

Zadatak 261 (Mia, strukovna škola)

Lopta mase 0.2 kg slobodno pada s visine 5 m. Odredite kinetičku energiju lopte pri udaru o tlo. Otpor zraka zanemarujemo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 261

$$m = 0.2 \text{ kg}, \quad h = 5 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad E_k = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i g jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje su v brzina pada, h visina pada, g ubrzanje sile teže.

1. inačica

Budući da je otpor zraka zanemaren, zbog zakona o očuvanju energije gravitacijska potencijalna energija E_{gp} koju tijelo ima na početnoj visini h jednaka je kinetičkoj energiji E_k koju tijelo ima pri udaru o tlo.

$$\left. \begin{array}{l} E_{gp} = m \cdot g \cdot h \\ E_k = E_{gp} \end{array} \right\} \Rightarrow E_k = m \cdot g \cdot h = 0.2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m} = 10 \text{ J}.$$

2. inačica

Kinetička energija lopte pri udaru o tlo iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v^2 = 2 \cdot g \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_k = m \cdot g \cdot h = 0.2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m} = 10 \text{ J}.$$

Vježba 261

Lopta mase 0.1 kg slobodno pada s visine 10 m. Odredite kinetičku energiju lopte pri udaru o tlo. Otpor zraka zanemarujemo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 10 J.

Zadatak 262 (TNT, medicinska škola)

Koja veličina ima jedinicu $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$?

- A. Sila B. Količina gibanja C. Impuls sile D. Rad

Rješenje 262

Jedinica za:

- duljinu je metar

$$[s] = m$$

- vrijeme je sekunda

$$[t] = s$$

- masu je kilogram

$$[m] = \text{kg}$$

- brzinu je metar u sekundi

$$[v] = \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$$

- akceleraciju je metar u sekundi na kvadrat

$$[a] = \frac{m}{s^2} = m \cdot s^{-2}$$

Sila je fizikalna veličina kojom se opisuje međudjelovanje tijela i njegove okoline koje može uzrokovati promjenu brzine ili oblika tijela.

Matematički se računa:

$$F = m \cdot a.$$

Jedinica za silu je:

$$[F] = [m] \cdot [a] \Rightarrow [F] = \text{kg} \cdot \frac{m}{s^2} \Rightarrow [F] = \text{kg} \cdot m \cdot s^{-2}.$$

Količina gibanja je vektorska fizikalna veličina koja određuje inerciju pri gibanju neke mase tvari.

Matematički se računa:

$$p = m \cdot v.$$

Jedinica za količinu gibanja je:

$$[p] = [m] \cdot [v] \Rightarrow [p] = \text{kg} \cdot \frac{m}{s} \Rightarrow [p] = \text{kg} \cdot m \cdot s^{-1}.$$

Impuls sile vektorska je fizikalna veličina koja opisuje djelovanje sile na tijelo.

Matematički se računa:

$$I = F \cdot t.$$

Jedinica za impuls sile je:

$$[I] = [F] \cdot [t] \Rightarrow [I] = \text{kg} \cdot m \cdot s^{-2} \cdot s \Rightarrow [I] = \text{kg} \cdot m \cdot s^{-1}.$$

Rad je skalarna fizikalna veličina kojom se iskazuje djelovanje sile na putu.

Matematički se računa:

$$W = F \cdot s.$$

Jedinica za rad je:

$$[W] = [F] \cdot [s] \Rightarrow [W] = \text{kg} \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m \Rightarrow [W] = \text{kg} \cdot m^2 \cdot s^{-2}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 262

Koja veličina ima jedinicu $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$?

- A. Sila B. Količina gibanja C. Impuls sile D. Rad

Rezultat: A.

Zadatak 263 (Rony, gimnazija)

Jabuka mase $m = 0.1$ kg padne s visine $h = 2$ m na oprugu. Ona se zbog toga stisne za $y = 10$ cm. Kolika je konstanta k opruge? Za akceleraciju sile teže uzmite 10 m/s^2 ?

A. $10 \frac{N}{m}$ B. $40 \frac{N}{m}$ C. $100 \frac{N}{m}$ D. $400 \frac{N}{m}$

Rješenje 263

$$m = 0.1 \text{ kg}, \quad h = 2 \text{ m}, \quad y = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad k = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Titranje je periodično gibanje oko ravnotežnog položaja. Periodično gibanje je gibanje koje se ponavlja nakon određenog vremenskog intervala (perioda). Najjednostavnije titranje je harmoničko titranje, tj. titranje koje uzrokuje harmonijska (elastična) sila. Ona je razmjerna pomaku iz ravnotežnog položaja:

$$F = -k \cdot x.$$

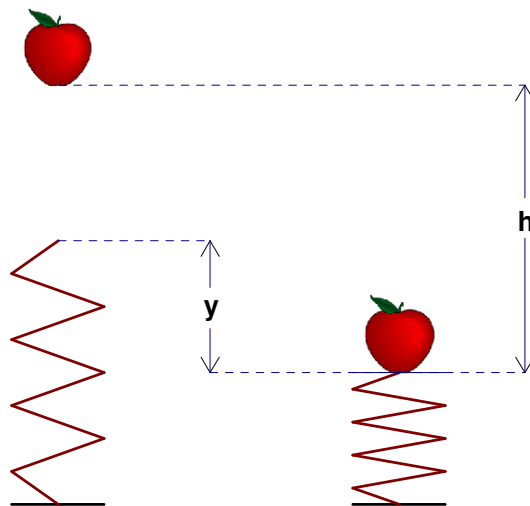
Pomaknemo li oprugu iz ravnotežnog položaja stiskanjem ili rastezanjem, ona titra oko tog položaja. Svaki pomak od ravnotežnog položaja nazivamo elongacijom, a najveći pomak od položaja ravnoteže nazivamo amplitudom. Elastična potencijalna energija opruge dana je formulom

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je x pomak od ravnotežnog položaja, k koeficijent elastičnosti opruge.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.



