

### Zadatak 321 (Grga, srednja škola)

Na vodoravnom dijelu puta duljine 3 km brzina automobila poveća se sa 36 km/h na 72 km/h. Ako je masa automobila 1.5 t, a koeficijent trenja između automobilskih guma i puta iznosi 0.02, izračunajte rad što ga obavi automobilski motor. (ubrzanje sile teže  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 321

$s = 3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$ ,  $v_1 = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}$ ,  
 $v_2 = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}$ ,  $m = 1.5 \text{ t} = 1500 \text{ kg}$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $W = ?$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E_k.$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počine gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine  $G$  iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Rad  $W$  motora jednak je zbroju rada  $W_{tr}$  sile trenja i rada zbog povećanja kinetičke energije  $W_k = \Delta E_k$ .

$$\begin{aligned} W &= W_{tr} + W_k \Rightarrow W = W_{tr} + \Delta E_k \Rightarrow W = W_{tr} + (E_{k2} - E_{k1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow W &= F_{tr} \cdot s + \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \right) \Rightarrow W = \mu \cdot G \cdot s + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow W = \mu \cdot m \cdot g \cdot s + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \\ &= 0.02 \cdot 1500 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3000 \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 1500 \text{ kg} \cdot \left( \left( 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = \\ &= 1107900 \text{ J} = 1.1079 \cdot 10^6 \text{ J} \approx 1.1 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

#### Vježba 321

Na vodoravnom dijelu puta duljine 3 km brzina automobila poveća se sa 36 km/h na 72 km/h. Ako je masa automobila 3 t, a koeficijent trenja između automobilskih guma i puta iznosi 0.02, izračunajte rad što ga obavi automobilski motor. (ubrzanje sile teže  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 2.2 MJ.

### Zadatak 322 (Vesna, srednja škola)

Tijelo mase  $m$  pada s visine  $h$ . Početna brzina tijela je nula. Tijelo udara o tlo brzinom  $v$ . Koliko se pritom mehaničke energije pretvorilo u druge oblike energije tijekom padanja?

A.  $m \cdot g \cdot h$       B.  $\frac{m \cdot v^2}{2}$       C.  $m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v^2}{2}$       D.  $m \cdot g \cdot h - \frac{m \cdot v^2}{2}$

### Rješenje 322

$$m, \quad h, \quad v, \quad g, \quad \Delta E = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Tijelo je na visini  $h$  imalo gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h.$$

Pri udaru o tlo brzinom  $v$  tijelo ima energiju u obliku kinetičke energije

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Tijekom padanja u druge oblike energije pretvorilo se:

$$\Delta E = E_{gp} - E_k \Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 322

Tijelo mase  $m$  pada s visine  $h$ . Početna brzina tijela je nula. Tijelo udara o tlo brzinom  $2 \cdot v$ . Koliko se pritom mehaničke energije pretvorilo u druge oblike energije tijekom padanja?

A.  $m \cdot g \cdot h$       B.  $2 \cdot m \cdot v^2$       C.  $m \cdot g \cdot h + 2 \cdot m \cdot v^2$       D.  $m \cdot g \cdot h - 2 \cdot m \cdot v^2$

**Rezultat:** D.

### Zadatak 323 (Marko, tehnička škola)

Nuklearna elektrana Krško ima snagu 632 MW. Koliku energiju može proizvesti tijekom jedne godine, ako neprekidno radi maksimalnom snagom? Energiju izrazite u kWh.

### Rješenje 323

$$P = 632 \text{ MW} = 632 \cdot 10^6 \text{ W} = 6.32 \cdot 10^8 \text{ W}, \quad t = 365.2425 \text{ d} = [365.2425 \cdot 24] = 8765.82 \text{ h},$$
$$E = ?$$

$$1 \text{ godina} = 365.2425 \text{ dana}, \quad 1 \text{ dan} = 24 \text{ sata}$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E_k.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Vatsat (Wh) mjerna je jedinica izvan SI koja je dopuštena i uobičajena za iskazivanje vrijednosti električne energije. Jedan vatsat je energija koju utroši potrošač snage jedan vat za vrijeme od jednog sata:

$$1 \text{ Wh} = 1 \text{ W} \cdot 1 \text{ h} \quad , \quad 1 \text{ kWh} = 1 \cdot 10^3 \text{ Wh} - \text{kilovatsat.}$$

Energija elektrane izražena u kWh iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{W}{t} \\ W = E \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{E}{t} \Rightarrow P = \frac{E}{t} / \cdot t \Rightarrow E = P \cdot t = 6.32 \cdot 10^8 \text{ W} \cdot 8765.82 \text{ h} =$$

$$= 5.54 \cdot 10^{12} \text{ Wh} = 5.54 \cdot 10^9 \cdot 10^3 \text{ Wh} = 5.54 \cdot 10^9 \text{ kWh.}$$

### Vježba 323

Nuklearna elektrana ima snagu 316 MW. Koliku energiju može proizvesti tijekom dvije godine, ako neprekidno radi maksimalnom snagom? Energiju izrazite u kWh.

