E_k &\Rightarrow F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow F = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot s} = \\ &= \frac{2000 \text{ kg} \cdot \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 25 \text{ m}} = 9000 \text{ N} = 9 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Vježba 406

Kamion mase 2 t giba se brzinom 54 km / h i treba se zaustaviti na putu od 0.025 km. Kolika treba biti sila kočenja F ako se pretpostavlja da je konstantna za vrijeme kočenja?

Rezultat: 9 kN.

Zadatak 407 (Tea, gimnazija)

Raketa leti brzinom 16 m / s. Raspada se na dva dijela masa 5 kg i 15 kg. Kolikom brzinom se giba manja masa, ako veća ima brzinu 25 m / s, istog smjera kao prvi smjer rakete?

Rješenje 407

$$v = 16 \text{ m/s}, \quad m_1 = 5 \text{ kg}, \quad m_2 = 15 \text{ kg}, \quad v_2' = 25 \text{ m/s}, \quad v_1' = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

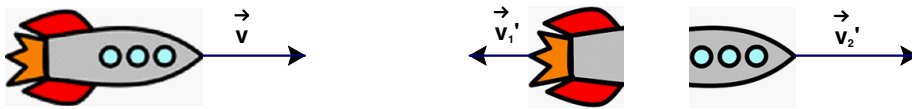
Zakon o očuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.



Neka je v brzina rakete, a v_1' i v_2' su brzine njezinih dijelova nakon raspada. Brzine ostaju na istom pravcu. Iz zakona o održanju količine gibanja može se izraziti brzina v_1' .

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \cdot v &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 \cdot v_1' &= (m_1 + m_2) \cdot v - m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1' = (m_1 + m_2) \cdot v - m_2 \cdot v_2' \quad / \cdot \frac{1}{m_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1' &= \frac{(m_1 + m_2) \cdot v - m_2 \cdot v_2'}{m_1} = \frac{(5 \text{ kg} + 15 \text{ kg}) \cdot 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 15 \text{ kg} \cdot 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ kg}} = -11 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Predznak minus znači da je smjer suprotan smjeru rakete.

Vježba 407

Raketa leti brzinom 16 m/s . Raspada se na dva dijela masa 500 dag i 1500 dag . Kolikom brzinom se giba manja masa, ako veća ima brzinu 25 m/s , istog smjera kao prvi smjer rakete?

Rezultat: $-11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadatak 408 (Monika, srednja škola)

Dva tijela jednakih masa padnu na tlo s jednake visine h . Sudar prvog tijela s tлом je neelastičan. Drugo je tijelo nakon sudara elastično odskočilo na visinu $0.2 \cdot h$. Pri kojemu je sudaru više energije prešlo u unutarnju energiju tijela i tla te koliko puta više?

Rješenje 408

$$h_1 = h, \quad \Delta h = 0.2 \cdot h, \quad \frac{\Delta E_{gp1}}{\Delta E_{gp2}} = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema

dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Sudar prvog tijela, koje je palo s visine h , s tlom je neelastičan pa je ukupna gravitacijska potencijalna energija prešla u unutarnju energiju tijela i tla.

$$\Delta E_{gp1} = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot 0 \Rightarrow \Delta E_{gp1} = m \cdot g \cdot h.$$

Budući da je drugo tijelo nakon sudara elastično odskočilo na visinu Δh , gravitacijska potencijalna energija koja je prešla u unutarnju energiju tijela i tla iznosi:

$$\begin{aligned} \Delta E_{gp2} &= m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta E_{gp2} = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot 0.2 \cdot h \Rightarrow \Delta E_{gp2} = m \cdot g \cdot h \cdot (1 - 0.2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta E_{gp2} = 0.8 \cdot m \cdot g \cdot h. \end{aligned}$$

Sada je

$$\frac{\Delta E_{gp1}}{\Delta E_{gp2}} = \frac{m \cdot g \cdot h}{0.8 \cdot m \cdot g \cdot h} \Rightarrow \frac{\Delta E_{gp1}}{\Delta E_{gp2}} = \frac{m \cdot g \cdot h}{0.8 \cdot m \cdot g \cdot h} \Rightarrow \frac{\Delta E_{gp1}}{\Delta E_{gp2}} = \frac{1}{0.8} \Rightarrow \frac{\Delta E_{gp1}}{\Delta E_{gp2}} = 1.25.$$

Pri neelastičnom sudaru prešlo je u unutarnju energiju tijela i tla 1.25 puta više energije.