Kada jabuka padne s visine h na oprugu gravitacijska potencijalna energija jabuke E_{gp} , zbog zakona održanja energije, transformirat će se u elastičnu potencijalnu energiju E_{ep} opruge.

$$E_{gp} = E_{ep} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \cdot \frac{2}{y^2} \Rightarrow \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{y^2} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{y^2} = \frac{2 \cdot 0.1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m}}{(0.1 \text{ m})^2} = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 263

Jabuka mase $m = 0.2 \text{ kg}$ padne s visine $h = 1 \text{ m}$ na oprugu. Ona se zbog toga stisne za $y = 10 \text{ cm}$. Kolika je konstanta k opriranjia opruge? Za akceleraciju sile teže uzmite 10 m/s^2 ?

A. $10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ B. $40 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ C. $100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ D. $400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Rezultat: D.

Zadatak 264 (Helena, srednja škola)

Na tijelo djeluje sila od 10^3 N tako da se ono giba brzinom 10 m/s . Kolika je snaga kojom djeluje sila?

A. 1000 W B. 10 kW C. 10 kJ D. 10^3 kW

Rješenje 264

$$F = 10^3 \text{ N}, \quad v = 10 \text{ m/s}, \quad P = ?$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}$$

Za trenutnu snagu možemo pisati

$$P = F \cdot v$$

pri čemu je v trenutna brzina.

Snaga kojom djeluje sila iznosi:

$$P = F \cdot v = 10^3 \text{ N} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10 \cdot 10^3 \text{ W} = 10 \text{ kW}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 264

Na tijelo djeluje sila od 1 kN tako da se ono giba brzinom 36 km/h . Kolika je snaga kojom djeluje sila?

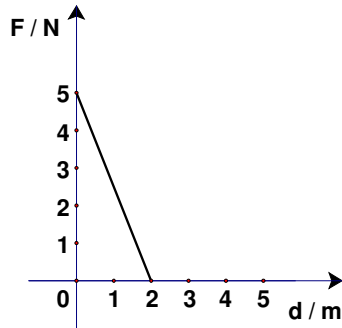
A. 1000 W B. 10 kW C. 10 kJ D. 10^3 kW

Rezultat: B.

Zadatak 265 (Helena, srednja škola)

Osoba vuče teret silom F . Graf prikazuje ovisnost sile F o pomaku tereta d . Sila i pomak su na istom pravcu. Koliki je rad obavljen pri pomaku od 2 m ?

A. 10 J B. 7 J C. 5 J D. 2.5 J



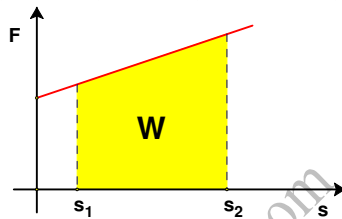
Rješenje 265

$a = 2, \quad b = 5, \quad W = P = ?$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$W = F \cdot s.$

Ploština ispod krivulje sile u F, s – grafu brojčano odgovara obavljenom radu.

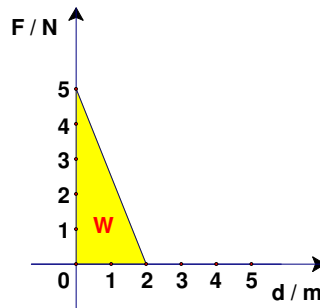
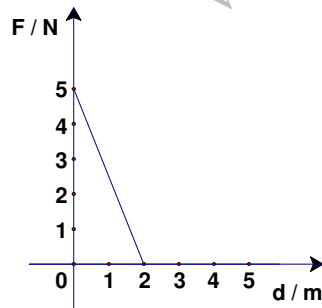


Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (90°).

Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$P = \frac{a \cdot b}{2}.$

Obavljeni rad po iznosu jednak je ploštini pravokutnog trokuta.



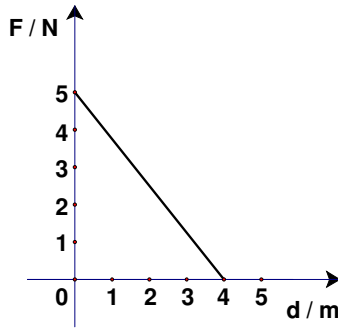
$$\left. \begin{array}{l} a = 2, \quad b = 5 \\ P = \frac{a \cdot b}{2} \\ W = P \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 2, \quad b = 5 \\ W = \frac{a \cdot b}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow W = \frac{2 \cdot 5}{2} \Rightarrow W = 5 \text{ J}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 265

Osoba vuče teret silom F . Graf prikazuje ovisnost sile F o pomaku tereta d . Sila i pomak su na istom pravcu. Koliki je rad obavljen pri pomaku od 4 m?