**Rezultat:**  $5.54 \cdot 10^9 \text{ kWh.}$

### Zadatak 324 (Petra, gimnazija)

Tijelo mase 2 kg slobodno pada s visine od 50 m. Nakon što je u slobodnom padu prešlo 30 m, tj. palo na 20 m:

- A. potencijalna energija jednaka je 0 J
- B. kinetička energija jednaka je 0 J
- C. potencijalna energija jednaka je 1000 J
- D. kinetička energija jednaka je 1000 J
- E. ukupna energija jednaka je 1000 J.

(ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 324

$$m = 2 \text{ kg}, \quad h = 50 \text{ m}, \quad h_1 = 30 \text{ m}, \quad h_2 = 20 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad E = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Mehanička energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije u mehaničkom sustavu, tj. energija koja ovisi o položaju i gibanju tijela zbog djelovanja sile.

**U zatvorenome sustavu zbroj potencijalne i kinetičke energije je konstantan.**

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je  $v$  brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0$  m/s i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje su  $h$  visina pada,  $g$  ubrzanje sile teže.

1. inačica

Ukupna energija jednaka je zbroju gravitacijske potencijalne i kinetičke energije.

$$E = E_{gp} + E_k.$$

Prema zakonu održanja energije ona je uvijek stalna. Kada tijelo na visini  $h$  miruje, njegova je brzina  $v = 0$  m/s pa ukupna energija iznosi:

$$\begin{aligned} E = E_{gp} + E_k &\Rightarrow E = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(0 \frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E = m \cdot g \cdot h + 0 \Rightarrow E = m \cdot g \cdot h = 2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{m}{s} \cdot 50 \text{ m} = 1000 \text{ J} = 1 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod E.

2. inačica

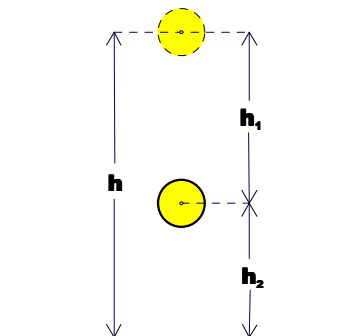
Ukupna energija jednaka je zbroju gravitacijske potencijalne i kinetičke energije.

$$E = E_{gp} + E_k.$$

Prema zakonu održanja energije ona je uvijek stalna. Budući da je tijelo u slobodnom padu već prevalilo put  $h_1 = 30$  m, nalazit će se na visini  $h_2 = 20$  m iznad tla pa ukupna energija iznosi:

$$\begin{aligned} E = E_{gp} + E_k &\Rightarrow E = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \left[ v^2 = 2 \cdot g \cdot h_1 \right] \Rightarrow E = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow E = m \cdot g \cdot h_2 + m \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow E = m \cdot g \cdot (h_2 + h_1) = \\ &= 2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{m}{s} \cdot (20 \text{ m} + 30 \text{ m}) = 1000 \text{ J} = 1 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod E.



### Vježba 324

Tijelo mase 2 kg slobodno pada s visine od 50 m. Nakon što je u slobodnom padu prešlo 10 m, tj. palo na 40 m:

- A. potencijalna energija jednaka je 0 J
- B. kinetička energija jednaka je 0 J
- C. potencijalna energija jednaka je 1000 J
- D. kinetička energija jednaka je 1000 J
- E. ukupna energija jednaka je 1000 J. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>)

**Rezultat:** E.

### Zadatak 325 (Iva, medicinska škola)

Uteg mase 0.2 kg harmonijski titra na opruzi konstante elastičnosti 80 N/m s amplitudom 0.1 m. Kolika je brzina utega kada mu je elongacija 0.05 m?

#### Rješenje 325

$$m = 0.2 \text{ kg}, \quad k = 80 \text{ N/m}, \quad A = 0.1 \text{ m}, \quad x = 0.05 \text{ m}, \quad v = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Titranje je periodično gibanje oko ravnotežnog položaja. Periodično gibanje je gibanje koje se ponavlja nakon određenog vremenskog intervala (perioda). Najjednostavnije titranje je harmonijsko titranje, tj. titranje koje uzrokuje harmonijska (elastična) sila. Ona je razmjerna pomaku iz ravnotežnog položaja:

$$F = -k \cdot x.$$

Pomaknemo li oprugu iz ravnotežnog položaja stiskanjem ili rastezanjem, ona titra oko tog položaja. Svaki pomak od ravnotežnog položaja nazivamo elongacijom, a najveći pomak od položaja ravnoteže nazivamo amplitudom. Elastična potencijalna energija opruge dana je formulom

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je  $x$  pomak od ravnotežnog položaja,  $k$  koeficijent elastičnosti opruge.

#### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Kada uteg titra kinetička mu je energija jednaka razlici maksimalne elastične potencijalne energija u ovisnosti o amplitudi  $A$  i elastične potencijalne energije u ovisnosti o trenutnoj elongaciji  $x$ .

$$\begin{aligned} E_k = \Delta E_{ep} &\Rightarrow E_k = E_{epA} - E_{epx} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \quad / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m} \cdot A^2 - \frac{k}{m} \cdot x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = \frac{k}{m} \cdot (A^2 - x^2) \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m} \cdot (A^2 - x^2) \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot (A^2 - x^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{80 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0.2 \text{ kg}} \cdot ((0.1 \text{ m})^2 - (0.05 \text{ m})^2)} = 1.73 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

#### Vježba 325

Uteg mase 20 dag harmonijski titra na opruzi konstante elastičnosti 80 N/m s amplitudom 1 dm. Kolika je brzina utega kada mu je elongacija 5 cm?

