

### Zadatak 241 (Darko, srednja škola)

Na glatkoj horizontalnoj podlozi uz sabijenu oprugu konstante 500 N/m leži kugla mase 4.5 kg. Kolikom će brzinom kugla odletjeti ako je isпустimo? Opruga je prije ispuštanja kugle sabijena za 12.6 cm od ravnotežnog položaja.

### Rješenje 241

$$k = 500 \text{ N/m}, \quad m = 4.5 \text{ kg}, \quad x = 12.6 \text{ cm} = 0.126 \text{ m}, \quad v = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Titranje je periodično gibanje oko ravnotežnog položaja. Periodično gibanje je gibanje koje se ponavlja nakon određenog vremenskog intervala (perioda). Najjednostavnije titranje je harmoničko titranje, tj. titranje koje uzrokuje harmonijska (elastična) sila. Ona je razmjerna pomaku iz ravnotežnog položaja:

$$F = -k \cdot x.$$

Pomaknemo li oprugu iz ravnotežnog položaja stiskanjem ili rastezanjem, ona titra oko tog položaja. Svaki pomak od ravnotežnog položaja nazivamo elongacijom, a najveći pomak od položaja ravnoteže nazivamo amplitudom. Elastična potencijalna energija opruge dana je formulom

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je  $x$  pomak od ravnotežnog položaja,  $k$  koeficijent elastičnosti opruge.

Kada kuglu isпустimo elastična potencijalna energija opruge, zbog zakona održanja energije, pretvorit će se u kinetičku energiju kugle.

$$E_{ep} = E_k \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot x^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot x^2}{m} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot x^2}{m}} \Rightarrow v = x \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.126 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{500 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{4.5 \text{ kg}}} = 1.33 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



### Vježba 241

Na glatkoj horizontalnoj podlozi uz sabijenu oprugu konstante 500 N/m leži kugla mase 450 dag. Kolikom će brzinom kugla odletjeti ako je isпустimo? Opruga je prije ispuštanja kugle sabijena za 1.26 dm od ravnotežnog položaja.

**Rezultat:** 1.33 m/s.

### Zadatak 242 (Anto, srednja škola)

Projektil mase 20 kg ispaljen je uvis brzinom 400 m/s i postigne visinu 4 km. Kolika je energija pritom utrošena na otpor zraka? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A. 0.75 MJ      B. 0.82 MJ      C. 0.55 MJ      D. 0.89 MJ

### Rješenje 242

$m = 20 \text{ kg}$ ,     $v = 400 \text{ m/s}$ ,     $h = 4 \text{ km} = 4000 \text{ m}$ ,     $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,     $\Delta E = ?$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Vertikalni hitac uvis je gibanje složeno od jednolikoga pravocrtnog gibanja prema gore i slobodnog pada prema dolje. Put  $s$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan je izrazom

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $v_0$  početna brzina,  $g$  ubrzanje sile teže.

Najviši domet  $H$  što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je  $v = 0$ . Onda je

$$H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

### 1. inačica

Energija  $\Delta E$  utrošena na otpor zraka jednaka je razlici početne kinetičke energije i konačne gravitacijske potencijalne energije na visini  $h$ .

$$\begin{aligned} \Delta E = E_k - E_{gp} &\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot h \Rightarrow \Delta E = m \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot v^2 - g \cdot h \right) = \\ &= 20 \text{ kg} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \left( 400 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4000 \text{ m} \right) = 815\,200 \text{ J} \approx 0.82 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

### 2. inačica

Da nema otpora zraka projektil bi se popeo na maksimalnu visinu

$$H = \frac{v^2}{2 \cdot g}.$$

Energija  $\Delta E$  utrošena na otpor zraka jednaka je razlici gravitacijskih potencijalnih energija na visinama  $H$  i  $h$ .

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{gp(H)} - E_{gp(h)} \Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot H - m \cdot g \cdot h \Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot (H - h) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ H = \frac{v^2}{2 \cdot g} \right] \Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot \left( \frac{v^2}{2 \cdot g} - h \right) = \\ &= 20 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left( \frac{\left( 400 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} - 4000 \text{ m} \right) = 815\,200 \text{ J} \approx 0.82 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 242

Projektil mase 2000 dag ispaljen je uvis brzinom 1440 km/h i postigne visinu 4 km. Kolika je energija pritom utrošena na otpor zraka? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

- A. 0.75 MJ      B. 0.82 MJ      C. 0.55 MJ      D. 0.89 MJ

**Rezultat:** B.

### Zadatak 243 (Saša, gimnazija)

Saonice mase 100 kg spuštaju se iz mirovanja niz brijeg duljine 100 m i visine 8 m. Ako je brzina saonica pri dnu brijega 10 m/s, onda su na putu niz brijeg saonice svladale trenje ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

- A. 14.72 N      B. 28.48 N      C. 10.55 N      D. 20.50 N

### Rješenje 243

$$m = 100 \text{ kg}, \quad s = 100 \text{ m}, \quad h = 8 \text{ m}, \quad v = 10 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_{tr} = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja.