Vježba 408

Dva tijela jednakih masa padnu na tlo s jednake visine $2 \cdot h$. Sudar prvog tijela s tlom je neelastičan. Drugo je tijelo nakon sudara elastično odskočilo na visinu $0.4 \cdot h$. Pri kojemu je sudaru više energije prešlo u unutarnju energiju tijela i tla te koliko puta više?

Rezultat: Pri neelastičnom sudaru prešlo je u unutarnju energiju tijela i tla 1.25 puta više energije.

Zadatak 409 (Lussy, gimnazija)

S visine 12 m pada svake 2 s vode 20 m^3 . Kolika je snaga vodopada? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 409

$$h = 12 \text{ m}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad V = 20 \text{ m}^3, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad P = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase m tijela i njegova obujma V :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

$$\left. \begin{aligned} W &= \Delta E_{gp} \\ P &= \frac{W}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \frac{\Delta E_{gp}}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot 0}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \Rightarrow [m = \rho \cdot V] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{\rho \cdot V \cdot g \cdot h}{t} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 20 \text{ m}^3 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 1177200 \text{ W} = 1.1772 \text{ MW}.$$

Vježba 409

S visine 120 dm pada svake 2 s vode 20 m³. Kolika je snaga vodopada? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 1.1772 MW.

Zadatak 410 (Ivan, gimnazija)

Saonice mase 100 kg spuštaju se iz mirovanja niz brijeg duljine 100 m i visine 8 m. Ako je brzina saonice pri dnu brijega 10 m/s, onda su na putu niz brijeg saonice svladale trenje:

- A. 28.48 N B. 10.00 N C. 14.72 N D. 29.43 N

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 410

$$m = 100 \text{ kg}, \quad s = 100 \text{ m}, \quad h = 8 \text{ m}, \quad v = 10 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_{tr} = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

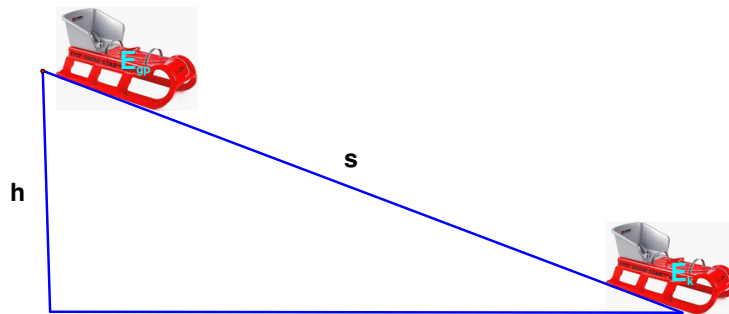
$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Budući da je rad sile trenja jednak razlici gravitacijske potencijalne energije saonice na vrhu brijega i kinetičke energije na podnožju brijega, možemo napisati ovaj sustav:

$$\left. \begin{array}{l} W_{tr} = F_{tr} \cdot s \\ W_{tr} = E_{gp} - E_k \end{array} \right\} \Rightarrow F_{tr} \cdot s = E_{gp} - E_k \Rightarrow F_{tr} \cdot s = E_{gp} - E_k \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow F_{tr} = \frac{E_{gp} - E_k}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{tr} = \frac{m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{s} \Rightarrow F_{tr} = \frac{m \cdot \left(g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right)}{s} =$$

$$= \frac{100 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{100 \text{ m}} = 28.48 \text{ N}.$$



Odgovor je pod A.