- A. 10 J B. 7 J C. 5 J D. 2.5 J



Rezultat: A.

Zadatak 266 (Marija ☺, srednja škola)

U opruzi je pohranjena energija 25 J, uz produljenje 125 cm. Kolikom je silom djelovano na oprugu?

Rješenje 266

$$E_{ep} = 25 \text{ J}, \quad s = 125 \text{ cm} = 1.25 \text{ m}, \quad F = ?$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak s i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravo proporcionalna pomaku s , smjera suprotnoga pomaku kažemo da harmonijski titra.

Elastična sila je sila kojom se tijelo opire deformaciji zbog djelovanja vanjske sile F i razmjerna je pomaku iz ravnotežnog položaja s :

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{s}$$

Iznos elastične sile je

$$F = k \cdot s,$$

gdje je k konstanta elastičnosti opruge.

Potencijalna energija elastične deformacije opruge konstante k kojoj se duljina djelovanjem sile F smanjila ili povećala za s :

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2.$$



Računamo silu kojom se djelovalo na oprugu.

$$\left. \begin{array}{l} E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \\ F = k \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \quad / \cdot \frac{2}{s^2} \\ F = k \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k = \frac{2 \cdot E_{ep}}{s^2} \\ F = k \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{2 \cdot E_{ep}}{s^2} \cdot s \Rightarrow F = \frac{2 \cdot E_{ep}}{s} = \frac{2 \cdot 25 \text{ J}}{1.25 \text{ m}} = 40 \text{ N}.$$

Vježba 266

U opruzi je pohranjena energija 50 J, uz produljenje 250 cm. Kolikom je silom djelovano na oprugu?

Rezultat: 40 N.

Zadatak 267 (Marija ☺, srednja škola)

Koliko iznosi konstanta opruge koja se produlji za 0.5 m pod djelovanjem sile 200 N?

Rješenje 267

$$s = 0.5 \text{ m}, \quad F = 200 \text{ N}, \quad k = ?$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak s i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku s , smjera suprotnoga pomaku kažemo da harmonijski titra.

Elastična sila je sila kojom se tijelo opire deformaciji zbog djelovanja vanjske sile F i razmjerna je pomaku iz ravnotežnog položaja s :

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{s}.$$

Iznos elastične sile je

$$F = -k \cdot s,$$

gdje je k konstanta elastičnosti opruge.

Konstanta opruge iznosi:

$$F = k \cdot s \Rightarrow F = k \cdot s \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow k = \frac{F}{s} = \frac{200 \text{ N}}{0.5 \text{ m}} = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Vježba 267

Koliko iznosi konstanta opruge koja se produlji za 1 m pod djelovanjem sile 400 N?

Rezultat: $400 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$

Zadatak 268 (Marija ☺, srednja škola)

Za sabijanje elastične opruge za 1 cm potrebno je djelovati silom od 30 N. Koliku energiju je potrebno uložiti za sabijanje iste opruge za 15 cm?

Rješenje 268

$$s_1 = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}, \quad F = 30 \text{ N}, \quad s_2 = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \quad E_{ep} = ?$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak s i pustimo ga, ono će harmonijski titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku s , smjera suprotnoga pomaku kažemo da harmonijski titra.

Elastična sila je sila kojom se tijelo opire deformaciji zbog djelovanja vanjske sile F i razmjerna je pomaku iz ravnotežnog položaja s :

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{s}.$$

Iznos elastične sile je

$$F = -k \cdot s,$$

gdje je k konstanta elastičnosti opruge.

Potencijalna energija elastične deformacije opruge konstante k kojoj se duljina djelovanjem sile F smanjila ili povećala za s :

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2.$$

Računamo energiju potrebnu za sabijanje opruge.

$$\left. \begin{array}{l} F = k \cdot s_1 \\ E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = k \cdot s_1 \cdot \frac{1}{s_1} \\ E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k = \frac{F}{s_1} \\ E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30 \text{ N}}{0.01 \text{ m}} \cdot (0.15 \text{ m})^2 = 33.75 \text{ J}.$$

Vježba 268

Za sabijanje elastične opruge za 2 cm potrebno je djelovati silom od 60 N. Koliku energiju je potrebno uložiti za sabijanje iste opruge za 15 cm?

Rezultat: 33.75 J.

Zadatak 269 (Barbara, gimnazija)

Automobil vozi po horizontalnom putu brzinom 60 km/h. Vozač stisne kočnicu i automobil se zaustavi na putu od 20 m. Koliki put bi prešao do zaustavljanja da mu je brzina bila 120 km/h? Sila koja zaustavlja automobil jednaka je u oba slučaja.

A. 20 m B. 40 m C. 60 m D. 80 m

Rješenje 269

$$v_1 = 60 \text{ km/h}, \quad s_1 = 20 \text{ m}, \quad v_2 = 120 \text{ km/h} = 2 \cdot v_1, \quad F = \text{konst.}, \quad s_2 = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Za jednoliko usporeno gibanje vrijedi isti izraz.