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Budući da je rad sile trenja jednak razlici gravitacijske potencijalne energije saonica na vrhu brijega i kinetičke energije na podnožju brijega, slijedi:

$$\left. \begin{aligned} W_{tr} &= E_{gp} - E_k \\ W_{tr} &= F_{tr} \cdot s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow F_{tr} \cdot s = E_{gp} - E_k \Rightarrow F_{tr} \cdot s = E_{gp} - E_k \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{tr} = \frac{E_{gp} - E_k}{s} \Rightarrow F_{tr} = \frac{m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{s} \Rightarrow F_{tr} = \frac{m \cdot \left( g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right)}{s} =$$

$$= \frac{100 \text{ kg} \cdot \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{100 \text{ m}} = 28.48 \text{ N}.$$



Odgovor je pod B.

### Vježba 243

Saonice mase 200 kg spuštaju se iz mirovanja niz brijeg duljine 200 m i visine 8 m. Ako je brzina saonice pri dnu brijega 10 m/s, onda su na putu niz brijeg saonice svladale trenje ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

- A. 14.72 N      B. 28.48 N      C. 10.55 N      D. 20.50 N

**Rezultat:** B.

### Zadatak 244 (Ana, gimnazija)

Tijelo mase 10 kg pada s neke visine i pri udarcu o površinu Zemlje ima kinetičku energiju 4500 J. S koje je visine tijelo počelo padati ako je na svladavanje sile otpora zraka utrošilo 3500 J svoje energije? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 244

$$m = 10 \text{ kg}, \quad E_k = 4500 \text{ J}, \quad \Delta E = 3500 \text{ J}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja.

Tijelo mase  $m$  je na visini  $h$  imalo gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h.$$

Na površini Zemlje tijelo ima energiju u obliku kinetičke energije  $E_k$ . Pri padanju tijela u zraku jedan dio energije  $\Delta E$  troši se na svladavanje otpora zraka pa slijedi:

$$E_{gp} - E_k = \Delta E \Rightarrow E_{gp} = E_k + \Delta E \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k + \Delta E \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k + \Delta E \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{E_k + \Delta E}{m \cdot g} = \frac{4500 \text{ J} + 3500 \text{ J}}{10 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 81.55 \text{ m}.$$

#### Vježba 244

Tijelo mase 10 kg pada s neke visine i pri udarcu o površinu Zemlje ima kinetičku energiju 5500 J. S koje je visine tijelo počelo padati ako je na svladavanje sile otpora zraka utrošilo 2500 J svoje energije? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 80 m.

#### Zadatak 245 (Jelena, srednja škola)

Tijelo mase 1 kg leži na površini stola visokog 1 m. Zbog kratkotrajnog djelovanja sile tijelo je dobilo početnu brzinu 2 m/s. Kad je tijelo došlo do ruba stola, palo je na pod. Kolika se toplina razvila od trenutka kad se tijelo počelo gibati do trenutka udara o pod? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 245

$$m = 1 \text{ kg}, \quad h = 1 \text{ m}, \quad v = 2 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad Q = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Toplina  $Q$  koja se razvije od trenutka kad se tijelo počelo gibati do trenutka udara o pod jednaka je zbroju kinetičke i gravitacijske potencijalne energije (zakon očuvanja energije).

$$Q = E_k + E_{gp} \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h \Rightarrow Q = m \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot h \right) =$$

$$= 1 \text{ kg} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \left( 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} \right) = 11.81 \text{ J}.$$

#### Vježba 245

Tijelo mase 2 kg leži na površini stola visokog 1 m. Zbog kratkotrajnog djelovanja sile tijelo je dobilo početnu brzinu 2 m/s. Kad je tijelo došlo do ruba stola, palo je na pod. Kolika se toplina razvila od trenutka kad se tijelo počelo gibati do trenutka udara o pod? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 23.52 J.