Vježba 410

Saonice mase 0.1 t spuštaju se iz mirovanja niz brijeg duljine 100 m i visine 8 m. Ako je brzina saonice pri dnu brijega 36 km / h, onda su na putu niz brijeg saonice svladale trenje:

- A. 28.48 N B. 10.00 N C. 14.72 N D. 29.43 N

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: A.

Zadatak 411 (Asterix, gimnazija)

Kuglica visi na niti duljine 3 m. Izvučemo je postrance tako da joj se visina poveća za 15 cm i pustimo je njihati. Kolika je brzina kuglice kad prolazi ravnotežnim položajem? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 411

$$l = 3 \text{ m}, \quad h = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad v = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

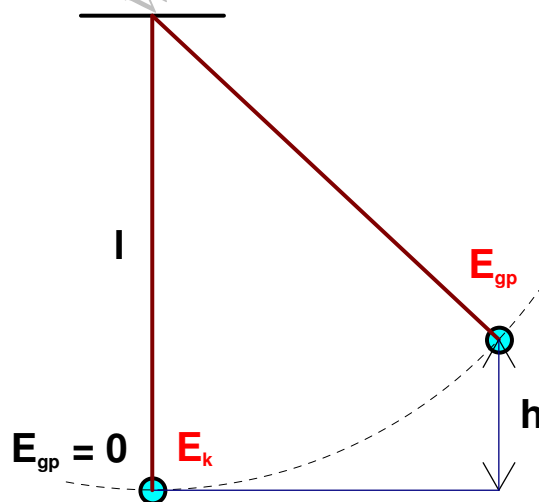
gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.



Kada kuglica prolazi kroz ravnotežni položaj ima maksimalnu kinetičku energiju, a gravitacijska potencijalna energija jednaka je nuli. Zbog zakona očuvanja energije maksimalna kinetička energija E_k jednaka je gravitacijskoj potencijalnoj energiji na visini h .

$$E_k = E_{gp} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot h / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0.15 m} = 1.72 \frac{m}{s}$$

Vježba 411

Kuglica visi na niti duljine 4 m. Izvučemo je postrance tako da joj se visina poveća za 1.5 dm i pustimo je njihati. Kolika je brzina kuglice kad prolazi ravnotežnim položajem? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.72 m/s.

Zadatak 412 (Asterix, gimnazija)

Kuglica visi na niti duljine 3 m. Izvučemo je postrance tako da joj se visina poveća za 15 cm i pustimo je njihati. Kolika je brzina kuglice kad se nalazi 5 cm više od ravnotežnog položaja? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 412

$$l = 3 \text{ m}, \quad h = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \quad h_1 = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

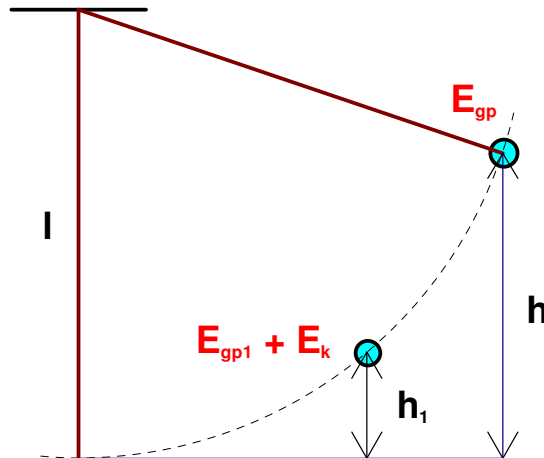
gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.



