

### Zadatak 221 (Saša, gimnazija)

Plastelinska pločica, mase 0.2 kg, klizi pravocrtno bez trenja po glatkoj, vodoravnoj površini leda, brzinom 3 m/s. Na nju nalijeće druga plastelinska pločica, koja klizi po istom pravcu njoj u susret. Njezina masa je 0.2 kg, a brzina 4 m/s. Pločice se sudare potpuno neelastično.

- a) Količina gibanja prve pločice prije sudara iznosi \_\_\_\_\_, a druge \_\_\_\_\_.  
b) Ukupna količina gibanja sustava pločica prije sudara iznosi \_\_\_\_\_.  
c) Brzina nastalog tijela nakon sudara iznosi \_\_\_\_\_.

### Rješenje 221

$$m_1 = 0.2 \text{ kg}, \quad v_1 = 3 \text{ m/s}, \quad m_2 = 0.2 \text{ kg}, \quad v_2 = -4 \text{ m/s (suprotan smjer od } v_1), \quad p_1 = ?, \\ p_2 = ?, \quad p_u = ?, \quad v = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

### Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela. Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Ako je sudar središnji (kad svi vektori brzina leže na pravcu koji prolazi središtem masa obaju tijela), zakon održanja količina gibanja glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v + m_2 \cdot v \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2},$$

gdje je  $v$  zajednička brzina za oba tijela koja su se sudarila.



- a) Količina gibanja prve pločice prije sudara iznosi

$$p_1 = m_1 \cdot v_1 = 0.2 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.6 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a druge

$$p_2 = m_2 \cdot v_2 = 0.2 \text{ kg} \cdot (-4) \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0.8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- b) Ukupna količina gibanja sustava pločica prije sudara je

$$p_u = p_1 + p_2 = 0.6 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} + (-0.8) \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0.2 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- c) Brzina nastalog tijela nakon sudara iznosi

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v + m_2 \cdot v \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \\ = \frac{0.2 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0.2 \text{ kg} \cdot (-4) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.2 \text{ kg} + 0.2 \text{ kg}} = -0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odgovori:

- a) Količina gibanja prve pločice prije sudara iznosi  $0.6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , a druge  $-0.8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .  
b) Ukupna količina gibanja sustava pločica prije sudara iznosi  $-0.2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .

c) Brzina nastalog tijela nakon sudara iznosi  $-0.5 \text{ m/s}$ .

### Vježba 221

Plastelinska pločica, mase  $0.3 \text{ kg}$ , klizi pravocrtno bez trenja po glatkoj, vodoravnoj površini leda, brzinom  $3 \text{ m/s}$ . Na nju nalijeće druga plastelinska pločica, koja klizi po istom pravcu njoj u susret. Njezina masa je  $0.3 \text{ kg}$ , a brzina  $4 \text{ m/s}$ . Pločice se sudare potpuno neelastično. Brzina nastalog tijela nakon sudara iznosi \_\_\_\_\_.

**Rezultat:**  $-0.5 \text{ m/s}$ .

### Zadatak 222 (Saša, gimnazija)

Kolika je snaga motora putničkog automobila mase  $800 \text{ kg}$  ako automobil za  $4 \text{ s}$  postigne brzinu  $72 \text{ km/h}$ ? Trenje zanemarite.

### Rješenje 222

$$m = 800 \text{ kg}, \quad v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad t = 4 \text{ s}, \quad v = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad P = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Rad koji motor obavi da bi automobil postigao brzinu  $v$  za vrijeme  $t$  jednak je promjeni njegove kinetičke energije.

$$W = E_k - E_{k0} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v^2 - v_0^2).$$

Snaga motora iznosi:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v^2 - v_0^2)}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot (v^2 - v_0^2)}{2 \cdot t} = \frac{800 \text{ kg} \cdot \left( \left( 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - 0 \right)}{2 \cdot 4 \text{ s}} = 40000 \text{ J} = 40 \text{ kJ}.$$

### Vježba 222

Kolika je snaga motora putničkog automobila mase  $1600 \text{ kg}$  ako automobil za  $8 \text{ s}$  postigne brzinu  $72 \text{ km/h}$ ? Trenje zanemarite.

**Rezultat:**  $40 \text{ kJ}$ .

### Zadatak 223 (Anita, gimnazija)

Toplinski stroj troši svake minute količinu topline  $Q = 1.88 \text{ MJ}$  pretvarajući je u mehanički rad. Korisnost stroja je  $\eta = 0.20$ . Kolika je korisna snaga stroja ako je utrošak toplinske energije ravnomjeran?