**Zadatak 246 (Ivana, medicinska škola)**

Tijelo mase  $m$  giba se konstantnom brzinom  $v$  i ima kinetičku energiju 90 J. Kolikom bi se brzinom  $v_1$  trebalo gibati tijelo da mu kinetička energija bude 810 J?

$$A. v_1 = 9 \cdot v \quad B. v_1 = 3 \cdot v \quad C. v_1 = \frac{v}{3} \quad D. v_1 = 90 \cdot v$$

**Rješenje 246**

$$m, \quad v, \quad E_{k(1)} = 90 \text{ J}, \quad E_{k(2)} = 810 \text{ J}, \quad v_1 = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}}$$

1. inačica

$$\left. \begin{aligned} E_{k(1)} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ E_{k(2)} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= E_{k(1)} \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 &= E_{k(2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= 90 \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 &= 810 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2} = \frac{810}{90} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2} = 9 \Rightarrow \frac{v_1^2}{v^2} = 9 \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 = 9 / \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{9} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = 3 \Rightarrow \frac{v_1}{v} = 3 / \cdot v \Rightarrow v_1 = 3 \cdot v.$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2 \cdot E_{k(1)}}{m}} \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2 \cdot E_{k(2)}}{m}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot E_{k(2)}}{m}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot E_{k(1)}}{m}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{k(2)}}{2 \cdot E_{k(1)}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{k(2)}}{2 \cdot E_{k(1)}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{E_{k(2)}}{E_{k(1)}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{810 \text{ J}}{90 \text{ J}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \sqrt{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v} = 3 \Rightarrow \frac{v_1}{v} = 3 / \cdot v \Rightarrow v_1 = 3 \cdot v.$$

Odgovor je pod B.

3. inačica

Iz formule za kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}}$$

vidi se da je brzina proporcionalna kvadratnom korijenu kinetičke energije.

$$v \propto \sqrt{E_k}$$

Budući da se kinetička energija povećala devet puta ( $810 : 90 = 9$ ), brzina će se povećati tri puta ( $\sqrt{9} = 3$ ). Odgovor je pod B.

### Vježba 246

Tijelo mase  $m$  giba se konstantnom brzinom  $v$  i ima kinetičku energiju 60 J. Kolikom bi se brzinom  $v_1$  trebalo gibati tijelo da mu kinetička energija bude 540 J?

A.  $v_1 = 9 \cdot v$       B.  $v_1 = 3 \cdot v$       C.  $v_1 = \frac{v}{3}$       D.  $v_1 = 90 \cdot v$

**Rezultat:** B.

### Zadatak 247 (Željko, srednja škola)

Tijelo mase 5 kg je iz stanja mirovanja slobodno padalo 4 sekunde. Za koliko se promijenila njegova potencijalna energija? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A. 384.9 J      B. 392.4 J      C. 3849.4 J      D. 1924.7 J

### Rješenje 247

$$m = 5 \text{ kg}, \quad t = 4 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E_{gp} = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = a \cdot t, \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje su  $v$  i  $s$  brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v = g \cdot t, \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje su  $v$  brzina pada,  $h$  visina pada,  $g$  ubrzanje sile teže.

1. inačica

Za vrijeme  $t$  tijelo je, slobodno padajući, postiglo brzinu

$$v = g \cdot t$$

pa kinetička energija iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v = g \cdot t \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (g \cdot t)^2.$$

Zbog zakona održanja energije gravitacijska potencijalna energija promijenila se za iznos kinetičke energije jer zbroj gravitacijske potencijalne i kinetičke energije mora biti stalan.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta E_{gp} = E_k \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (g \cdot t)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (g \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ kg} \cdot \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ s} \right)^2 = 3849.4 \text{ J}.$$

Odgovor je pod C.

2. inačica

Za vrijeme  $t$  tijelo je, slobodno padajući, prešlo put (visinu)

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Zato promjena gravitacijske potencijalne energije iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ \Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g^2 \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (g \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ kg} \cdot \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ s} \right)^2 = 3849.4 \text{ J}.$$

Odgovor je pod C

### Vježba 247

Tijelo mase 500 dag je iz stanja mirovanja slobodno padalo 4 sekunde. Za koliko se promijenila njegova potencijalna energija? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

- A. 384.9 J      B. 392.4 J      C. 3849.4 J      D. 1924.7 J

**Rezultat:** C.

### Zadatak 248 (Ana, gimnazija)

Kamion i automobil počinju kliziti iz stanja mirovanja (bez uključenih motora) niz zaleđenu padinu visine  $h$ . Masa kamiona je veća od mase automobila. Trenje se zanemaruje. Što možete zaključiti o njihovim brzinama na dnu padine?