Na visini h_1 kuglica ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

i gravitacijsku potencijalnu

$$E_{gp1} = m \cdot g \cdot h_1$$

pa je, zbog zakona očuvanja energije, njihov zbroj jednak gravitacijskoj potencijalnoj energiji na visini h.

$$\begin{aligned}
 E_k + E_{gp1} &= E_{gp} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h_1 &= m \cdot g \cdot h \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 + 2 \cdot g \cdot h_1 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow \\
 \Rightarrow v^2 &= 2 \cdot g \cdot h - 2 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot (h - h_1) \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h_1)} \Rightarrow \\
 \Rightarrow v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h_1)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (0.15 m - 0.05 m)} = 1.40 \frac{m}{s}.
 \end{aligned}$$

Vježba 412

Kuglica visi na niti duljine 4 m. Izvučemo je postrance tako da joj se visina poveća za 1.5 dm i pustimo je njihati. Kolika je brzina kuglice kad se nalazi 5 cm više od ravnotežnog položaja? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.40 m/s.

Zadatak 413 (Marina, medicinska škola)

Automobil mase 1000 kg poveća kinetičku energiju za 126 kJ povećanjem brzine za 6 m/s. Kolika je bila brzina vozila?

Rješenje 413

$$m = 1000 \text{ kg}, \quad \Delta E_k = 126 \text{ kJ} = 1.26 \cdot 10^5 \text{ J}, \quad \Delta v = 6 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2. \\
 \Delta E_k &= E_{k1} - E_{k2} \Rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \left[(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v^2 + 2 \cdot v \cdot \Delta v + (\Delta v)^2 \right) - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot v \cdot \Delta v + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\Delta v)^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot v \cdot \Delta v + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\Delta v)^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot v \cdot \Delta v + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\Delta v)^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \Delta E_k = m \cdot v \cdot \Delta v + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\Delta v)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow m \cdot v \cdot \Delta v + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\Delta v)^2 &= \Delta E_k \Rightarrow m \cdot v \cdot \Delta v + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\Delta v)^2 = \Delta E_k \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2 \cdot m \cdot v \cdot \Delta v + m \cdot (\Delta v)^2 &= 2 \cdot \Delta E_k \Rightarrow 2 \cdot m \cdot v \cdot \Delta v = 2 \cdot \Delta E_k - m \cdot (\Delta v)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2 \cdot m \cdot v \cdot \Delta v &= 2 \cdot \Delta E_k - m \cdot (\Delta v)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot m \cdot \Delta v} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot \Delta E_k - m \cdot (\Delta v)^2}{2 \cdot m \cdot \Delta v} \Rightarrow \\
 \Rightarrow v &= \frac{2 \cdot \Delta E_k}{2 \cdot m \cdot \Delta v} - \frac{m \cdot (\Delta v)^2}{2 \cdot m \cdot \Delta v} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot \Delta E_k}{2 \cdot m \cdot \Delta v} - \frac{m \cdot (\Delta v)^2}{2 \cdot m \cdot \Delta v} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\Delta E_k}{m \cdot \Delta v} = \frac{1.26 \cdot 10^5 \text{ J}}{1000 \text{ kg} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vježba 413

Automobil mase 2 t poveća kinetičku energiju za 252 kJ povećanjem brzine za 6 m / s. Kolika je bila brzina vozila?

Rezultat: 18 m / s.

Zadatak 414 (Marijan, srednja škola)

Automobil mase 1000 kg udari brzinom 36 km / h u odbojnik – zavojnici i sabije ga za 1 m. Zanemarimo li trenje i masu odbojnika, kolika je konstanta opiranja otpornika – zavojnice?

Rješenje 414

$$m = 1000 \text{ kg}, \quad v = 36 \text{ km / h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m / s}, \quad x = 1 \text{ m}, \quad k = ?$$

Potencijalna energija elastične deformacije opruge konstante k kojoj se duljina djelovanjem sile smanji ili poveća za x:

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona očuvanja energije kinetička energija automobila preoblikuje se u potencijalnu energiju odbojnika – zavojnice.

$$E_k = E_{ep} \Rightarrow E_{ep} = E_k \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad | \cdot \frac{2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{m \cdot v^2}{x^2} \Rightarrow k = m \cdot \left(\frac{v}{x}\right)^2 = 1000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ m}}\right)^2 = 100000 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