### Rješenje 223

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad Q = 1.88 \text{ MJ} = 1.88 \cdot 10^6 \text{ J}, \quad \eta = 0.20, \quad P_k = ?$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Omjer između energije koju iskorišćujemo od nekog stroja i ukupne energije koju ulažemo u stroj zovemo korisnost stroja  $\eta$ .

$$\eta = \frac{W_k}{W_u}, \quad \eta = \frac{P_k}{P_u}.$$

Korisna snaga iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} W = Q, \quad P_u = \frac{W}{t} \\ \eta = \frac{P_k}{P_u} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_u = \frac{Q}{t} \\ \eta = \frac{P_k}{P_u} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_u = \frac{Q}{t} \\ \eta = \frac{P_k}{P_u} \cdot P_u \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_u = \frac{Q}{t} \\ P_k = \eta \cdot P_u \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_k = \eta \cdot \frac{Q}{t} = 0.20 \cdot \frac{1.88 \cdot 10^6 \text{ J}}{60 \text{ s}} = 6266.67 \text{ W} \approx 6.27 \cdot 10^3 \text{ W} = 6.27 \text{ kW}.$$

### Vježba 223

Toplinski stroj troši svake dvije minute količinu topline  $Q = 1.88 \text{ MJ}$  pretvarajući je u mehanički rad. Korisnost stroja je  $\eta = 0.40$ . Kolika je korisna snaga stroja ako je utrošak toplinske energije ravnomjeran?

**Rezultat:** 6.27 kW.

### Zadatak 224 (Anita, gimnazija)

Korisnost stroja, korisne snage  $P_k = 22.3 \text{ kW}$ , iznosi  $\eta = 0.12$ . Koliku količinu topline potroši stroj tijekom jednog sata?

#### Rješenje 224

$$P_k = 22.3 \text{ kW} = 22300 \text{ W}, \quad \eta = 0.12, \quad t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}, \quad Q = ?$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Omjer između energije koju iskorišćujemo od nekog stroja i ukupne energije koju ulažemo u stroj zovemo korisnost stroja  $\eta$ .

$$\eta = \frac{W_k}{W_u} \quad , \quad \eta = \frac{P_k}{P_u}$$

Količina topline Q koju stroj potroši iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} W = Q \quad , \quad P_u = \frac{W}{t} \\ \eta = \frac{P_k}{P_u} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_u = \frac{Q}{t} \\ \eta = \frac{P_k}{P_u} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_u = \frac{Q}{t} \\ \eta = \frac{P_k}{P_u} \cdot \frac{P_u}{\eta} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_u = \frac{Q}{t} \\ P_u = \frac{P_k}{\eta} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{t} = \frac{P_k}{\eta} \Rightarrow \frac{Q}{t} = \frac{P_k}{\eta} \cdot t \Rightarrow Q = \frac{P_k}{\eta} \cdot t = \frac{22300 \text{ W}}{0.12 \text{ s}} \cdot 3600 \text{ s} = 6.69 \cdot 10^8 \text{ J}$$

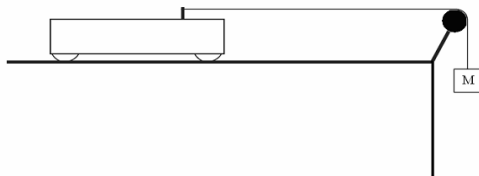
### Vježba 224

Korisnost stroja, korisne snage  $P_k = 44.6 \text{ kW}$ , iznosi  $\eta = 0.24$ . Koliku količinu topline potroši stroj tijekom jednog sata?

**Rezultat:**  $6.69 \cdot 10^8 \text{ J}$ .

### Zadatak 225 (Xena, srednja škola)

Učenici izvedu pokus u kojem kolica početno miruju na stolu, a uteg je na najvišem položaju, kako je prikazano na slici. Kolica se zatim gibaju po ravnom horizontalnom stolu dok uteg pričvršćen za njih preko koloture pada prema dolje.



Učenici su izmjerili da se od početnog trenutka do trenutka neposredno prije nego je uteg pao na pod (kad su kolica postigla najveću brzinu) kinetička energija kolica povećala za 1.4 J. Kinetička energija utega se u istom vremenskom intervalu povećala za 0.3 J. Ako je trenje zanemarivo, očekujemo da se gravitacijska potencijalna energija utega u tom vremenskom intervalu \_\_\_\_\_ za približno \_\_\_\_\_ J.