Budući da je sila koja zaustavlja automobil jednaka u oba slučaja i akceleracija je jednaka. Iz sustava jednačbi dobije se traženi put s_2 .

$$\left. \begin{array}{l} v_1^2 = 2 \cdot a \cdot s_1 \\ v_2^2 = 2 \cdot a \cdot s_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{2 \cdot a \cdot s_2}{2 \cdot a \cdot s_1} \Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{2 \cdot a \cdot s_2}{2 \cdot a \cdot s_1} \Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{s_2}{s_1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \cdot s_1 \Rightarrow s_2 = s_1 \cdot \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \Rightarrow s_2 = s_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot v_1}{v_1} \right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s_2 = s_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot v_1}{v_1} \right)^2 \Rightarrow s_2 = s_1 \cdot 2^2 = 20 \text{ m} \cdot 4 = 80 \text{ m}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 269

Automobil vozi po horizontalnom putu brzinom 50 km/h. Vozač stisne kočnicu i automobil se zaustavi na putu od 20 m. Koliki put bi prešao do zaustavljanja da mu je brzina bila 100 km/h? Sila koja zaustavlja automobil jednaka je u oba slučaja.

A. 20 m B. 40 m C. 60 m D. 80 m

Rezultat: D.

Zadatak 270 (Barbara, gimnazija)

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine 10 m/s, treba uložiti rad W_0 . Zanimarite li silu trenja i otpor zraka, koliko je rada potrebno uložiti da se automobil ubrza od brzine 10 m/s do brzine 30 m/s?

A. $8 \cdot W_0$ B. $4 \cdot W_0$ C. $3 \cdot W_0$ D. $2 \cdot W_0$

Rješenje 270

$$v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad v_1 = 10 \text{ m/s}, \quad W_0, \quad v_2 = 30 \text{ m/s}, \quad W = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Rad je jednak promjeni energije.

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine v_1 , treba uložiti rad W_0 .

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2.$$

Da se automobil ubrza od brzine v_1 do brzine v_2 , treba uložiti rad W .

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2).$$

Iz sustava jednačbi dobije se uloženi rad W .

$$\left. \begin{array}{l} W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \\ W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{W}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2} \Rightarrow \frac{W}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{W}{W_0} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^2} \Rightarrow \frac{W}{W_0} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^2} \cdot W_0 \Rightarrow W = W_0 \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W = W_0 \cdot \frac{\left(30 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(10 \frac{m}{s}\right)^2}{\left(10 \frac{m}{s}\right)^2} \Rightarrow W = 8 \cdot W_0.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 270

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine 10 m/s, treba uložiti rad W_0 . Zanimarite li silu trenja i otpor zraka, koliko je rada potrebno uložiti da se automobil ubrza od brzine 10 m/s do brzine 20 m/s?

- A. $8 \cdot W_0$ B. $4 \cdot W_0$ C. $3 \cdot W_0$ D. $2 \cdot W_0$

Rezultat: C.

Zadatak 271 (Barbara, gimnazija)

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine 10 m/s, treba uložiti rad W_0 . Zanimarite li silu trenja i otpor zraka, koliko je rada potrebno uložiti da se automobil zaustavi kada ima brzinu 30 m/s?

- A. $2 \cdot W_0$ B. $4 \cdot W_0$ C. $8 \cdot W_0$ D. $9 \cdot W_0$

Rješenje 271

$$v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad v_1 = 10 \text{ m/s}, \quad W_0, \quad v_2 = 30 \text{ m/s}, \quad W = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Rad je jednak promjeni energije.

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine v_1 , treba uložiti rad W_0 .

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2.$$

Da se automobil zaustavi kada ima brzinu v_2 , treba uložiti rad W .

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2.$$

(gledamo samo iznos rada pa je predznak pozitivan)

Iz sustava jednadžbi dobije se uloženi rad W .

$$\left. \begin{array}{l} W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \\ W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{W}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2} \Rightarrow \frac{W}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2} \Rightarrow \frac{W}{W_0} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{W}{W_0} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{W}{W_0} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \cdot W_0 \Rightarrow W = W_0 \cdot \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \Rightarrow W = W_0 \cdot \left(\frac{30 \frac{m}{s}}{10 \frac{m}{s}} \right)^2 \Rightarrow W = 9 \cdot W_0.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 271

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine 10 m/s, treba uložiti rad W_0 . Zanimarite li silu trenja i otpor zraka, koliko je rada potrebno uložiti da se automobil zaustavi kada ima brzinu 20 m/s?

$$A. 2 \cdot W_0 \quad B. 4 \cdot W_0 \quad C. 8 \cdot W_0 \quad D. 9 \cdot W_0$$

Rezultat: B.

Zadatak 272 (Ante, srednja škola)

Automobil mase 800 kg ubrza iz stanja mirovanja do brzine 108 km/h za 10 s. Kolika je srednja snaga motora potrebna za ubrzavanje?

Rješenje 272

$$m = 800 \text{ kg}, \quad v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad v_1 = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}, \quad t = 10 \text{ s}, \quad P = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Računamo srednju snagu motora. Rad je jednak promjeni energije pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} W = \Delta E_k \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{\Delta E_k}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_0^2)}{t} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 800 \text{ kg} \cdot \left(\left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{10 \text{ s}} = 36000 \text{ W} = 36 \text{ kW}.$$

Vježba 272

Automobil mase 1600 kg ubrza iz stanja mirovanja do brzine 108 km/h za 20 s. Kolika je srednja snaga motora potrebna za ubrzavanje?