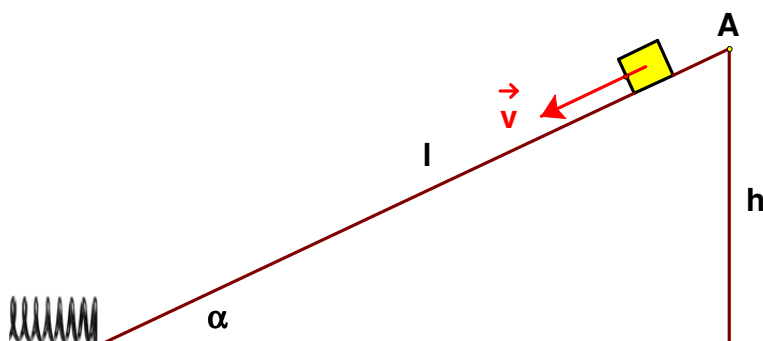
Vježba 414

Automobil mase 1 t udari brzinom 36 km / h u odbojnik – zavojnici i sabije ga za 100 cm. Zanemarimo li trenje i masu odbojnika, kolika je konstanta opiranja otpornika – zavojnice?

Rezultat: 10^5 N / m .

Zadatak 415 (Ivan, gimnazija)

Tijelo mase 50 kg u položaju A (vrh kosine) ima brzinu 10 m / s i klizeći 10 m niz kosinu, koja se za svakih 5 m puta uzdiže za 3 m, udari u oprugu konstante elastičnosti $k = 2000 \text{ N / m}$. Za koliko će se sabiti opruga ako je faktor trenja između tijela i kosine 0.25? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m / s}^2$)



Rješenje 415

$m = 50 \text{ kg}$, $v = 10 \text{ m / s}$, $l = 10 \text{ m}$, $s = 5 \text{ m}$, $d = 3 \text{ m}$, $k = 2000 \text{ N / m}$,
 $\mu = 0.25$, $g = 10 \text{ m / s}^2$, $x = ?$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Potencijalna energija elastične deformacije opruge konstante k kojoj se duljina djelovanjem sile smanji

ili poveća za x:

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2.$$

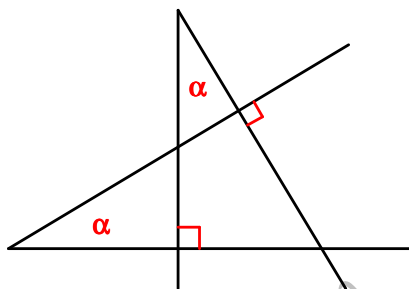
Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

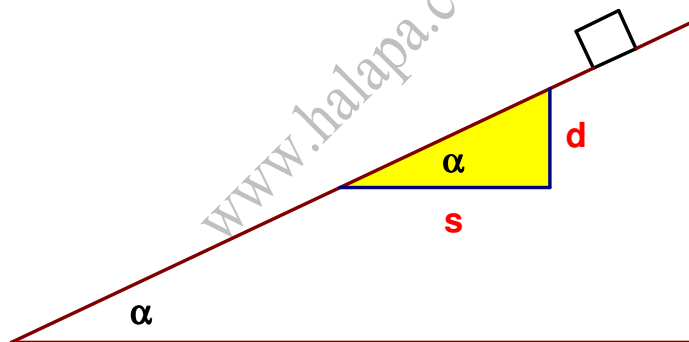
Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Kutovi s okomitim kracima

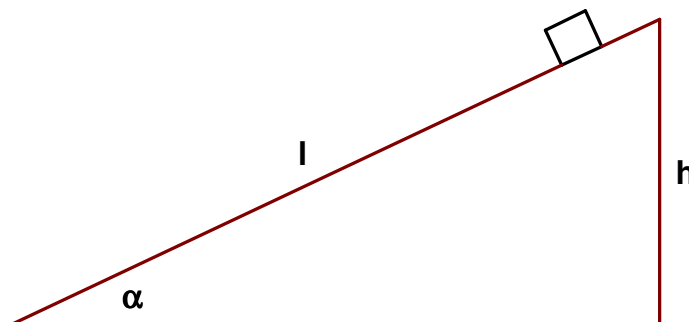


Najprije odredimo nagib kosine. To je kut između površine kosine i horizontale.