### Rješenje 225

$$\Delta E_k = 1.4 \text{ J}, \quad \Delta E_u = 0.3 \text{ J}, \quad \Delta E_{gp} = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

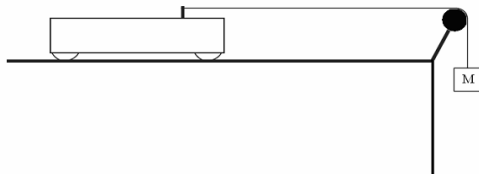
Budući da se kinetička energija kolica povećala za  $\Delta E_k$ , a kinetička energija utega za  $\Delta E_u$ , ukupno povećanje kinetičke energije sustava iznosi:

$$\Delta E_k + \Delta E_u = 1.4 \text{ J} + 0.3 \text{ J} = 1.7 \text{ J}.$$

Ako je trenje zanemarivo, zbog zakona o očuvanju ukupne energije, u istom vremenskom intervalu smanjila se gravitacijska potencijalna energija za  $\Delta E_{gp} = 1.7 \text{ J}$ .

### Vježba 225

Učenici izvode pokus u kojem kolica početno miruju na stolu, a uteg je na najvišem položaju, kako je prikazano na slici. Kolica se zatim gibaju po ravnom horizontalnom stolu dok uteg pričvršćen za njih preko koloture pada prema dolje.



Učenici su izmjerili da se od početnog trenutka do trenutka neposredno prije nego je uteg pao na pod (kad su kolica postigla najveću brzinu) kinetička energija kolica povećala za 2.4 J. Kinetička energija utega se u istom vremenskom intervalu povećala za 0.6 J. Ako je trenje zanemarivo, očekujemo da se gravitacijska potencijalna energija utega u tom vremenskom intervalu \_\_\_\_\_ za približno \_\_\_\_\_ J.

**Rezultat:** smanji za 3 J.

### Zadatak 226 (Željko, srednja škola)

Tijelo mase 1 kg bačeno je vertikalno uvis brzinom 10 m/s. Kolika mu je promjena gravitacijske potencijalne energije nakon 1 sekunde gibanja? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 226

$$m = 1 \text{ kg}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad t = 1 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E_{gp} = ?$$

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato je put  $s$  (ili visina  $h$ ) u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan ovim izrazom:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

a brzina

$$v = v_0 - g \cdot t.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

1. inačica

Izračunamo visinu  $h$  na koju se tijelo popne nakon vremena  $t$ .

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Tada promjena gravitacijske potencijalne energije  $\Delta E_{gp}$  iznosi:

$$\begin{aligned} \Delta E_{gp} &= m \cdot g \cdot h \Rightarrow \Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot \left( v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right) \Rightarrow \Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot t \cdot \left( v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \right) = \\ &= 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} \cdot \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} \right) = 49.98 \text{ J} \approx 50 \text{ J}. \end{aligned}$$

2. inačica

Tijelo je bačeno vertikalno uvis početnom brzinom  $v_0$  pa ima kinetičku energiju

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2.$$

Nakon vremena  $t$  njegova brzina iznosi:

$$v = v_0 - g \cdot t.$$

Tada je kinetička energija

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0 - g \cdot t)^2.$$

Promjena kinetičke energije (njezino smanjenje) jednaka je povećanju gravitacijske potencijalne energije (zbog zakona o očuvanju energije).

$$\begin{aligned} \Delta E_{gp} &= \Delta E_k \Rightarrow \Delta E_{gp} = E_{k_1} - E_{k_2} \Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0 - g \cdot t)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0^2 - 2 \cdot v_0 \cdot g \cdot t + (g \cdot t)^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0^2 - 2 \cdot v_0 \cdot g \cdot t + g^2 \cdot t^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot v_0 \cdot g \cdot t - \frac{1}{2} \cdot m \cdot g^2 \cdot t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot v_0 \cdot g \cdot t - \frac{1}{2} \cdot m \cdot g^2 \cdot t^2 \Rightarrow \Delta E_{gp} = m \cdot v_0 \cdot g \cdot t - \frac{1}{2} \cdot m \cdot g^2 \cdot t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot t \cdot \left( v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \right) = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} \cdot \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} \right) = 49.98 \text{ J} \approx 50 \text{ J}. \end{aligned}$$

### Vježba 226

Tijelo mase 100 dag bačeno je vertikalno uvis brzinom 10 m/s. Kolika mu je promjena gravitacijske potencijalne energije nakon 1 sekunde gibanja? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 50 J.