- A. Brzina kamiona je veća od brzine automobila.  
 B. Brzina kamiona je manja od brzine automobila.  
 C. Brzine kamiona i automobila su jednake.  
 D. Ne može se zaključiti ništa od navedenog jer ima premalo podataka.

### Rješenje 248

$$h, \quad m_1 - \text{masa kamiona}, \quad m_2 - \text{masa automobila}, \quad m_1 > m_2, \quad v_1 : v_2 = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju



$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Budući da se trenje zanemaruje, gravitacijska potencijalna energija kamiona i automobila na visini h padine jednaka je njihovoj kinetičkoj energiji na dnu padine. (zakon očuvanja energije)

- kamion

$$E_{gp(1)} = E_{k(1)} \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 \quad / \cdot \frac{2}{m_1} \Rightarrow v_1^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 2 \cdot g \cdot h \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

- automobil

$$E_{gp(2)} = E_{k(2)} \Rightarrow m_2 \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \Rightarrow m_2 \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \quad / \cdot \frac{2}{m_2} \Rightarrow v_2^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 2 \cdot g \cdot h \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Vidi se da rezultat ne ovisi o masi. Brzine su jednake. Odgovor je pod C.

Ili ovako:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 248**

Kamion i automobil počinju kliziti iz stanja mirovanja (bez uključenih motora) niz zaleđenu padinu visine h. Masa kamiona je manja od mase automobila. Trenje se zanemaruje. Što možete zaključiti o njihovim brzinama na dnu padine?

- A. Brzina kamiona je veća od brzine automobila.
- B. Brzina kamiona je manja od brzine automobila.
- C. Brzine kamiona i automobila su jednake.
- D. Ne može se zaključiti ništa od navedenog jer ima premalo podataka.

**Rezultat:** C.

**Zadatak 249 (Ana, gimnazija)**

Kolica se spuste niz brijeg bez početne brzine i na dnu brijega imaju brzinu 4 m/s. Kada kolica na vrhu brijega imaju brzinu 3 m/s, kolika će biti njihova brzina na dnu brijega?

- A.  $4 \frac{m}{s}$       B.  $5 \frac{m}{s}$       C.  $6 \frac{m}{s}$       D.  $7 \frac{m}{s}$

**Rješenje 249**

$$v = 4 \text{ m/s}, \quad v_0 = 3 \text{ m/s}, \quad v_1 = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kada se kolica spuste niz brijeg bez početne brzine na dnu brijega imaju brzinu v pa je njihova kinetička energija

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kada kolica na vrhu brijega imaju brzinu  $v_0$ , njihova kinetička energija je

$$E_{k(0)} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

pa će ukupna kinetička energija kolica  $E_{k(1)}$  biti jednaka zbroju navedenih energija.

$$E_{k(1)} = E_k + E_{k(0)} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \quad / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v^2 + v_0^2 \Rightarrow v_1^2 = v^2 + v_0^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v^2 + v_0^2} = \sqrt{\left(4 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(3 \frac{m}{s}\right)^2} = 5 \frac{m}{s}.$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 249

Kolica se spuste niz brijeg bez početne brzine i na dnu brijega imaju brzinu 8 m/s. Kada kolica na vrhu brijega imaju brzinu 6 m/s, kolika će biti njihova brzina na dnu brijega?

A.  $6 \frac{m}{s}$       B.  $8 \frac{m}{s}$       C.  $9 \frac{m}{s}$       D.  $10 \frac{m}{s}$

**Rezultat:** D.

### Zadatak 250 (Josip, srednja škola)

Automobil mase 1000 kg ubrza se iz stanja mirovanja do brzine 30 m/s za 10 s. Kolika je srednja snaga motora potrebna za ubrzavanje?

### Rješenje 250

$$m = 1000 \text{ kg}, \quad v_1 = 0 \text{ m/s}, \quad v_2 = 30 \text{ m/s}, \quad t = 10 \text{ s}, \quad P = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Povećanje kinetičke energije automobila jednako je utrošenom radu motora.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta E_k = E_{k(2)} - E_{k(1)} \\ W = \Delta E_k \end{array} \right\} \Rightarrow W = E_{k(2)} - E_{k(1)} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2).$$

Srednja snaga motora iznosi:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{W}{t} \\ W &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{2 \cdot t} = \\
 &= \frac{1000 \text{ kg} \cdot \left( \left( 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left( 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{2 \cdot 10 \text{ s}} = 45000 \text{ W} = 45 \text{ kW}.$$

### Vježba 250

Automobil mase 2000 kg ubrza se iz stanja mirovanja do brzine 30 m/s za 20 s. Kolika je srednja snaga motora potrebna za ubrzavanje?