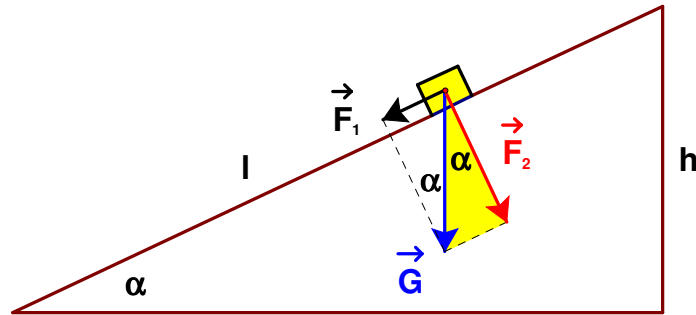
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{s} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{d}{s} \right) \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) \Rightarrow \alpha = 30^\circ 57' 50''.$$

Izračunamo visinu h kosine.



$$\sin \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \frac{h}{l} = \sin \alpha \Rightarrow \frac{h}{l} = \sin \alpha \cdot l \Rightarrow h = l \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 10 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ 57' 50'' \Rightarrow h = 5.14 \text{ m}.$$



Silu težu (težinu tijela) G rastavimo na dvije komponente:

- komponentu F_1 u smjeru kosine koja tijelo ubrzava niz kosinu
- komponentu F_2 okomitu na kosinu koja pritišće kosinu.

Uočimo pravokutan trokut čija je kateta F_2 i hipotenuza G (žuta boja).

Pomoću pravokutnog trokuta (žuti trokut) čija je kateta F_2 , a hipotenuza G dobije se:

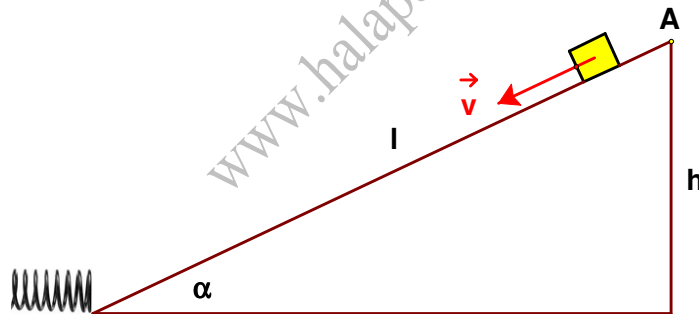
$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow \frac{F_2}{G} = \cos \alpha \Rightarrow \frac{F_2}{G} = \cos \alpha \cdot G \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Sila trenja F_{tr} je:

$$F_{tr} = \mu \cdot F_2 \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Rad sile trenja W_{tr} , kada tijelo klizi niz kosinu na putu duljine l , iznosi:

$$W_{tr} = F_{tr} \cdot l \Rightarrow W_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot l \Rightarrow W_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha.$$



U početnom položaju A tijelo ima kinetičku energiju E_k i gravitacijsku potencijalnu energiju E_{gp} :

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2, \quad E_{gp} = m \cdot g \cdot h.$$

Klizeći niz kosinu te se energije tijela utroše na rad W_{tr} sile trenja niz kosinu i rad W_{ep} pri sabijanju opruge:

$$W_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha, \quad W_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2.$$

Zbog zakona očuvanja energije mora vrijediti:

$$\begin{aligned} E_k + E_{gp} &= W_{tr} + W_{ep} \Rightarrow W_{tr} + W_{ep} = E_k + E_{gp} \Rightarrow W_{ep} = E_k + E_{gp} - W_{tr} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h - \mu \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h - \mu \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2}{k} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 &= \frac{m \cdot v^2 + 2 \cdot m \cdot g \cdot h - 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha}{k} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{m \cdot v^2 + 2 \cdot m \cdot g \cdot h - 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha}{k} \sqrt{} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \sqrt{\frac{m \cdot v^2 + 2 \cdot m \cdot g \cdot h - 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha}{k}} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \sqrt{\frac{m \cdot v^2 + 2 \cdot m \cdot g \cdot (h - \mu \cdot l \cdot \cos \alpha)}{k}} = \\ &= \sqrt{\frac{50 \text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(5.14 \text{ m} - 0.25 \cdot 10 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ 57' 50''\right)}{2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 2 \text{ m}. \end{aligned}$$