### Zadatak 227 (Marko, srednja škola)

Tijelo mase 2 g slobodno pada početnom brzinom 3 m/s. Odredite kinetičku energiju tijela poslije 0.4 s. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 227

$$m = 2 \text{ g} = 0.002 \text{ kg}, \quad v_0 = 3 \text{ m/s}, \quad t = 0.4 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad E_k = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0$  m/s i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v = g \cdot t,$$

gdje su  $v$  brzina pada,  $g$  ubrzanje sile teže. Ako je zadana početna brzina  $v_0$  tada vrijedi:

$$v = v_0 + g \cdot t.$$

Računamo kinetičku energiju tijela.

$$\left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v = v_0 + g \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0 + g \cdot t)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.002 \text{ kg} \cdot \left( 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.4 \text{ s} \right)^2 = 0.048 \text{ J}.$$

### Vježba 227

Tijelo mase 2 g slobodno pada početnom brzinom 10.8 km/h. Odredite kinetičku energiju tijela poslije 0.4 s. ( $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>)

**Rezultat:** 0.048 J.

### Zadatak 228 (Matija, strukovna škola)

Tijelo mase 10 kg pada s visine 80 m i pri udarcu o površinu Zemlje ima kinetičku energiju 4500 J. Koliko je energije tijelo utrošilo na savladavanje otpora zraka? ( $g = 10$  m/s<sup>2</sup>)

### Rješenje 228

$$m = 10 \text{ kg}, \quad h = 80 \text{ m}, \quad E_k = 4500 \text{ J}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona o očuvanju energije gravitacijska potencijalna energija  $E_{gp}$  koju tijelo ima na visini  $h$  jednaka je zbroju kinetičke energije  $E_k$  koju tijelo ima pri udarcu o površinu Zemlje i energije  $\Delta E$  koju je tijelo utrošilo na savladavanje otpora zraka.

$$E_{gp} = E_k + \Delta E \Rightarrow \Delta E = E_{gp} - E_k \Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot h - E_k = 10 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 80 \text{ m} - 4500 \text{ J} = 3500 \text{ J}.$$

### Vježba 228

Tijelo mase 20 kg pada s visine 40 m i pri udarcu o površinu Zemlje ima kinetičku energiju 4500 J. Koliko je energije tijelo utrošilo na savladavanje otpora zraka?

**Rezultat:** 3500 J.

### Zadatak 229 (Matija, strukovna škola)

Tijelo mase 10 kg pada s neke visine i pri udarcu o površinu Zemlje ima kinetičku energiju 4500 J. S koje je visine tijelo počelo padati ako je na savladavanje sile otpora zraka utrošilo 3500 J svoje energije? ( $g = 10$  m/s<sup>2</sup>)

### Rješenje 229

$$m = 10 \text{ kg}, \quad E_k = 4500 \text{ J}, \quad \Delta E = 3500 \text{ J}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona o očuvanju energije gravitacijska potencijalna energija  $E_{gp}$  koju tijelo ima na visini  $h$  jednaka je zbroju kinetičke energije  $E_k$  koju tijelo ima pri udarcu o površinu Zemlje i energije  $\Delta E$  koju je tijelo utrošilo na savladavanje otpora zraka.

$$\begin{aligned} E_{gp} = E_k + \Delta E &\Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k + \Delta E \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k + \Delta E \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{E_k + \Delta E}{m \cdot g} = \\ &= \frac{4500 \text{ J} + 3500 \text{ J}}{10 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 80 \text{ m}. \end{aligned}$$

### Vježba 229

Tijelo mase 10 kg pada s neke visine i pri udarcu o površinu Zemlje ima kinetičku energiju 4500 J. S koje je visine tijelo počelo padati ako je na savladavanje sile otpora zraka utrošilo 3500 J svoje energije?

**Rezultat:** 80 m.

### Zadatak 230 (Franjo, strukovna škola)

Kamen mase 1 kg pusti se iz mirovanja s visine 1 m. Odredite:

- a) gravitacijsku potencijalnu energiju kamena na toj visini,
- b) kinetičku energiju kamena na visini 20 cm. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 230

$$m = 1 \text{ kg}, \quad h = 1 \text{ m}, \quad h_1 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad E_{gp} = ?, \quad E_{k1} = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.



- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
  - Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.
- a) Računamo gravitacijsku potencijalnu energiju kamena na visini  $h$ . To je ujedno i njegova ukupna energija.

$$E_u = E_{gp} = m \cdot g \cdot h = 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} = 10 \text{ J}.$$

b) Računamo kinetičku energiju  $E_{k1}$  kamena na visini  $h_1$ . Na visini  $h_1$  kamen ima gravitacijsku potencijalnu energiju  $E_{gp1}$ . Zbog zakona o očuvanju energije ukupna energija  $E_u$  jednaka je zbroju gravitacijska potencijalna energija  $E_{gp1}$  i kinetičke energije  $E_{k1}$ .

$$\left. \begin{array}{l} E_u = E_{gp1} + E_{k1} \\ E_{gp1} = m \cdot g \cdot h_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_u = m \cdot g \cdot h_1 + E_{k1} \Rightarrow E_{k1} = E_u - m \cdot g \cdot h_1 =$$

$$= 10 \text{ J} - 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.2 \text{ m} = 8 \text{ J}.$$

### Vježba 230

Kamen mase 1 kg pusti se iz mirovanja s visine 1 m. Odrediti:

- gravitacijsku potencijalnu energiju kamena na toj visini,
- kinetičku energiju kamena na visini 10 cm. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** a) 10 J , b) 9 J.