**Rezultat:** 1.73 m/s.

### Zadatak 326 (Josip, strukovna škola)

Površina klipa parnog stroja iznosi 500 cm<sup>2</sup>, a tlak što ga uzrokuje para na klip je 1.8 MPa. Koliki rad obavi para, ako se klip pomakne za 80 cm?

#### Rješenje 326

$$S = 500 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2, \quad p = 1.8 \text{ MPa} = 1.8 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad s = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}, \quad W = ?$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Tlak je omjer sile  $F$  što jednoliko raspoređena djeluje okomito na neku površinu  $S$  i te površine:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Rad pare iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = p \cdot S \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow W = p \cdot S \cdot s = 1.8 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot 0.8 \text{ m} = 7.2 \cdot 10^4 \text{ J} = 72 \text{ kJ}.$$

### Vježba 326

Površina klipa parnog stroja iznosi  $1000 \text{ cm}^2$ , a tlak što ga uzrokuje para na klip je  $0.9 \text{ MPa}$ . Koliki rad obavi para, ako se klip pomakne za  $80 \text{ cm}$ ?

**Rezultat:** 72 kJ.

### Zadatak 327 (Josip, strukovna škola)

Motor automobila vuče teret vučnom silom  $750 \text{ N}$  razvijajući stalnu brzinu  $1.6 \text{ m/s}$ . Koliki rad obavi motor za  $40$  minuta?

#### Rješenje 327

$$F = 750 \text{ N}, \quad v = 1.6 \text{ m/s}, \quad t = 40 \text{ min} = [40 \cdot 60] = 2400 \text{ s}, \quad W = ?$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje su  $v$  i  $s$  brzina, odnosno put za tijelo pošto se giba stalnom brzinom za vrijeme  $t$ .

Rad motora iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} s = v \cdot t \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow W = F \cdot v \cdot t = 750 \text{ N} \cdot 1.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2400 \text{ s} = 2.88 \cdot 10^6 \text{ J} = 2.88 \text{ MJ}.$$

### Vježba 327

Motor automobila vuče teret vučnom silom  $375 \text{ N}$  razvijajući stalnu brzinu  $3.2 \text{ m/s}$ . Koliki rad obavi motor za  $40$  minuta?

**Rezultat:** 2.88 MJ.

### Zadatak 328 (Marijan, tehnička škola)

Tramvaj mase  $18$  tona postigne  $2$  sekunde nakon početka gibanja brzinu  $10.8 \text{ km/h}$ . Odredi srednju vrijednost snage koju je morao razviti motor tramvaja za vrijeme gibanja.

#### Rješenje 328

$$m = 18 \text{ t} = 18000 \text{ kg}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad v = 10.8 \text{ km/h} = [10.8 : 3.6] = 3 \text{ m/s}, \quad P = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E_k.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}$$

Srednja vrijednost snage koju je morao razviti motor tramvaja za vrijeme gibanja iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ W = E_k \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot t} =$$

$$= \frac{18000 \text{ kg} \cdot \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 2 \text{ s}} = 40500 \text{ W} = 40.5 \text{ kW}.$$

### Vježba 328

Tramvaj mase 36 tona postigne 4 sekunde nakon početka gibanja brzinu 10.8 km/h. Odredi srednju vrijednost snage koju je morao razviti motor tramvaja za vrijeme gibanja.

**Rezultat:** 40.5 kW.

### Zadatak 329 (Bingo, maturant)

Iz puške mase 8 kg ispalimo metak mase 8 g brzinom 800 m/s. Kolikom se brzinom puška pomakne unatrag?

#### Rješenje 329

$$m_1 = 8 \text{ kg}, \quad m_2 = 8 \text{ g} = 0.008 \text{ kg}, \quad v_2 = 800 \text{ m/s}, \quad v_1 = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad ; \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Za dva tijela mase  $m_1$  i  $m_2$  koja međusobno djeluju jedno na drugo vrijedi zakon akcije i reakcije

$$F_1 = -F_2,$$

gdje  $F_1$  znači silu kojom tijelo mase  $m_2$  djeluje na tijelo mase  $m_1$  i ima hvatište u tijelu mase  $m_1$ , a  $F_2$  silu kojom tijelo mase  $m_1$  djeluje na tijelo mase  $m_2$  te ima hvatište u tijelu mase  $m_2$ . Te su dvije sile jednake veličinom i suprotna su smjera. Iz toga zakona proizlazi drugi, tj. zakona održanja količine gibanja koji glasi

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0,$$

ako su početne brzine obaju tijela bile jednake nuli. Brzine  $v_1$  i  $v_2$  brzine su tijela masa  $m_1$  odnosno  $m_2$  nakon njihova međusobnog djelovanja.

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Ako je početna brzina nula, za tijelo mase  $m$  na koje je za vrijeme  $t$  djelovala sila  $F$  vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je  $v$  brzina na kraju vremenskog intervala  $t$  za koji je sila djelovala. Umnožak

$$I = F \cdot t$$

zovemo impulsom sile  $F$ , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase  $m$ .