**Rezultat:** 45 kW.

### Zadatak 251 (Josip, srednja škola)

Na vodopadu visine 25 m izgrađena je hidroelektrana snage 750 kW. Odredite korisnost ako znate da je maseni protok vode  $5 \cdot 10^3 \text{ kg/s}$ . ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 251

$$h = 25 \text{ m}, \quad P_i = 750 \text{ kW} = 7.5 \cdot 10^5 \text{ W}, \quad q = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad \eta = ?$$

Maseni protok (tj. masa fluida koji protječe kroz određeni presjek u jedinici vremena) je

$$q = \frac{m}{t} \Rightarrow m = q \cdot t$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Omjer između energije koju iskorišćujemo od nekog stroja i ukupne energije koju ulažemo u stroj zovemo korisnost stroja  $\eta$ .

$$\eta = \frac{W_k}{W_u}, \quad \eta = \frac{P_k}{P_u}.$$

Budući da je promjena gravitacijske potencijalne energije vode jednaka utrošenom radu turbine, vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} m = q \cdot t \\ E_{gp} = m \cdot g \cdot h \\ W = E_{gp} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_{gp} = q \cdot t \cdot g \cdot h \\ W = E_{gp} \end{array} \right\} \Rightarrow W = q \cdot t \cdot g \cdot h.$$

Snaga vode (uložena snaga) je

$$\left. \begin{array}{l} P_u = \frac{W}{t} \\ W = q \cdot t \cdot g \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow P_u = \frac{q \cdot t \cdot g \cdot h}{t} \Rightarrow P_u = \frac{q \cdot t \cdot g \cdot h}{t} \Rightarrow P_u = q \cdot g \cdot h.$$

Računamo korisnost hidroelektrane.

$$\eta = \frac{P_i}{P_u} \Rightarrow \eta = \frac{P_i}{q \cdot g \cdot h} \Rightarrow \eta = \frac{7.5 \cdot 10^5 \text{ W}}{5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 25 \text{ m}} \Rightarrow \eta = 0.6 \Rightarrow \eta = 0.60 \Rightarrow \eta = \frac{60}{100} \Rightarrow \eta = 60\%.$$

### Vježba 251

Na vodopadu visine 50 m izgrađena je hidroelektrana snage 1500 kW. Odredite korisnost ako znate da je maseni protok vode  $5 \cdot 10^3 \text{ kg/s}$ . ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 60%.

### Zadatak 252 (Josip, srednja škola)

Dizalica snage 1750 W podiže teret mase 315 kg na visinu 16 m. Koliko dugo traje podizanje? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 252

$$P = 1750 \text{ W}, \quad m = 315 \text{ kg}, \quad h = 16 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Obavljeni rad pri dizanju tereta utrošen je na povećanje gravitacijske potencijalne energije tereta.

$$\left. \begin{array}{l} E_{gp} = m \cdot g \cdot h \\ W = E_{gp} \end{array} \right\} \Rightarrow W = m \cdot g \cdot h.$$

Vrijeme podizanja tereta iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{W}{t} \\ W = m \cdot g \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \cdot \frac{t}{P} \Rightarrow t = \frac{m \cdot g \cdot h}{P} = \frac{315 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 16 \text{ m}}{1750 \text{ W}} = 28.3 \text{ s.}$$

### Vježba 252

Dizalica snage 1750 W podiže teret mase 630 kg na visinu 8 m. Koliko dugo traje podizanje? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 28.3 s.

### Zadatak 253 (Viki, gimnazija)

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine 10 m/s, treba uložiti rad  $W_0$ . Zanimarite li silu trenja i otpor zraka, koliko je rada potrebno uložiti da se automobil ubrza od brzine 10 m/s do brzine 30 m/s?

$$A. 8 \cdot W_0 \quad B. 4 \cdot W_0 \quad C. 3 \cdot W_0 \quad D. 2 \cdot W_0$$

### Rješenje 253

$$v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad v_1 = 10 \text{ m/s}, \quad W_0, \quad v_2 = 30 \text{ m/s}, \quad W_1 = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Kada se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine  $v_1$  uloženi rad iznosi:

$$W_0 = E_{k(1)} - E_{k(0)} \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2.$$