### Zadatak 231 (Ana, srednja škola)

Tijelo mase 50 kg klizi niz kosinu duljine 10 i visine 5 m. Tijelo na dnu kosine ima energiju 2000 J. Odredite silu trenja na kosini. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 231

$$m = 50 \text{ kg}, \quad s = 10 \text{ m}, \quad h = 5 \text{ m}, \quad E = 2000 \text{ J}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad F_{tr} = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja.

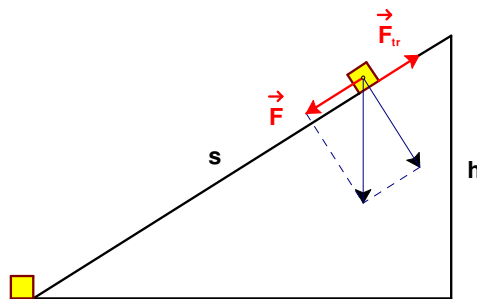
Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Zbog zakona očuvanja energije slijedi da je gravitacijska potencijalna energija tijela  $E_{gp}$  na vrhu kosine jednaka zbroju rada sile trenja  $F_{tr}$  na putu  $s$  i energije tijela u podnožju kosine.

$$E_{gp} = W_{tr} + E \Rightarrow W_{tr} = E_{gp} - E \Rightarrow F_{tr} \cdot s = m \cdot g \cdot h - E \Rightarrow F_{tr} \cdot s = m \cdot g \cdot h - E \quad / \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{tr} = \frac{m \cdot g \cdot h - E}{s} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m} - 2000 \text{ J}}{10 \text{ m}} = 50 \text{ N}.$$



### Vježba 231

Tijelo mase 100 kg kliže niz kosinu duljine 10 i visine 5 m. Tijelo na dnu kosine ima energiju 4000 J. Odredite silu trenja na kosini. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 100 N.

### Zadatak 232 (Ella, srednja škola)

Kugla mase 0.2 kg giba se brzinom 4 m/s, a kugla mase 0.5 kg brzinom 2 m/s. Obje kugle gibaju se pravocrtno u istome smjeru te prva kugla naleti na drugu. Koliko iznosi ukupna količina gibanja tih dviju kugli nakon sudara?

A.  $0.2 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$       B.  $0.8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$       C.  $1.0 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$       D.  $1.8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### Rješenje 232

$$m_1 = 0.2 \text{ kg}, \quad v_1 = 4 \text{ m/s}, \quad m_2 = 0.5 \text{ kg}, \quad v_2 = 2 \text{ m/s}, \quad p = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

### Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Ukupna količina gibanja dva tijela nakon sudara jednaka je ukupnoj količini gibanja prije sudara.

$$p = p_1 + p_2 \Rightarrow p = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0.2 \text{ kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0.5 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 232

Kugla mase 2 kg giba se brzinom 4 m/s, a kugla mase 0.5 kg brzinom 2 m/s. Obje kugle gibaju se pravocrtno u istome smjeru te prva kugla naleti na drugu. Koliko iznosi ukupna količina gibanja tih dviju kugli nakon sudara?

A.  $9 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$       B.  $8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$       C.  $11 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$       D.  $18 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

**Rezultat:** A.

### Zadatak 233 (Mira, medicinska škola)

Kolica mase 0.4 kg gibaju se brzinom 2 m/s. Njima ususret gibaju se druga kolica mase 0.25 kg. Koliko treba iznositi brzina drugih kolica da nakon sudara oboja kolica miruju?

### Rješenje 233

$$m_1 = 0.4 \text{ kg}, \quad v_1 = 2 \text{ m/s}, \quad m_2 = 0.25 \text{ kg}, \quad v_1' = v_2' = v' = 0 \text{ m/s}, \quad v_2 = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad , \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

### Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Ukupna količina gibanja dva tijela nakon sudara jednaka je ukupnoj količini gibanja prije sudara. Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Budući da nakon sudara oboja kolica miruju, brzina  $v_2$  iznosi:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_2' \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot 0 \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 \cdot \frac{1}{m_2} \Rightarrow v_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1 = -\frac{0.4 \text{ kg}}{0.25 \text{ kg}} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$



Predznak minus znači da se druga kolica gibaju u suprotnom smjeru od prvih.