#### Treći Newtonov poučak:

Ako neko tijelo mase  $m_1$  djeluje na drugo tijelo mase  $m_2$  nekom silom  $F_{21}$ , onda drugo tijelo djeluje na prvo silom  $F_{12}$  koja je jednaka sili  $F_{21}$ , ali je suprotnog smjera.

$$F_{12} = F_{21} \quad \text{ili vektorski} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Iz toga zakona proizlazi drugi, tj. zakon održanja količine gibanja, a taj glasi:

$$m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' = 0$$

ako su početne brzine obaju tijela bile jednake nuli. Brzine  $v_1'$  i  $v_2'$  brzine su tijela masa  $m_1$  odnosno Sila barutnih plinova djeluje impulsom sile na metak i on odleti iz puške na jednu stranu dok se puška pod utjecajem sile jednake po iznosu, a suprotne po smjeru pomakne na drugu stranu. (treći Newtonov poučak). Impulsi sile koje primi metak, odnosno puška jednaki su, ali suprotnog smjera te su i promjene količine gibanja metka i puške jednake, a suprotnog smjera. Isti zaključak dobivamo i iz zakona održanja količine gibanja koji kaže da je ukupna količina gibanja izoliranog sustava prije i poslije međusobnog djelovanja unutar sustava jednaka. U našem slučaju sustav metak i puška prije ispaljivanja imaju brzine jednake nuli (miruju), dakle i ukupnu količinu gibanja nula. Zato nakon ispaljivanja ukupna količina gibanja mora biti nula.

Količina gibanja puške i metka, dok metak nije ispaljen, jednaka je nuli. Kad se metak ispali brzinom  $v_2$ , zbog zakona održanja količine gibanja ukupna količina gibanja ostaje jednaka nuli pa se puška mora gibati u suprotnom smjeru brzinom  $v_1$ . Zato je:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 &\Rightarrow m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2 \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{1}{m_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot v_2 = -\frac{0.008 \text{ kg}}{8 \text{ kg}} \cdot 800 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Rezultatu pridružujemo negativan predznak jer je pomak puške protivnog smjera u odnosu na brzinu gibanja metka. Predznak minus označava da je pomak puške suprotnog smjera od gibanja (brzine) metka.



### Vježba 329

Iz puške mase 7 kg ispalimo metak mase 7 g brzinom 700 m/s. Kolikom se brzinom puška pomakne unatrag?.

**Rezultat:**  $-0.7 \text{ m/s}$ .

### Zadatak 330 (Josipa, maturantica)

Automobil, mase 800 kg, jednoliko se usporava i zaustavi na putu od 7 m u 2 s. Kolika se energija pretvori u toplinu? (Trenjem pri kočenju sva se kinetička energija automobila pretvori u toplinu.)

### Rješenje 330

$$m = 800 \text{ kg}, \quad s = 7 \text{ m}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad E_k = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t,$$

gdje je  $s$  put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ . Za jednoliko usporeno gibanje vrijedi isti izraz.

Put  $s$  koji vozač prevali za vrijeme kočenja je



$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$$

pa energija pretvorena u toplinu iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \cdot \frac{2}{t} \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = \frac{2 \cdot s}{t} \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left( \frac{2 \cdot s}{t} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4 \cdot s^2}{t^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4 \cdot s^2}{t^2} \Rightarrow E_k = 2 \cdot m \cdot \frac{s^2}{t^2} \Rightarrow E_k = 2 \cdot m \cdot \left( \frac{s}{t} \right)^2 =$$

$$= 2 \cdot 800 \text{ kg} \cdot \left( \frac{7 \text{ m}}{2 \text{ s}} \right)^2 = 19600 \text{ J} = 1.96 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

### Vježba 330

Automobil, mase 800 kg, jednoliko se usporava i zaustavi na putu od 14 m u 4 s. Kolika se energija pretvori u toplinu? (Trenjem pri kočenju sva se kinetička energija automobila pretvori u toplinu.)

**Rezultat:** 19600 J.

### Zadatak 331 (Lenny, gimnazija)

Na stolu se nalazi tijelo pričvršćeno za oprugu. Trenje je zanemarivo. Da bismo stisnuli oprugu od ravnotežnog položaja za 1 cm potrebno je obaviti rad  $W$ . Koliki rad treba obaviti da oprugu stisnemo od ravnotežnog položaja za 2 cm?

- A. 1 W      B. 2 W      C. 3 W      D. 4 W

### Rješenje 331

$$x_1 = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}, \quad W_1 = W, \quad x_2 = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}, \quad W_2 = ?$$

Potencijalna energija elastične deformacije opruge konstante  $k$  kojoj se duljina djelovanjem sile smanjila ili povećala za  $s$  računa se po formuli

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2,$$

s je pomak iz položaja ravnoteže (elongacija).

Kad tijelo obavlja rad mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} W_1 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 \\ W_2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{x_2^2}{x_1^2} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \cdot W_1 \Rightarrow W_2 = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \cdot W_1 =$$

$$= \left( \frac{0.02 \text{ m}}{0.01 \text{ m}} \right)^2 \cdot W = 4 \cdot W.$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

Uočimo da je potencijalna energija opruge razmjerna sa kvadratom elongacije.