Poštovani, niste poslali sliku gdje se opruga nalazi. Zato zadatak ne smatrajte točno riješenim. Molim Vas poslati sliku kosine i opruge i rezultat koji se nalazi u Vašoj zbirci.

Vježba 415

Tijelo mase 50 kg u položaju A (vrh kosine) ima brzinu 36 km/h i klizeći 10 m niz kosinu, koja se za svakih 10 m puta uzdiže za 6 m, udari u oprugu konstante elastičnosti $k = 2000 \text{ N/m}$. Za koliko će se sabiti opruga ako je faktor trenja između tijela i kosine 0.25? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 2 m.

Zadatak 416 (July, gimnazija)

Odredite snagu zračne struje čiji je poprečni presjek krug polumjera 9 m i koji se giba brzinom 12 m/s. Gustoća zraka je 1.3 kg/m^3 .

Rješenje 416

$$r = 9 \text{ m}, \quad v = 12 \text{ m/s}, \quad \rho = 1.3 \text{ kg/m}^3, \quad P = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase m tijela i njegova obujma V :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine h imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = S \cdot h \Rightarrow V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

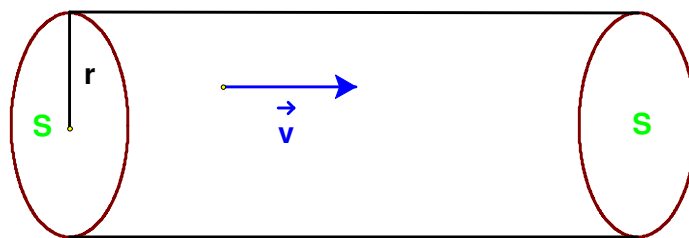
$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}$$

Masa zraka koji struji brzinom v kružnim poprečnim presjekom polumjera r iznosi:

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \rho \cdot S \cdot h \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S = r^2 \cdot \pi \\ h = v \cdot t \end{array} \right] \Rightarrow m = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \cdot t$$



$$h = v \cdot t$$

Snaga struje P jednaka je radu W koji može učiniti struja u jednoj sekundi pri potpunom prelasku njezine kinetičke energije u rad.

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{W}{t} \\ W = E_k \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{E_k}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot t} \Rightarrow \left[m = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \cdot t \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{\rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \cdot t \cdot v^2}{2 \cdot t} \Rightarrow P = \frac{\rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot t \cdot v^3}{2 \cdot t} \Rightarrow P = \frac{\rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v^3}{2} =$$

$$= \frac{1.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (9 \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot \left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3}{2} = 285819.59 \text{ W} \approx 286 \text{ kW}$$

Vježba 416

Odredite snagu zračne struje čiji je poprečni presjek krug polumjera 90 dm i koji se giba brzinom 12 m / s. Gustoća zraka je 1.3 kg / m³.

Rezultat: 286 kW.

Zadatak 417 (July, gimnazija)

U točki A tijelo mase 0.6 kg ima brzinu 2 m / s. Kinetička energija tijela u točki B je 7.5 J. Izračunajte:

- kinetičku energiju tijela u točki A
- brzinu tijela u točki B
- ukupan rad uloženi u tijelo da dođe iz A u B.