### Vježba 233

Kolica mase 0.8 kg gibaju se brzinom 2 m/s. Njima ususret gibaju se druga kolica mase 0.5 kg. Koliko treba iznositi brzina drugih kolica da nakon sudara oboja kolica miruju?

**Rezultat:**  $-3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### Zadatak 234 (Ana, medicinska škola)

Dva tijela razlikuju se u masi, tako da je masa jednog tijela deset puta veća od mase drugog. Koliki treba biti omjer njihovih brzina da bi im kinetičke energije bile jednake?

### Rješenje 234

$$m_1 = 10 \cdot m_2, \quad \frac{v_2}{v_1} = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetičke energije tijela iznose:

$$\left. \begin{aligned} E_{k_1} &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 \\ E_{k_2} &= \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_{k_1} &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot m_2 \cdot v_1^2 \\ E_{k_2} &= \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \end{aligned} \right\}.$$

Iz uvjeta zadatka kinetičke energije su jednake pa vrijedi:

$$E_{k_2} = E_{k_1} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot m_2 \cdot v_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot m_2 \cdot v_1^2 \cdot \frac{2}{m_2 \cdot v_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2} = 10 \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = 10 \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right) = 10 / \sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{10}.$$

### Vježba 234

Dva tijela razlikuju se u masi, tako da je masa jednog tijela četiri puta veća od mase drugog. Koliki treba biti omjer njihovih brzina da bi im kinetičke energije bile jednake?

**Rezultat:**  $\frac{v_2}{v_1} = 2.$

### Zadatak 235 (Ana, medicinska škola)

Dva tijela razlikuju se u brzinama gibanja, tako da je brzina jednog tijela deset puta veća od brzine drugog. Koliki treba biti omjer njihovih masa da bi im kinetičke energije bile jednake?

### Rješenje 235

$$v_1 = 10 \cdot v_2, \quad \frac{m_2}{m_1} = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetičke energije tijela iznose:

$$\left. \begin{array}{l} E_{k_1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 \\ E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_{k_1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (10 \cdot v_2)^2 \\ E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_{k_1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot 100 \cdot v_2^2 \\ E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \end{array} \right\}.$$

Iz uvjeta zadatka kinetičke energije su jednake pa vrijedi:

$$E_{k_2} = E_{k_1} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot 100 \cdot v_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot 100 \cdot v_2^2 / \cdot \frac{2}{m_1 \cdot v_2^2} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 100.$$

### Vježba 235

Dva tijela razlikuju se u brzinama gibanja, tako da je brzina jednog tijela pet puta veća od brzine drugog. Koliki treba biti omjer njihovih masa da bi im kinetičke energije bile jednake?

**Rezultat:**  $\frac{m_2}{m_1} = 25.$

### Zadatak 236 (Luka, srednja škola)

Vlak mase 1000 tona giba se brzinom 72 km/h. Koliki rad treba obaviti sila motora da bi se brzina vlaka povećala na 108 km/h? Kolikom stalnom silom treba motor lokomotive djelovati na vlak da se povećanje brzine ostvari na putu od 2 km?

### Rješenje 236

$$m = 1000 \text{ t} = 10^6 \text{ kg}, \quad v_1 = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad v_2 = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}, \quad s = 2 \text{ km} = 2 \cdot 10^3 \text{ m}, \quad W = ?, \quad F = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Budući da je rad koji obavi sila motora po iznosu jednak povećanju kinetičke energije vlaka, vrijedi:

$$\begin{aligned} W = \Delta E_k &\Rightarrow W = E_{k_2} - E_{k_1} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \left( \left( 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left( 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = 2.5 \cdot 10^8 \text{ J} = 250 \cdot 10^6 \text{ J} = 250 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

Iz definicije rada dobije se iznos sile kojom motor lokomotive mora djelovati na vlak.

$$W = F \cdot s \Rightarrow W = F \cdot s / \frac{1}{s} \Rightarrow F = \frac{W}{s} = \frac{2.5 \cdot 10^8 \text{ J}}{2 \cdot 10^3 \text{ m}} = 1.25 \cdot 10^5 \text{ N} = 125 \cdot 10^3 \text{ N} = 125 \text{ kN}.$$



### Vježba 236

Vlak mase 2000 tona giba se brzinom 72 km/h. Koliki rad treba obaviti sila motora da bi se brzina vlaka povećala na 108 km/h? Kolikom stalnom silom treba motor lokomotive djelovati na vlak da se povećanje brzine ostvari na putu od 4 km?