Kada se automobil ubrza od brzine  $v_1$  do brzine  $v_2$  uloženi rad iznosi:

$$W_1 = E_{k(2)} - E_{k(1)} \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2).$$

Računamo omjer radova  $W_1$  i  $W_0$ .

$$\begin{aligned} \frac{W_1}{W_0} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2} \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2} \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} &= \frac{\left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = \frac{900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = \frac{800 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = 8 \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = 8 \cdot W_0 \Rightarrow W_1 = 8 \cdot W_0. \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 253

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine 10 m/s, treba uložiti rad  $W_0$ . Zanimarite li silu trenja i otpor zraka, koliko je rada potrebno uložiti da se automobil ubrza od brzine 10 m/s do brzine 40 m/s?

- A.  $15 \cdot W_0$       B.  $14 \cdot W_0$       C.  $13 \cdot W_0$       D.  $12 \cdot W_0$

**Rezultat:** A.

**Zadatak 254 (Viki, gimnazija)**

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine 10 m/s, treba uložiti rad  $W_0$ . Zanimarite li silu trenja i otpor zraka, koliko je rada potrebno uložiti da se automobil zaustavi kada ima brzinu 30 m/s?

- A.  $2 \cdot W_0$       B.  $4 \cdot W_0$       C.  $8 \cdot W_0$       D.  $9 \cdot W_0$

**Rješenje 254**

$$v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad v_1 = 10 \text{ m/s}, \quad W_0, \quad v_2 = 30 \text{ m/s}, \quad W_1 = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Kada se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine  $v_1$  uloženi rad iznosi:

$$W_0 = E_{k(1)} - E_{k(0)} \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2.$$

Kada se automobil usporava od brzine  $v_2$  do stanja mirovanja,  $v_0 = 0$ , uloženi rad iznosi:

$$W_1 = E_{k(2)} - E_{k(0)} \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2.$$

Računamo omjer radova  $W_1$  i  $W_0$ .

$$\begin{aligned} \frac{W_1}{W_0} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2} \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2} \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = \left( \frac{30 \frac{m}{s}}{10 \frac{m}{s}} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = 3^2 \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = 9 \Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = 9 \cdot W_0 \Rightarrow W_1 = 9 \cdot W_0. \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 254**

Da se automobil ubrza iz stanja mirovanja do brzine 10 m/s, treba uložiti rad  $W_0$ . Zanimarite li silu trenja i otpor zraka, koliko je rada potrebno uložiti da se automobil zaustavi kada ima brzinu 20 m/s?

- A.  $2 \cdot W_0$       B.  $4 \cdot W_0$       C.  $8 \cdot W_0$       D.  $9 \cdot W_0$

**Rezultat:** B.

**Zadatak 255 (Nikolina, gimnazija)**

Tijelo se giba pravocrtno po horizontalnoj površini i ima kinetičku energiju od 24 J. Na tijelo u suprotnom smjeru od smjera gibanja počinje djelovati stalna horizontalna sila iznosa 4.0 N. Koliki put prijeđe tijelo do zaustavljanja? Trenje zanemarite.

**Rješenje 255**

$$E_k = 24 \text{ J}, \quad F = 4.0 \text{ N}, \quad s = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Promjena kinetičke energije tijela jednaka je utrošenom radu sile  $F$  na putu  $s$ .

$$W = E_k \Rightarrow F \cdot s = E_k \Rightarrow F \cdot s = E_k \cdot \frac{1}{F} \Rightarrow s = \frac{E_k}{F} = \frac{24 \text{ J}}{4.0 \text{ N}} = 6 \text{ m}.$$

### Vježba 255

Tijelo se giba pravocrtno po horizontalnoj površini i ima kinetičku energiju od 48 J. Na tijelo u suprotnom smjeru od smjera gibanja počinje djelovati stalna horizontalna sila iznosa 8.0 N. Koliki put prijeđe tijelo do zaustavljanja? Trenje zanemarite.