Rezultat: 36 kW.

Zadatak 273 (Ante, srednja škola)

Dizalica snage 1800 W podiže tijelo mase 200 kg na visinu 20 m. Koliko dugo traje podizanje? (ubrzanje sile teže $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 273

$$P = 1800 \text{ W}, \quad m = 200 \text{ kg}, \quad h = 20 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Računamo vrijeme podizanja tijela. Rad je jednak promjeni energije pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} W = E_{gp} \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{E_{gp}}{t} \Rightarrow P = \frac{E_{gp}}{t} \cdot \frac{t}{P} \Rightarrow t = \frac{E_{gp}}{P} \Rightarrow t = \frac{m \cdot g \cdot h}{P} =$$

$$= \frac{200 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m}}{1800 \text{ W}} = 22.22 \text{ s}.$$

Vježba 273

Dizalica snage 3600 W podiže tijelo mase 200 kg na visinu 40 m. Koliko dugo traje podizanje? (ubrzanje sile teže $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 22.22 s.

Zadatak 274 (Ante, srednja škola)

Kolica mase 80 kg, brzine 4 m/s, zaustave se sabijajući dugu oprugu za 40 cm. Odredi konstantu opruge.

Rješenje 274

$$m = 80 \text{ kg}, \quad v = 4 \text{ m/s}, \quad x = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}, \quad k = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Titranje je periodično gibanje oko ravnotežnog položaja. Periodično gibanje je gibanje koje se ponavlja nakon određenog vremenskog intervala (perioda). Najjednostavnije titranje je harmoničko titranje, tj. titranje koje uzrokuje harmonijska (elastična) sila. Ona je razmjerna pomaku iz ravnotežnog položaja:

$$F = -k \cdot x.$$

Pomaknemo li oprugu iz ravnotežnog položaja stiskanjem ili rastezanjem, ona titra oko tog položaja. Svaki pomak od ravnotežnog položaja nazivamo elongacijom, a najveći pomak od položaja ravnoteže nazivamo amplitudom. Elastična potencijalna energija opruge dana je formulom

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2.$$

gdje je x pomak od ravnotežnog položaja, k koeficijent elastičnosti opruge.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona očuvanja energije kinetička energija kolica bit će jednaka elastičnoj potencijalnoj energiji sabijene opruge.

$$\begin{aligned} E_k = E_{ep} &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \quad / \cdot \frac{2}{x^2} \Rightarrow k = \frac{m \cdot v^2}{x^2} = \\ &= \frac{80 \text{ kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 8000 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

Vježba 274

Kolica mase 80 kg, brzine 2 m/s, zaustave se sabijajući dugu oprugu za 20 cm. Odredi konstantu opruge.

Rezultat: $8 \cdot 10^3 \text{ N/m}$.

Zadatak 275 (Ivan, srednja škola)

Kamen mase 40 grama bačen je vertikalno prema dolje s visine 60 m početnom brzinom 4 m/s i pao je brzinom 32 m/s. Koliki je obavljen rad? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 275

$$m = 40 \text{ g} = 0.04 \text{ kg}, \quad h = 60 \text{ m}, \quad v_1 = 4 \text{ m/s}, \quad v_2 = 32 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad W = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona očuvanja energije zbroj rada W koji obavi zaustavna sila (otpor zraka) i kinetičke energije E_{k2} koju kamen ima pri padu jednak je zbroju gravitacijske potencijalne E_{gp} i kinetičke energije E_{k1} kamena u trenutku izbacivanja s visine h .

$$\begin{aligned} W + E_{k2} &= E_{gp} + E_{k1} \Rightarrow W + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow W &= m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \Rightarrow W = m \cdot \left(g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot v_2^2 \right) = \\ &= 0.04 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 60 \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(32 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = 3.384 \text{ J}. \end{aligned}$$

Vježba 275

Kamen mase 80 grama bačen je vertikalno prema dolje s visine 60 m početnom brzinom 4 m/s i pao je brzinom 32 m/s. Koliki je obavljen rad? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 6.768 J.

Zadatak 276 (Any, gimnazija)

Na dva nepomična tijela masa m i $4 \cdot m$ počinje djelovati jednaka sila F na putu s . Koliki je omjer kinetičkih energija na kraju puta s ?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Rješenje 276

$$m_1 = m, \quad m_2 = 4 \cdot m, \quad F_1 = F_2 = F, \quad s, \quad \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Kinetička energija tijela jednaka je utrošenom radu sile F na putu s. Zato vrijedi:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} E_{k_1} &= W_1 \\ W_1 &= F_1 \cdot s \\ F_1 &= F \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_{k_1} &= W_1 \\ W_1 &= F \cdot s \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{k_1} = F \cdot s. \\ & \left. \begin{aligned} E_{k_2} &= W_2 \\ W_2 &= F_2 \cdot s \\ F_2 &= F \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_{k_2} &= W_2 \\ W_2 &= F \cdot s \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{k_2} = F \cdot s. \end{aligned}$$

Omjer kinetičkih energija na kraju puta s iznosi:

$$\frac{E_{k_1}}{E_{k_2}} = \frac{F \cdot s}{F \cdot s} \Rightarrow \frac{E_{k_1}}{E_{k_2}} = \frac{F \cdot s}{F \cdot s} \Rightarrow \frac{E_{k_1}}{E_{k_2}} = 1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 276

Na dva nepomična tijela masa m i $3 \cdot m$ počinje djelovati jednaka sila F na putu s. Koliki je omjer kinetičkih energija na kraju puta s?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Rezultat: A.