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \Rightarrow E_p \sim s^2.$$

Ako se elongacija poveća 2 puta potencijalna energija povećat će se  $2^2 = 4$  puta.  
 Ako se elongacija poveća 3 puta potencijalna energija povećat će se  $3^2 = 9$  puta.  
 Ako se elongacija poveća n puta potencijalna energija povećat će se  $n^2$  puta.  
 Budući da se, u zadatku, elongacija opruge povećala 2 puta

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{0.02 \text{ m}}{0.01 \text{ m}} = 2,$$

potencijalna energija povećat će se 4 puta.  
 Odgovor je pod D.

### Vježba 331

Na stolu se nalazi tijelo pričvršćeno za oprugu. Trenje je zanemarivo. Da bismo stisnuli oprugu od ravnotežnog položaja za 3 cm potrebno je obaviti rad W. Koliki rad treba obaviti da oprugu stisnemo od ravnotežnog položaja za 6 cm?

- A. 1 W      B. 2 W      C. 3 W      D. 4 W

**Rezultat:** D.

### Zadatak 332 (Lenny, gimnazija)

Na stolu se nalazi tijelo pričvršćeno za oprugu. Trenje je zanemarivo. Da bismo stisnuli oprugu od ravnotežnog položaja za 1 cm potrebno je obaviti rad W. Koliki rad treba obaviti da oprugu stisnemo od položaja 1 cm do položaja 2 cm?

- A. 1 W      B. 2 W      C. 3 W      D. 4 W

### Rješenje 332

$$x_1 = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}, \quad W_1 = W, \quad x_2 = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}, \quad \Delta W = ?$$

Potencijalna energija elastične deformacije opruge konstante k kojoj se duljina djelovanjem sile smanjila ili povećala za s računa se po formuli

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2,$$

s je pomak iz položaja ravnoteže (elongacija).

Kad tijelo obavlja rad mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} W_1 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 \\ W_2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 \\ \Delta W = W_2 - W_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 \Rightarrow \Delta W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 \cdot \left( \frac{x_2^2}{x_1^2} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta W = W_1 \cdot \left( \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 1 \right) = W \cdot \left( \left( \frac{0.02 \text{ m}}{0.01 \text{ m}} \right)^2 - 1 \right) = 3 \cdot W.$$

Odgovor je pod C.

2. inačica

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 \\ W_2 &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{x_2^2}{x_1^2} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \cdot W_1 \Rightarrow W_2 = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \cdot W_1.$$

Rad  $\Delta W$  koji treba obaviti da oprugu stisnemo od položaja  $x_1$  do položaja  $x_2$  iznosi:

$$\Delta W = W_2 - W_1 \Rightarrow \left[ W_2 = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \cdot W_1 \right] \Rightarrow \Delta W = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \cdot W_1 - W_1 \Rightarrow \Delta W = W_1 \cdot \left( \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 1 \right) =$$

$$= W \cdot \left( \left( \frac{0.02 \text{ m}}{0.01 \text{ m}} \right)^2 - 1 \right) = 3 \cdot W.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 332

Na stolu se nalazi tijelo pričvršćeno za oprugu. Trenje je zanemarivo. Da bismo stisnuli oprugu od ravnotežnog položaja za 2 cm potrebno je obaviti rad  $W$ . Koliki rad treba obaviti da oprugu stisnemo od položaja 2 cm do položaja 4 cm?

- A. 1  $W$       B. 2  $W$       C. 3  $W$       D. 4  $W$

**Rezultat:** C.

### Zadatak 333 (Anchy, gimnazija)

Kamen mase 4 dag bačen je vertikalno prema dolje s visine 80 m početnom brzinom 4 m/s i pao je brzinom 32 m/s. Kolika je srednja zaustavna sila u zraku? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 333

$$m = 4 \text{ dag} = 0.04 \text{ kg}, \quad h = 80 \text{ m}, \quad v_1 = 4 \text{ m/s}, \quad v_2 = 32 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.

- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Energija može prelaziti s jednog sustava na drugi. Taj je prijelaz upravo rad. Pri svakom takvom procesu zbroj energija i radova sila ostaje sačuvan – to je zakon o očuvanju (održanju) energije:

$$E_1 + E_2 + E_2 + \dots + W_1 + W_2 + W_3 + \dots = E_1' + E_2' + E_3' + \dots + W_1' + W_2' + W_3' + \dots$$

Prema zakonu o održanju energije zbroj gravitacijske potencijalne  $E_{gp}$  i kinetičke energije  $E_{k1}$  kamena u trenutku izbacivanja jednak je zbroju preostale kinetičke energije  $E_{k2}$  pri padu i rada  $W$  zaustavne sile.

$$E_{gp} + E_{k1} = E_{k2} + W \Rightarrow W = E_{gp} + E_{k1} - E_{k2}$$

Srednja zaustavna sila iznosi:

$$\left. \begin{aligned} W &= F \cdot h \\ W &= E_{gp} + E_{k1} - E_{k2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow F \cdot h = E_{gp} + E_{k1} - E_{k2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cdot h = E_{gp} + E_{k1} - E_{k2} \quad / \cdot \frac{1}{h} \Rightarrow F = \frac{E_{gp} + E_{k1} - E_{k2}}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2}{h} \Rightarrow F = m \cdot \frac{g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot v_2^2}{h} =$$

$$= 0.04 \text{ kg} \cdot \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 80 + \frac{1}{2} \cdot \left(4 \frac{m}{s}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(32 \frac{m}{s}\right)^2}{80 \text{ m}} = 0.140 \text{ N}$$

### Vježba 333

Kamen mase 4 dag bačen je vertikalno prema dolje s visine 60 m početnom brzinom 4 m/s i pao je brzinom 32 m/s. Kolika je srednja zaustavna sila u zraku? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.056 N.