**Rezultat:**  $W = 500 \text{ MJ}$ ,  $F = 125 \text{ kN}$ .

### Zadatak 237 (Luka, srednja škola)

Dječak na klizaljkama stoji na ledu iza sanjki. Odgurne ih brzinom  $v_1 = 10 \text{ m/s}$ , a on se pritom počne gibati u suprotnom smjeru. Koliki je rad obavio dječak ako je masa sanjki  $m_1 = 15 \text{ kg}$ , a masa dječaka  $m_2 = 45 \text{ kg}$ ?

### Rješenje 237

$$v_1 = 10 \text{ m/s}, \quad m_1 = 15 \text{ kg}, \quad m_2 = 45 \text{ kg}, \quad W = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

### Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zakon održanja količine gibanja za dva tijela mase  $m_1$  i  $m_2$  čije su početne brzine jednake nuli glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0,$$

gdje su  $v_1$  i  $v_2$  brzine tijela mase  $m_1$  odnosno  $m_2$  nakon njihova međusobnog djelovanja. Iz zakona održanja količine gibanja odredi se brzina  $v_2$  dječaka nakon guranja sanjki.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 \cdot \frac{1}{m_2} \Rightarrow v_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1.$$

Predznak minus znači da je brzina dječaka suprotnog smjera od brzine sanjki.

Računamo kinetičku energiju:

- sanjki čija je brzina  $v_1$

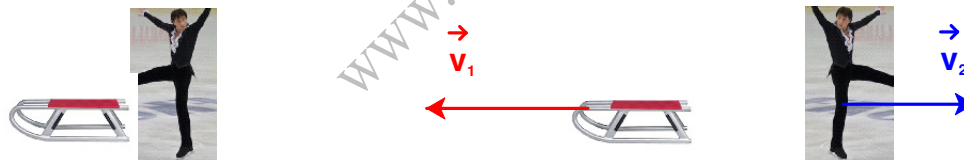
$$E_{k_1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2,$$

- dječaka čija je brzina  $v_2$

$$\begin{aligned} E_{k_2} &= \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \Rightarrow E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(-\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1\right)^2 \Rightarrow E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{m_1^2}{m_2^2} \cdot v_1^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{m_1^2}{m_2} \cdot v_1^2 \Rightarrow E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1^2}{m_2} \cdot v_1^2. \end{aligned}$$

Rad koji dječak obavi jednak je zbroju kinetičke energije sanjki i kinetičke energije dječaka.

$$\begin{aligned} W &= E_{k_1} + E_{k_2} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1^2}{m_2} \cdot v_1^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 15 \text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{15 \text{ kg}}{45 \text{ kg}}\right) = 1000 \text{ J} = 1 \text{ kJ}. \end{aligned}$$



### Vježba 237

Dječak na klizaljkama stoji na ledu iza sanjki. Odgurne sanjke brzinom  $v_1 = 36 \text{ km/h}$ , a on se pritom počne gibati u suprotnom smjeru. Koliki je rad obavio dječak ako je masa sanjki  $m_1 = 15 \text{ kg}$ , a masa dječaka  $m_2 = 45 \text{ kg}$ ?

**Rezultat:** 1 kJ.

### Zadatak 238 (Ana, gimnazija)

Iz puške mase 3 kg ispali se metak mase 5 g brzinom 300 m/s. a) Kolika je brzina puške nakon ispaljivanja metka? b) Ako čovjek mase 70 kg čvrsto drži pušku kolika je brzina čovjeka i puške neto nakon ispaljivanja metka?

### Rješenje 238

$$m_1 = 3 \text{ kg}, \quad m_2 = 5 \text{ g} = 0.005 \text{ kg}, \quad v_2 = 300 \text{ m/s}, \quad m_3 = 70 \text{ kg}, \quad v_1 = ?, \quad v_{13} = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Za dva tijela mase  $m_1$  i  $m_2$  koja međusobno djeluju jedno na drugo vrijedi zakon akcije i reakcije

$$F_1 = -F_2,$$

gdje  $F_1$  znači silu kojom tijelo mase  $m_2$  djeluje na tijelo mase  $m_1$  i ima hvatište u tijelu mase  $m_1$ , a  $F_2$  silu kojom tijelo mase  $m_1$  djeluje na tijelo mase  $m_2$  te ima hvatište u tijelu mase  $m_2$ . Te su dvije sile jednake veličinom i suprotna su smjera. Iz toga zakona proizlazi drugi, tj. zakona održanja količine gibanja koji glasi

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0,$$

ako su početne brzine obaju tijela bile jednake nuli. Brzine  $v_1$  i  $v_2$  brzine su tijela masa  $m_1$  odnosno  $m_2$  nakon njihova međusobnog djelovanja.