**Rezultat:** 6 m.

### Zadatak 256 (Ana, gimnazija)

Tijelo mase  $m$  giba se brzinom  $v$  po podlozi (bez trenja) i udara o nepomično tijelo jednake mase. Nakon sudara tijela se gibaju zajedno. Kakav je odnos kinetičkih energija nakon i prije sudara?

$$A. E_{k(2)} = \frac{E_{k(1)}}{4} \quad B. E_{k(2)} = \frac{E_{k(1)}}{2} \quad C. E_{k(2)} = \frac{E_{k(1)}}{\sqrt{2}} \quad D. E_{k(2)} = \frac{E_{k(1)}}{8}$$

### Rješenje 256

$$m_1 = m, \quad v_1 = v, \quad m_2 = m, \quad v_2 = 0, \quad v_1' = v_2' = v' = ?, \quad E_{k(2)} : E_{k(1)} = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} \text{ kad računamo iznos.}$$

### Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'.$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Uporabom zakona očuvanja količine gibanja izračunamo brzinu  $v'$  kojom se tijela zajedno gibaju nakon sudara.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m \cdot v + m \cdot 0 = m \cdot v' + m \cdot v' \Rightarrow m \cdot v = 2 \cdot m \cdot v' \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot v = 2 \cdot m \cdot v' \cdot \frac{1}{2 \cdot m} \Rightarrow v' = \frac{v}{2}. \end{aligned}$$

Kinetička energija oba tijela prije sudara iznosi:

$$E_{k(1)} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \Rightarrow E_{k(1)} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0 \Rightarrow E_{k(1)} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija oba tijela nakon sudara kada se gibaju istom brzinom  $v'$  iznosi:

$$E_{k(2)} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot (v')^2 \Rightarrow E_{k(2)} = \frac{1}{2} \cdot (m + m) \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 \Rightarrow E_{k(2)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot \frac{v^2}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{k(2)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot \frac{v^2}{4} \Rightarrow E_{k(2)} = m \cdot \frac{v^2}{4}.$$

Računamo omjer kinetičkih energija  $E_{k(2)}$  i  $E_{k(1)}$ .

$$\frac{E_{k(2)}}{E_{k(1)}} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{4}}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2} \Rightarrow \frac{E_{k(2)}}{E_{k(1)}} = \frac{m \cdot v^2}{4} \Rightarrow \frac{E_{k(2)}}{E_{k(1)}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{E_{k(2)}}{E_{k(1)}} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{E_{k(2)}}{E_{k(1)}} = \frac{2}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{E_{k(2)}}{E_{k(1)}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{E_{k(2)}}{E_{k(1)}} = \frac{1}{2} \cdot E_{k(1)} \Rightarrow E_{k(2)} = \frac{E_{k(1)}}{2}.$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 256

Tijelo mase  $m$  giba se brzinom  $v$  po podlozi (bez trenja) i udara o nepomično tijelo trostruko veće mase. Nakon sudara tijela se gibaju zajedno. Kakav je odnos kinetičkih energija nakon i prije sudara?

A.  $E_{k(2)} = \frac{E_{k(1)}}{4}$       B.  $E_{k(2)} = \frac{E_{k(1)}}{2}$       C.  $E_{k(2)} = \frac{E_{k(1)}}{\sqrt{2}}$       D.  $E_{k(2)} = \frac{E_{k(1)}}{8}$

**Rezultat:** A.

### Zadatak 257 (Ivana, gimnazija)

Predmet mase 0.5 kg padne s visine od 10 m. U trenutku udarca o zemlju njegova kinetička energija je:

A. 0.5 J      B. 4 J      C. 49 J      D. 490 J

( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 257

$m = 0.5 \text{ kg}, \quad h = 10 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad E_k = ?$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Predmet mase  $m$  na visini  $h$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju



$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h.$$

U trenutku udarca o zemlju ima energiju u obliku kinetičke energije  $E_k$ . Zbog zakona očuvanja energije vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} E_{gp} = m \cdot g \cdot h \\ E_k = E_{gp} \end{array} \right\} \Rightarrow E_k = m \cdot g \cdot h = 0.5 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 49.05 \text{ J} \approx 49 \text{ J}.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 257

Predmet mase 1 kg padne s visine od 5 m. U trenutku udarca o zemlju njegova kinetička energija je:

- A. 0.5 J      B. 4 J      C. 49 J      D. 490 J

**Rezultat:** C.

### Zadatak 258(Ivana, gimnazija)

Tijelo mase  $m$  giba se brzinom 10 m/s po podlozi, bez trenja i udara o nepomično tijelo jednake mase. Nakon sudara tijela se gibaju zajedno. Kolika je zajednička brzina tijela nakon sudara?