### Zadatak 334 (Mery, gimnazija)

Sila od 15 N djeluje na masu 75 kg jednoliko je ubrzavajući. Odredi rad nakon 5 s.

### Rješenje 334

$$F = 15 \text{ N}, \quad m = 75 \text{ kg}, \quad t = 5 \text{ s}, \quad W = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{F}{m} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow W = F \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot t^2}{m} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F \cdot t)^2}{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(15 \text{ N} \cdot 5 \text{ s})^2}{75 \text{ kg}} = 37.5 \text{ J}.$$

### Vježba 334

Sila od 15 N djeluje na masu 300 kg jednoliko je ubrzavajući. Odredi rad nakon 10 s.

**Rezultat:** 37.5 J.

### Zadatak 335 (Stjepan, strukovna škola)

Kolika je snaga konja koji vuče kola, mase 1.1 t, 10 km daleko u jednom satu, ako je prosječan otpor gibanju (trenje i otpor zraka) jednak  $\frac{1}{40}$  težine kola? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 335

$$m = 1.1 \text{ t} = 1100 \text{ kg}, \quad s = 10 \text{ km} = 10000 \text{ m}, \quad t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}, \\ F_{tr} = \frac{1}{40} \cdot G = \frac{1}{40} \cdot m \cdot g, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad P = ?$$

### Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja.

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Snaga se također može izračunati izrazom

$$P = F \cdot v,$$

gdje je  $F$  sila u smjeru gibanja tijela, a  $v$  brzina tijela.

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta  $s$  jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow v = \frac{s}{t},$$

gdje je  $v$  stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

1. inačica

Budući da konj vuče kola jednolikom brzinom, njegova vučna sila  $F$  po iznosu jednaka je sili trenja  $F_{tr}$ . Zato je:

$$\left. \begin{array}{l} F_{tr} = \frac{1}{40} \cdot m \cdot g \\ F = F_{tr} \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = \frac{1}{40} \cdot m \cdot g \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow W = \frac{1}{40} \cdot m \cdot g \cdot s.$$

Snaga konja iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} W = \frac{1}{40} \cdot m \cdot g \cdot s \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{40} \cdot m \cdot g \cdot s}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot g \cdot s}{40 \cdot t} = \frac{1100 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10000 \text{ m}}{40 \cdot 3600 \text{ s}} = 749.38 \text{ W}.$$

2. inačica

Budući da konj vuče kola jednolikom brzinom, njegova vučna sila  $F$  po iznosu jednaka je sili trenja  $F_{tr}$ . Snaga konja iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F_{tr} = \frac{1}{40} \cdot m \cdot g \\ F = F_{tr} \\ v = \frac{s}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = \frac{1}{40} \cdot m \cdot g \\ v = \frac{s}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow [P = F \cdot v] \Rightarrow P = \frac{1}{40} \cdot m \cdot g \cdot \frac{s}{t} =$$

$$= \frac{1}{40} \cdot 1100 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{10000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 749.38 \text{ W}.$$

### Vježba 335

Kolika je snaga konja koji vuče kola, mase 1.1 t, 20 km daleko u dva sata, ako je prosječan otpor gibanju (trenje i otpor zraka) jednak  $\frac{1}{40}$  težine kola? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 749.38 W.

### Zadatak 336 (Mirta, gimnazija)

Čovjek mase 70 kg u čamcu mase 100 kg vuče konop privezan za stup na obali silom 50 N. Izračunaj rad koji čovjek obavi za 6 s.

### Rješenje 336

$$m_1 = 70 \text{ kg}, \quad m_2 = 100 \text{ kg}, \quad F = 50 \text{ N}, \quad t = 6 \text{ s}, \quad W = ?$$

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v = a \cdot t,$$

gdje su  $v$  i  $s$  brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E_k.$$

Ako je početna brzina nula, za tijelo mase  $m$  na koje je za vrijeme  $t$  djelovala sila  $F$  vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je  $v$  brzina na kraju vremenskog intervala  $t$  za koji je sila djelovala. Umnožak

$$I = F \cdot t$$

zovemo impulsom sile  $F$ , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase  $m$ .

Sila  $F$  pokreće čamac i čovjeka u njemu pa je ukupna masa sustava  $m_1 + m_2$ .

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{F}{m_1 + m_2} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m_1 + m_2} \cdot t^2 \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow W = F \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m_1 + m_2} \cdot t^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{m_1 + m_2} \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F \cdot t)^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(50 \text{ N} \cdot 6 \text{ s})^2}{70 \text{ kg} + 100 \text{ kg}} = 264.71 \text{ J}.$$

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{F}{m_1 + m_2} \\ v = a \cdot t \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 \\ W = E_k \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = \frac{F}{m_1 + m_2} \cdot t \\ W = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \left( \frac{F}{m_1 + m_2} \cdot t \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \frac{(F \cdot t)^2}{(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \frac{(F \cdot t)^2}{(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F \cdot t)^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(50 \text{ N} \cdot 6 \text{ s})^2}{70 \text{ kg} + 100 \text{ kg}} = 264.71 \text{ J}.$$