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

a) Količina gibanja puške i metka, dok metak nije ispaljen, jednaka je nuli. Kad se metak ispali brzinom  $v_2$ , zbog zakona održanja količine gibanja ukupna količina gibanja ostaje jednaka nuli pa se puška mora gibati u suprotnom smjeru brzinom  $v_1$ . Zato je:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 &\Rightarrow m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2 \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{1}{m_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot v_2 = -\frac{0.005 \text{ kg}}{3 \text{ kg}} \cdot 300 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$



b) Količina gibanja metka i čovjeka s puškomj, dok metak nije ispaljen, jednaka je nuli. Kad se metak ispali brzinom  $v_2$ , zbog zakona održanja količine gibanja ukupna količina gibanja ostaje jednaka nuli pa se čovjek s puškom neto nakon ispaljivanja metka mora gibati u suprotnom smjeru brzinom  $v_{13}$ . Zato je:

$$\begin{aligned} m_2 \cdot v_2 + (m_1 + m_3) \cdot v_{13} = 0 &\Rightarrow (m_1 + m_3) \cdot v_{13} = -m_2 \cdot v_2 \Rightarrow (m_1 + m_3) \cdot v_{13} = -m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{1}{m_1 + m_3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_{13} = -\frac{m_2}{m_1 + m_3} \cdot v_2 = -\frac{0.005 \text{ kg}}{3 \text{ kg} + 70 \text{ kg}} \cdot 300 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0.02 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

### Vježba 238

Iz puške mase 6 kg ispali se metak mase 5 g brzinom 600 m/s. Kolika je brzina puške nakon ispaljivanja metka?

**Rezultat:**  $-0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### Zadatak 239 (Ivan, gimnazija)

Tijelo mase 2 g slobodno pada početnom brzinom 3 m/s. Odredite kinetičku energiju tijela nakon 0.4 s. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 239

$$m = 2 \text{ g} = 0.002 \text{ kg}, \quad v_0 = 3 \text{ m/s}, \quad t = 0.4 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad E_k = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je  $v$  brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za

vrijeme  $t$ .

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijedi formula za brzinu:

$$v = v_0 + a \cdot t.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0$  m/s i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$v = g \cdot t,$$

gdje je  $v$  brzina pada.

Ako tijelo ima početnu brzinu  $v_0$  tada formula za trenutnu brzinu kod slobodnog pada glasi:

$$v = v_0 + g \cdot t.$$

Računamo kinetičku energiju tijela.

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v &= v_0 + g \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0 + g \cdot t)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0.002 \text{ kg} \cdot \left( 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.4 \text{ s} \right)^2 = 0.048 \text{ J}.$$

### Vježba 239

Tijelo mase 4 g slobodno pada početnom brzinom 3 m/s. Odredite kinetičku energiju tijela nakon 0.4 s. ( $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>)

**Rezultat:** 0.096 J.

### Zadatak 240 (Klara, gimnazija)

Dva automobila, jednake mase, istodobno krenu i gibaju se jednoliko ubrzano. Koliko je puta srednja snaga prvog automobila veća od srednje snage drugog, ako za isto vrijeme prvi automobil postigne brzinu dva puta veću od drugog? Trenje između kotača i puta zanemarite.

### Rješenje 240

$$m_1 = m_2 = m, \quad t_1 = t_2 = t, \quad v_1 = 2 \cdot v_2, \quad P_1 : P_2 = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Budući da je promjena kinetičke energije jednaka obavljenom radu, vrijedi:

$$E_k = W.$$

Za vrijeme  $t$ :

- prvi automobil razvije snagu

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= P_1 \cdot t \\ W_1 &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow P_1 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow P_1 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2 \cdot t} \cdot m \cdot v_1^2$$

- drugi automobil razvije snagu



$$\left. \begin{array}{l} W_2 = P_2 \cdot t \\ W_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow P_2 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \Rightarrow P_2 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2 \cdot t} \cdot m \cdot v_2^2.$$

Računamo omjer snaga.

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_2} &= \frac{\frac{1}{2 \cdot t} \cdot m \cdot v_1^2}{\frac{1}{2 \cdot t} \cdot m \cdot v_2^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot t} \cdot m \cdot v_1^2}{\frac{1}{2 \cdot t} \cdot m \cdot v_2^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{2 \cdot v_2}{v_2} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{2 \cdot v_2}{v_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = 2^2 \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = 4 \Rightarrow P_1 : P_2 = 4. \end{aligned}$$



### Vježba 240

Dva automobila, jednake mase, istodobno krenu i gibaju se jednoliko ubrzano. Koliko je puta srednja snaga prvog automobila veća od srednje snage drugog, ako za isto vrijeme prvi automobil postigne brzinu tri puta veću od drugog? Trenje između kotača i puta zanemarite.

**Rezultat:** 9.