Zadatak 277 (Any, gimnazija)

Na dva nepomična tijela masa m i $4 \cdot m$ počinje djelovati jednaka sila F na putu s. Koliki je omjer brzina tijela na kraju puta s?

- A. $\frac{v_1}{v_2} = 1$ B. $\frac{v_1}{v_2} = 2$ C. $\frac{v_1}{v_2} = 4$ D. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$

Rješenje 277

$$m_1 = m, \quad m_2 = 4 \cdot m, \quad F_1 = F_2 = F, \quad s, \quad \frac{v_1}{v_2} = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje

kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

1. inačica

Budući da na dva nepomična tijela masa m_1 i m_2 počinje djelovati jednaka sila F na putu s , vrijedi:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} F_1 &= m_1 \cdot a \\ v_1^2 &= 2 \cdot a \cdot s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F &= m \cdot a \\ v_1^2 &= 2 \cdot a \cdot s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_1^2}{F} = \frac{2 \cdot a \cdot s}{m \cdot a} \Rightarrow \frac{v_1^2}{F} = \frac{2 \cdot a \cdot s}{m \cdot a} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{v_1^2}{F} = \frac{2 \cdot s}{m} \Rightarrow \frac{v_1^2}{F} = \frac{2 \cdot s}{m} \quad / \cdot F \Rightarrow v_1^2 = \frac{2 \cdot F \cdot s}{m} \Rightarrow v_1^2 = \frac{2 \cdot F \cdot s}{m} \quad / \sqrt{} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m}}. \\ & \left. \begin{aligned} F_2 &= m_2 \cdot a \\ v_2^2 &= 2 \cdot a \cdot s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F &= 4 \cdot m \cdot a \\ v_2^2 &= 2 \cdot a \cdot s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_2^2}{F} = \frac{2 \cdot a \cdot s}{4 \cdot m \cdot a} \Rightarrow \frac{v_2^2}{F} = \frac{2 \cdot a \cdot s}{4 \cdot m \cdot a} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{v_2^2}{F} = \frac{s}{2 \cdot m} \Rightarrow \frac{v_2^2}{F} = \frac{s}{2 \cdot m} \quad / \cdot F \Rightarrow v_2^2 = \frac{F \cdot s}{2 \cdot m} \Rightarrow v_2^2 = \frac{F \cdot s}{2 \cdot m} \quad / \sqrt{} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{F \cdot s}{2 \cdot m}}. \end{aligned}$$

Omjer brzina tijela na kraju puta s je:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m}}}{\sqrt{\frac{F \cdot s}{2 \cdot m}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m} \cdot \frac{2 \cdot m}{F \cdot s}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m} \cdot \frac{2 \cdot m}{F \cdot s}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{2}{1}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{4} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 2.$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

Kinetička energija tijela jednaka je utrošenom radu sile F na putu s . Zato vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} E_{k_1} &= W_1 \\ E_{k_2} &= W_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 &= F_1 \cdot s \\ \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 &= F_2 \cdot s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 &= F \cdot s \\ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m \cdot v_2^2 &= F \cdot s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m \cdot v_2^2} = \frac{F \cdot s}{F \cdot s} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m \cdot v_2^2} = \frac{F \cdot s}{F \cdot s} \Rightarrow \frac{v_1^2}{4 \cdot v_2^2} = 1 \Rightarrow \frac{v_1^2}{4 \cdot v_2^2} = 1 / \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = 4 \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right) = 4 / \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{4} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 277

Na dva nepomična tijela masa m i $9 \cdot m$ počinje djelovati jednaka sila F na putu s . Koliki je omjer kinetičkih energija na kraju puta s ?

A. $\frac{v_1}{v_2} = 6$ B. $\frac{v_1}{v_2} = 3$ C. $\frac{v_1}{v_2} = 9$ D. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3}$

Rezultat: B.

Zadatak 278 (Marija, gimnazija)

Tijelo mase 3 kg guramo jednoliko duž kosine koja je dugačka 4 m, a visoka 2 m. Trenje zanemarujemo. Koliki se rad obavi nad tijelom ako ga guramo od dna do vrha kosine? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 278

$$m = 3 \text{ kg}, \quad v = \text{konst.}, \quad s = 4 \text{ m}, \quad h = 2 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad W = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

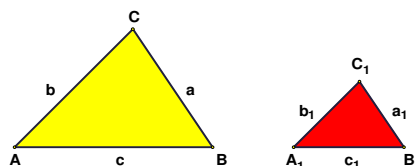
gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.

Sličnost trokuta



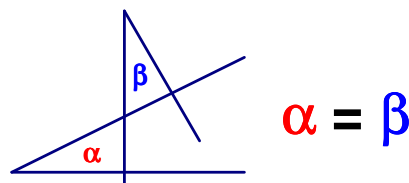
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1, \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:

Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).