3. inačica

$$\left. \begin{aligned} F \cdot t &= (m_1 + m_2) \cdot v \\ E_k &= \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 \\ W &= E_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F \cdot t &= (m_1 + m_2) \cdot v \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \\ W &= \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left. \begin{aligned} v &= \frac{F \cdot t}{m_1 + m_2} \\ W &= \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \left( \frac{F \cdot t}{m_1 + m_2} \right)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow W &= \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \frac{(F \cdot t)^2}{(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \frac{(F \cdot t)^2}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow \\
 \Rightarrow W &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(F \cdot t)^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(50 \text{ N} \cdot 6 \text{ s})^2}{70 \text{ kg} + 100 \text{ kg}} = 264.71 \text{ J}.$$

### Vježba 336

Čovjek mase 70 kg u čamcu mase 100 kg vuče konop privezan za stup na obali silom 100 N. Izračunaj rad koji čovjek obavi za 3 s.

**Rezultat:** 264.71 J.

### Zadatak 337 (Stjepan, tehnička škola)

Saonice mase 100 kg spuštaju se iz mirovanja niz brijeg duljine 100 m i visine 8 m. Ako je brzina saonice pri dnu brijega 10 m/s, onda su na putu niz brijeg saonice svladale trenje (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ):

- A. 10.00 N      B. 28.48 N      C. 14.72 N      D. 29.43 N

### Rješenje 337

$$m = 100 \text{ kg}, \quad s = 100 \text{ m}, \quad h = 8 \text{ m}, \quad v = 10 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_{\text{tr}} = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

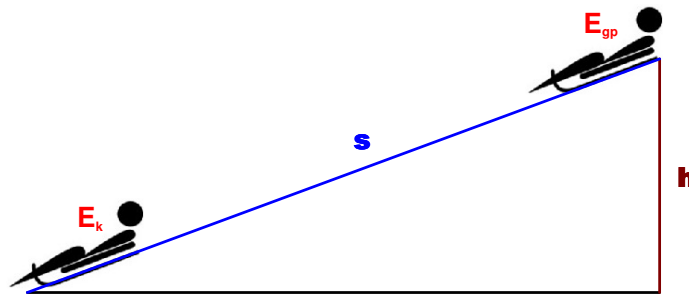
$$W = F \cdot s.$$

Budući da je rad sile trenja  $W_{\text{tr}}$  jednak razlici gravitacijske potencijalne energije  $E_{gp}$  saonice na vrhu brijega i kinetičke energije  $E_k$  na podnožju brijega, vrijedi:



$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} W_{tr} &= F_{tr} \cdot s \\ W_{tr} &= E_{gp} - E_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_{tr} \cdot s = E_{gp} - E_k \Rightarrow F_{tr} \cdot s = E_{gp} - E_k \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow F_{tr} = \frac{E_{gp} - E_k}{s} \Rightarrow \\
 \Rightarrow F_{tr} &= \frac{m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{s} \Rightarrow F_{tr} = \frac{m \cdot \left( g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right)}{s} = \\
 &= \frac{100 \text{ kg} \cdot \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{100 \text{ m}} = 28.48 \text{ N}.
 \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.



### Vježba 337

Saonice mase 200 kg spuštaju se iz mirovanja niz brijeg duljine 200 m i visine 8 m. Ako je brzina saonice pri dnu brijega 10 m/s, onda su na putu niz brijeg saonice svladale trenje (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ):

- A. 10.00 N      B. 28.48 N      C. 14.72 N      D. 29.43 N

**Rezultat:** B.

### Zadatak 338 (Jelena, medicinska škola)

Tijelo harmonijski titra ovješeno na oprugu konstante elastičnosti 0.2 N/m. Kinetička energija pri prolasku kroz ravnotežni položaj iznosi  $2.5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ . Kolikom amplitudom titra to tijelo? Zanimarite gubitke energije.

- A. 1.3 cm      B. 2.5 cm      C. 5.0 cm      D. 7.5 cm

### Rješenje 338

$$k = 0.2 \text{ N/m}, \quad E = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ J}, \quad x = ?$$

Titranje je periodično gibanje oko ravnotežnog položaja. Periodično gibanje je gibanje koje se ponavlja nakon određenog vremenskog intervala (periode). Pomaknemo li oprugu iz ravnotežnog položaja stiskanjem ili rastezanjem, ona titra oko tog položaja. Svaki pomak od ravnotežnog položaja nazivamo elongacijom, a najveći pomak od položaja ravnoteže nazivamo amplitudom. Ukupna energija titranja dana je formulom

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je  $x$  amplituda.

$$\begin{aligned}
 E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \cdot \frac{2}{k} \Rightarrow x^2 = \frac{2 \cdot E}{k} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{k}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ J}}{0.2 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0.05 \text{ m} = 5.0 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 338

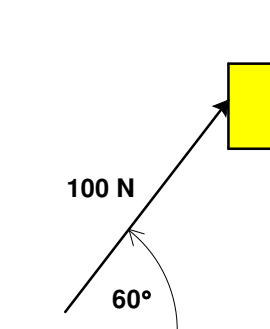
Tijelo harmonijski titra ovješeno na oprugu konstante elastičnosti 0.4 N/m. Kinetička energija pri prolasku kroz ravnotežni položaj iznosi  $5 \cdot 10^{-4}$  J. Kolikom amplitudom titra to tijelo? Zanimarite gubitke energije.