- A.  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       B.  $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       C.  $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       D.  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### Rješenje 258

$$m_1 = m, \quad v_1 = 10 \text{ m/s}, \quad v_2 = 0 \text{ m/s}, \quad m_2 = m, \quad v_1' = v_2' = v = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

### Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'.$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Uporabom zakona očuvanja količine gibanja izračunamo brzinu  $v$  kojom se tijela zajedno gibaju nakon sudara.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot 0 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v + m_2 \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot v_1 = v \cdot (m_1 + m_2) \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = v \cdot (m_1 + m_2) / \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{m \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{m + m} \Rightarrow v = \frac{m \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot m} \Rightarrow v = \frac{m \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot m} \Rightarrow v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 258

Tijelo mase  $m$  giba se brzinom 20 m/s po podlozi, bez trenja i udara o nepomično tijelo jednake mase. Nakon sudara tijela se gibaju zajedno. Kolika je zajednička brzina tijela nakon sudara?

- A.  $10 \frac{m}{s}$       B.  $20 \frac{m}{s}$       C.  $0 \frac{m}{s}$       D.  $5 \frac{m}{s}$

**Rezultat:** A.

**Zadatak 259 (Ivana, gimnazija)**

Ana i Ivo stoje na ledu i odguravaju se rukama. Ana ima tri puta veću masu od Ive. Anina brzina netom nakon što su se odgurnuli iznosi 6 m/s. Kolika je Ivina brzina netom nakon odguravanja?

- A.  $2 \frac{m}{s}$       B.  $6 \frac{m}{s}$       C.  $9 \frac{m}{s}$       D.  $18 \frac{m}{s}$

**Rješenje 259**

$$v_1 = v_2 = 0 \text{ m/s}, \quad m_1 = 3 \cdot m, \quad m_2 = m, \quad v_1' = 6 \text{ m/s}, \quad v_2' = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad , \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

**Zakon o sačuvanju količine gibanja**

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

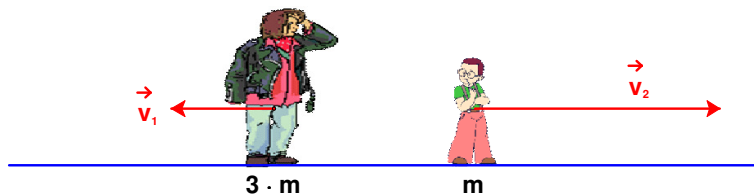
$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Uporabom zakona očuvanja količine gibanja izračunamo Ivinu brzinu netom nakon odguravanja  $v_2'$ .

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow 0 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' &= 0 \Rightarrow m_2 \cdot v_2' = -m_1 \cdot v_1' \Rightarrow m_2 \cdot v_2' = -m_1 \cdot v_1' \cdot \frac{1}{m_2} \Rightarrow v_2' = -\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1' = \\ &= -\frac{3 \cdot m}{m} \cdot 6 \frac{m}{s} = -\frac{3 \cdot m}{m} \cdot 6 \frac{m}{s} = -18 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Predznak minus u rezultatu znači da se Ivo giba u suprotnom smjeru od Ane. Odgovor je pod D.



**Vježba 259**

Ana i Ivo stoje na ledu i odguravaju se rukama. Ana ima dva puta veću masu od Ive. Anina brzina netom nakon što su se odgurnuli iznosi 6 m/s. Kolika je Ivina brzina netom nakon odguravanja?

- A.  $10 \frac{m}{s}$       B.  $3 \frac{m}{s}$       C.  $12 \frac{m}{s}$       D.  $15 \frac{m}{s}$

**Rezultat:** C.

### Zadatak 260 (Kika, gimnazija)

Nerastegnuta opruga duga je 15 cm. Tu oprugu, konstante elastičnosti 400 N/m, sabijemo na polovinu dužine. Koliko smo energije pohranili u opruzi?

#### Rješenje 260

$$l = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \quad k = 400 \text{ N/m}, \quad E_{ep} = ?$$

Elastična opruga produžena za  $x$  ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je  $k$  konstanta opruge.

Budući da oprugu sabijemo na polovicu njezine duljine, elastična potencijalna energija iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \cdot l \\ E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l \right)^2 \Rightarrow E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{1}{4} \cdot l^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_{ep} = \frac{1}{8} \cdot k \cdot l^2 = \frac{1}{8} \cdot 400 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0.15 \text{ m})^2 = 1.125 \text{ J}.$$

#### Vježba 260

Nerastegnuta opruga duga je 30 cm. Tu oprugu, konstante elastičnosti 400 N/m, sabijemo na polovinu dužine. Koliko smo energije pohranili u opruzi?

**Rezultat:** 4.5 J.