Rješenje 417

$$m = 0.6 \text{ kg}, \quad v_1 = 2 \text{ m / s}, \quad E_{k2} = 7.5 \text{ J}, \quad E_{k1} = ?, \quad v_2 = ?, \quad W = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

a)

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.6 \text{ kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1.2 \text{ J}.$$

b)

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = E_{k2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = E_{k2} \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v_2^2 = \frac{2 \cdot E_{k2}}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{2 \cdot E_{k2}}{m} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{k2}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7.5 \text{ J}}{0.6 \text{ kg}}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c)

$$W = E_{k2} - E_{k1} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.6 \text{ kg} \cdot \left(\left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \right) = 6.3 \text{ J}.$$

Vježba 417

U točki A tijelo mase 600 g ima brzinu 2 m / s. Kinetička energija tijela u točki B je 7.5 J. Izračunajte ukupan rad uložen u tijelo da dođe iz A u B.

Rezultat: 6.3 J.

Zadatak 418 (Mario, gimnazija)

Maksimalna brzina ruke karatiste netom prije udarca je 10 m / s. Masa pokretnog dijela ruke je 1 kg. Ako se ruka nakon što daska pukne giba brzinom 1 m / s koliko je energije karatist predao dasci?

Rješenje 418

$$v_1 = 10 \text{ m / s}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad v_2 = 1 \text{ m / s}, \quad W = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = E_{k1} - E_{k2} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ kg} \cdot \left(\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \right) = 49.5 \text{ J}.$$



Vježba 418

Maksimalna brzina ruke karatiste netom prije udarca je 36 km / h. Masa pokretnog dijela ruke je 100 dag. Ako se ruka nakon što daska pukne giba brzinom 1 m / s koliko je energije karatist predao dasci?

Rezultat: 49.5 J.

Zadatak 419 (Mario, gimnazija)

Teret mase 40 kg podigne se djelovanjem sile od 600 N za 4 m.

- Odredi rad.
- Koliko će biti ubrzanje tereta na visini 4 m?
- Kolika će biti brzina tereta na visini 4 m?
(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 419

$$m = 40 \text{ kg}, \quad F = 600 \text{ N}, \quad h = 4 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad W = ?, \quad a = ?, \quad v = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

a)

$$W = F \cdot h = 600 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} = 2400 \text{ J} = 2.4 \text{ kJ}.$$

b)

Rezultantna sila koja izvodi gibanje akceleracijom a jest

$$m \cdot a = F - G \Rightarrow m \cdot a = F - m \cdot g,$$

gdje je G sila teža koja djeluje na teret mase m , a F sila kojom se djeluje na teret pri podizanju.

$$\begin{aligned} m \cdot a = F - G \Rightarrow m \cdot a = F - m \cdot g \Rightarrow m \cdot a = F - m \cdot g \quad / : m \Rightarrow a &= \frac{F}{m} - g = \\ &= \frac{600 \text{ N}}{40 \text{ kg}} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5.19 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

c)

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot h \Rightarrow v^2 = 2 \cdot a \cdot h \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot a \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 5.19 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ m}} = 6.44 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 419

Teret se podigne djelovanjem sile od 1200 N za 2 m. Odredi rad.

Rezultat: 2400 J.

Zadatak 420 (Valentina, gimnazija)

Osoba gura sanduk mase 10 kg stalnom brzinom v horizontalnom silom F po horizontalnom putu duljine 5 m. Faktor trenja klizanja sanduka i poda iznosi 0.3. Koliki rad obavi osoba? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 420

$$m = 10 \text{ kg}, \quad s = 5 \text{ m}, \quad \mu = 0.3, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad W = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Rad osobe troši se na svladavanje sile trenja pri guranju sanduka.

$$\left. \begin{array}{l} F_{tr} = \mu \cdot G \\ W = F_{tr} \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \\ W = F_{tr} \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow W = \mu \cdot m \cdot g \cdot s = 0.3 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m} = 150 \text{ J}.$$



Vježba 420

Osoba gura sanduk mase 0.01 t stalnom brzinom v horizontalnom silom F po horizontalnom putu duljine 50 dm. Faktor trenja klizanja sanduka i poda iznosi 0.3. Koliki rad obavi osoba? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 150 J.