- A. 1.3 cm      B. 2.5 cm      C. 5.0 cm      D. 7.5 cm

**Rezultat:** C.

### Zadatak 339 (Darija, medicinska škola)

Ako se tijelo gura uz vertikalni zid silom od 100 N pod kutom od  $60^\circ$  u odnosu na tlo, prijeđe put od 1.5 m. Koliki je rad sile?



### Rješenje 339

$$F = 100 \text{ N}, \quad s = 1.5 \text{ m}, \quad \beta = 60^\circ, \quad W = ?$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi:

$$W = F \cdot s.$$

Ako na tijelo djeluje sila pod šiljastim (tupim) kutom u odnosu na pravac duž kojeg se giba tijelo, rad sile je pozitivan (negativan):

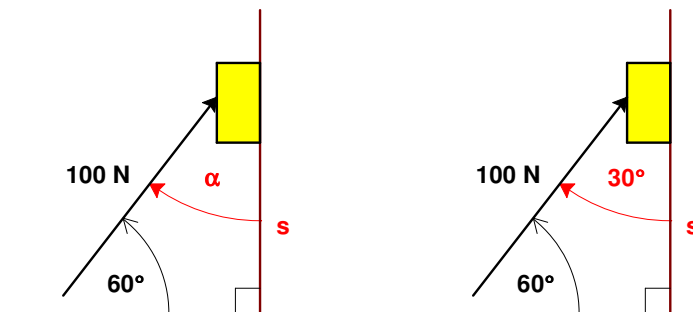
$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha,$$

gdje je  $F$  sila,  $s$  prijeđeni put,  $\alpha$  kut između smjera gibanja i smjera djelovanja sile.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Kosinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



Određimo kut  $\alpha$  koji vektor sile zatvara sa smjerom puta po kojemu se tijelo giba:

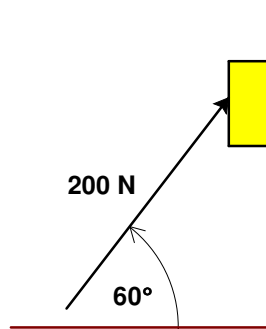
$$\alpha = 90^\circ - 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Rad sile iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = 100 \text{ N}, \quad s = 1.5 \text{ m}, \quad \alpha = 30^\circ \\ W = F \cdot s \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow W = 100 \text{ N} \cdot 1.5 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ = 129.90 \text{ J} \approx 130 \text{ J}.$$

### Vježba 339

Ako se tijelo gura uz vertikalni zid silom od 200 N pod kutom od  $60^\circ$  u odnosu na tlo, prijeđe put od 1.5 m. Koliki je rad sile?



**Rezultat:** 260 J.

### Zadatak 340 (Domagoj, tehnička škola)

Vagon mase 10 t giba se brzinom 2 m/s u odnosu na prugu. Vagon mase 15 t giba se prema vagonu mase 10 t brzinom 1 m/s u odnosu na prugu. Nakon sudara oba se vagona gibaju zajedničkom brzinom  $v$ . Koliko se mehaničke energije pri sudaru vagona pretvorilo u druge oblike energije?

#### Rješenje 340

$m_1 = 10 \text{ t} = 1 \cdot 10^4 \text{ kg}$ ,  $v_1 = 2 \text{ m/s}$ ,  $m_2 = 15 \text{ t} = 1.5 \cdot 10^4 \text{ kg}$ ,  $v_2 = -1 \text{ m/s}$  **smjer brzine suprotan je u odnosu na brzinu prvog vagona**,  $v_1' = v_2' = v$ ,  $\Delta E = ?$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

#### Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Zbog zakona održanja količine gibanja količina gibanja rakete prije raspada jednaka je zbroju količina gibanja njezinih dijelova nakon raspada rakete.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$



Budući da se vagoni gibaju u susret jedan drugome, njihove brzine imaju suprotne smjerove pa vrijedi:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v + m_2 \cdot v \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v &= m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1.5 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \left(-1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{1 \cdot 10^4 \text{ kg} + 1.5 \cdot 10^4 \text{ kg}} = 0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kinetička energija vagona prije sudara je

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2,$$

a poslije sudara, kada se gibaju jednakom brzinom  $v$ , iznosi:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2.$$

Razlika kinetičke energija prije i poslije sudara jednaka je mehaničkoj energiji koja se pretvorila u druge oblike energije.

$$\begin{aligned} \Delta E = E_{k1} - E_{k2} &\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 - (m_1 + m_2) \cdot v^2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( 1 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \left( 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + 1.5 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \left( -1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - (1 \cdot 10^4 \text{ kg} + 1.5 \cdot 10^4 \text{ kg}) \cdot \left( 0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = \\ &= 27000 \text{ J} = 27 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

### Vježba 340

Vagon mase 10 t giba se brzinom 7.2 km/h u odnosu na prugu. Vagon mase 15 t giba se prema vagonu mase 10 t brzinom 3.6 km/h u odnosu na prugu. Nakon sudara oba se vagona gibaju zajedničkom brzinom  $v$ . Koliko se mehaničke energije pri sudaru vagona pretvorilo u druge oblike energije?

**Rezultat:** 27 kJ.