Kutovi s okomitim kracima



1. inačica

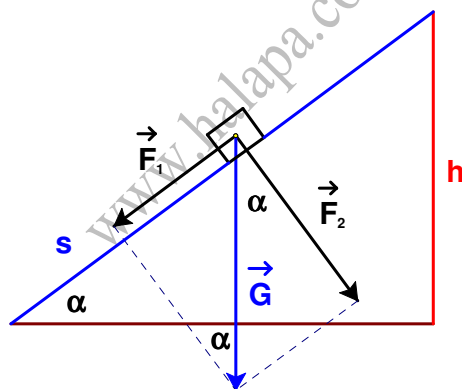
Kada tijelo mase m guramo jednoliko duž kosine čija je visina h , njegova gravitacijska potencijalna energija poraste za

$$\Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot h.$$

Promjena energije jednaka je obavljenom radu nad tijelom.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot h \\ W = \Delta E_{gp} \end{array} \right\} \Rightarrow W = m \cdot g \cdot h = 3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m} = 60 \text{ J}.$$

2. inačica

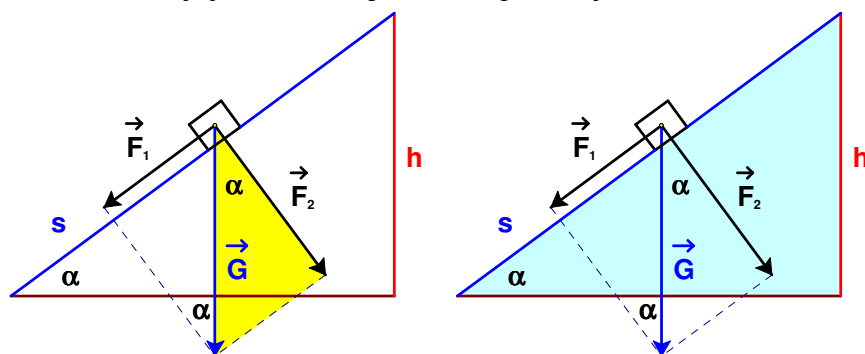


Silu težu (težinu tijela) G rastavimo na dvije komponente:

- komponentu F_1 u smjeru kosine koja tijelo ubrzava niz kosinu
- komponentu F_2 okomitu na kosinu koja pritišće kosinu.

Uočimo pravokutne trokute:

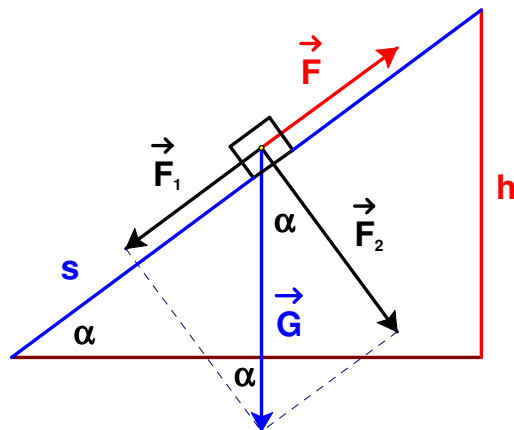
- pravokutan trokut čija je kateta F_2 i hipotenuza G (žuta boja)
- pravokutan trokut čija je kateta h i hipotenuza s (plava boja)



Trokuti su slični jer imaju jednake kutove. Zato vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{F_1}{G} \\ \sin \alpha = \frac{h}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{F_1}{G} = \frac{h}{s} \Rightarrow \frac{F_1}{G} = \frac{h}{s} \cdot G \Rightarrow F_1 = G \cdot \frac{h}{s} \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \frac{h}{s}$$

Tijelo se giba jednoliko duž kosine pa sila F kojom guramo tijelo mora biti po iznosu jednaka sili F_1 , ali suprotnog smjera.



$$\left. \begin{array}{l} F = F_1 \\ F_1 = m \cdot g \cdot \frac{h}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot g \cdot \frac{h}{s}$$

Obavljeni rad W nad tijelom koje prevali put s , ako se gura od dna do vrha kosine, iznosi:

$$W = F \cdot s \Rightarrow W = m \cdot g \cdot \frac{h}{s} \cdot s = W = 3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{2 \text{ m}}{4 \text{ m}} \cdot 4 \text{ m} = 60 \text{ J}$$

Vježba 278

Tijelo mase 4 kg guramo jednoliko duž kosine koja je dugačka 4 m, a visoka 2 m. Trenje zanemarujemo. Koliki se rad obavi nad tijelom ako ga se gura od dna do vrha kosine? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 80 J.

Zadatak 279 (Matea, srednja škola)

Vagon mase 20 t giba se jednoliko po vodoravnoj pruzi brzinom 1 m/s te nalijeće na mirni vagon mase 30 t. Koliko se kinetičke energije pretvori u druge oblike energije ako se vagoni nakon sudara gibaju zajedno?

Rješenje 279

$$m_1 = 20 \text{ t} = 2 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad v_1 = 1 \text{ m/s}, \quad m_2 = 30 \text{ t} = 3 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad v_2 = 0 \text{ m/s}, \\ v_1' = v_2' = v = ?, \quad \Delta E_k = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.

Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad , \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Uporabom zakona o očuvanju količine gibanja odredimo brzinu v u kojoj se vagoni zajedno gibaju nakon sudara.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot 0 = m_1 \cdot v + m_2 \cdot v \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 \cdot v_1 &= (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 10^4 \text{ kg} + 3 \cdot 10^4 \text{ kg}} = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Računamo kinetičke energije:

- prije sudara prvog vagona mase m_1 i brzine v_1

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2$$

- prije sudara drugog vagona mase m_2 koji miruje

$$E_{k2} = 0$$

- nakon sudara vagona koji se zajedno gibaju brzinom v

$$E_{kz} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2.$$

Razlika kinetičke energije prije i poslije sudara pretvori se u druge oblike energije.

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_{k1} - E_{kz} \Rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 10^4 \text{ kg} + 3 \cdot 10^4 \text{ kg}) \cdot \left(0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 6000 \text{ J} = 6 \cdot 10^3 \text{ J} = 6 \text{ kJ}. \end{aligned}$$



Vježba 279

Vagon mase 20 t giba se jednoliko po vodoravnoj pruzi brzinom 3.6 km/h te nalijeće na mirni vagon mase 30 t. Koliko se kinetičke energije pretvori u druge oblike energije ako se vagoni nakon sudara gibaju zajedno?

Rezultat: 6 kJ.

Zadatak 280 (Saša, tehnička škola)

Tane mase m doleti horizontalno do drvene kugle koja je na podu. Tane proleti središtem kugle. Treba odrediti kolika je energija prešla u toplinu ako je v_1 brzina taneta prije nego što je pogodilo kuglu, v_2 brzina taneta nakon prolaza kroz kuglu, a m_k masa kugle. Trenje između poda i kugle zanemarimo.

Rješenje 280

$$m_1 = m, \quad v_2 = 0 \text{ m/s kugla miruje}, \quad v_1 = v_1, \quad v_1' = v_2, \quad m_2 = m_k, \quad v_2' = ?,$$
$$Q = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.

Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'.$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Uporabom zakona o očuvanju količine gibanja odredimo brzinu v_2' kugle nakon što kroz nju proleti tane.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m \cdot v_1 + m_k \cdot 0 = m \cdot v_2 + m_k \cdot v_2' \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot v_1 + 0 &= m \cdot v_2 + m_k \cdot v_2' \Rightarrow m \cdot v_1 = m \cdot v_2 + m_k \cdot v_2' \Rightarrow m \cdot v_2 + m_k \cdot v_2' = m \cdot v_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_k \cdot v_2' &= m \cdot v_1 - m \cdot v_2 \Rightarrow m_k \cdot v_2' = m \cdot (v_1 - v_2) \Rightarrow m_k \cdot v_2' = m \cdot (v_1 - v_2) \cdot \frac{1}{m_k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_2' = \frac{m}{m_k} \cdot (v_1 - v_2). \end{aligned}$$

Računamo kinetičku energiju:

- taneta mase m koje se giba brzinom v_1 prije nego što prođe kroz kuglu

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

- kugle mase m_k koja miruje

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot 0 \Rightarrow E_{k2} = 0$$

- taneta mase m koje se giba brzinom v_2 nakon što je prošlo središtem kugle

$$E_{k3} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$$

- kugle mase m_k koja se giba brzinom v_2' nakon što je kroz nju prošlo tane

$$E_{k4} = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot (v_2')^2 \Rightarrow E_{k4} = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot \left(\frac{m}{m_k} \cdot (v_1 - v_2) \right)^2 \Rightarrow E_{k4} = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot \frac{m^2}{m_k} \cdot (v_1 - v_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{k4} = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot \frac{m^2}{m_k} \cdot (v_1 - v_2)^2 \Rightarrow E_{k4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{m_k} \cdot (v_1 - v_2)^2.$$

Zbroj kinetičkih energija prije prolaza taneta kroz drvenu kuglu iznosi:

$$E_1 = E_{k1} + E_{k2} \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + 0 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2.$$

Zbroj kinetičkih energija nakon prolaza taneta kroz drvenu kuglu je:

$$E_2 = E_{k3} + E_{k4} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{m_k} \cdot (v_1 - v_2)^2.$$

Energija koja je prešla u toplinsku jednaka je razlici kinetičke energije prije i poslije prolaza taneta kroz kuglu.

$$Q = \Delta E_k \Rightarrow Q = E_1 - E_2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{m_k} \cdot (v_1 - v_2)^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{m_k} \cdot (v_1 - v_2)^2 \Rightarrow Q = \frac{m}{2} \cdot \left[v_1^2 - v_2^2 - \frac{m}{m_k} \cdot (v_1 - v_2)^2 \right].$$



Vježba 280

Tane mase m doleti horizontalno do drvene kugle koja je na podu. Tane proleti središtem kugle. Treba odrediti kolika je energija prešla u toplinu ako je v_1 brzina taneta prije nego što je pogodilo kuglu, v_2 brzina taneta nakon prolaza kroz kuglu, a $123 \cdot m$ masa kugle. Trenje između poda i kugle zanemarimo.

Rezultat:
$$Q = \frac{m}{2} \cdot \left[v_1^2 - v_2^2 - \frac{1}{123} \cdot (v_1 - v_2)^2 \right].$$