

### Zadatak 181 (Deny, gimnazija)

Predmet miruje na horizontalnoj podlozi. Nakon što je dobio udarac u horizontalnom smjeru, giba se 8 s i zaustavi 32 m daleko od početnog položaja. Koliki je koeficijent trenja između predmeta i podloge? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 181

$$t = 8 \text{ s}, \quad s = 32 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2}$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Tu je trenje sila koja prisiljava predmet da se zaustavi na horizontalnoj podlozi.

$$\begin{aligned} F = F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g &\Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2} = \mu \cdot m \cdot g \quad | \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2 \cdot s}{g \cdot t^2} = \mu &\Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot s}{g \cdot t^2} = \frac{2 \cdot 32 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (8 \text{ s})^2} = 0.102. \end{aligned}$$

#### Vježba 181

Predmet miruje na horizontalnoj podlozi. Nakon što je dobio udarac u horizontalnom smjeru, giba se 8 s i zaustavi 64 m daleko od početnog položaja. Koliki je koeficijent trenja između predmeta i podloge? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.204.

### Zadatak 182 (Gimnazijalka Martina, gimnazija)

Koliki put će prevaliti saonice po horizontalnoj površini nakon što su se bez početne brzine spustile s brda visine 15 m i nagiba  $\alpha = 30^\circ$ ? Koeficijent trenja između saonica i podloge iznosi  $\mu = 0.2$ .

#### Rješenje 182

$$h = 15 \text{ m}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \mu = 0.2, \quad s = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru

gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

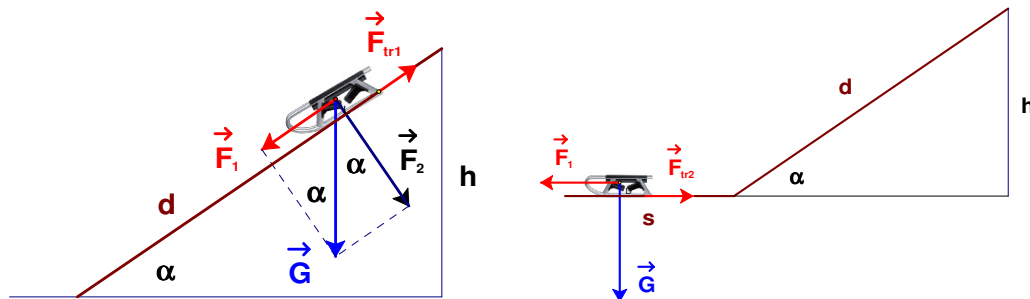
$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine  $G$  iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.



Na vrhu kosine saonice imaju gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h.$$

Sa slika vidi se da je:

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad , \quad \sin \alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Tijekom gibanja saonica njihova gravitacijska potencijalna energija troši se na svladavanje sile trenja po kosini duljine

$$d = \frac{h}{\sin \alpha}$$

i horizontalnom dijelu puta duljine  $s$ .  
Sila trenja na kosini je

$$F_{tr1} = \mu \cdot F_2 \Rightarrow F_{tr1} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha,$$

a na horizontalnom dijelu puta

$$F_{tr2} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr2} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Rad  $W_1$  utrošen na svladavanje trenja  $F_{tr1}$  na kosini duljine  $d$  iznosi:

$$\begin{aligned} W_1 &= F_{tr1} \cdot d \Rightarrow W_1 = \mu \cdot F_2 \cdot d \Rightarrow W_1 = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot d \Rightarrow \left[ d = \frac{h}{\sin \alpha} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow W_1 = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \Rightarrow W_1 = \mu \cdot m \cdot g \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Rad  $W_2$  utrošen na svladavanje trenja  $F_{tr2}$  na horizontalnoj podlozi duljine  $s$  iznosi:

$$W_2 = F_{tr2} \cdot s \Rightarrow W_2 = \mu \cdot G \cdot s \Rightarrow W_2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s.$$

Budući da će se gravitacijska potencijalna energija saonice na visini  $h$  potrošiti na svladavanje trenja na kosini i horizontalnoj površini (zakon o očuvanju energije), slijedi:

$$\begin{aligned} E_{gp} &= W_1 + W_2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \mu \cdot m \cdot g \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot s \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \mu \cdot m \cdot g \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot s \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \mu \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \mu \cdot s \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \cdot s = h - \mu \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha \quad / \cdot \frac{1}{\mu} \Rightarrow s = \frac{h}{\mu} - h \cdot \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow s = h \cdot \left( \frac{1}{\mu} - \operatorname{ctg} \alpha \right) = \\ &= 15 \text{ m} \cdot \left( \frac{1}{0.2} - \operatorname{ctg} 30^\circ \right) = 49.02 \text{ m}. \end{aligned}$$

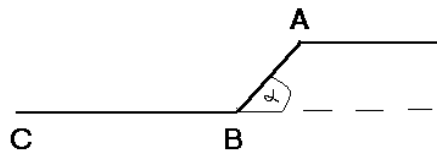
### Vježba 182

Koliki put će prevaliti saonice po horizontalnoj površini nakon što su se bez početne brzine spustile s brda visine 15 m i nagiba  $\alpha = 45^\circ$ ? Koeficijent trenja između saonice i podloge iznosi  $\mu = 0.2$ .

**Rezultat:** 50 m.

### Zadatak 183 (Gimnazijalka Martina, gimnazija)

Saonice se s vrha brijega počinju spuštati bez početne brzine kao na slici. Saonice krenu iz točke A, a zaustave se u točki C, pri čemu je  $AB = BC$ . Ako je koeficijent trenja između saonice i podloge  $\mu = 0.1$  i jednak je na putu ABC, izračunati kut nagiba brijega  $\alpha$ .



### Rješenje 183

$$AB = BC = s, \quad \mu = 0.1, \quad \alpha = ?$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

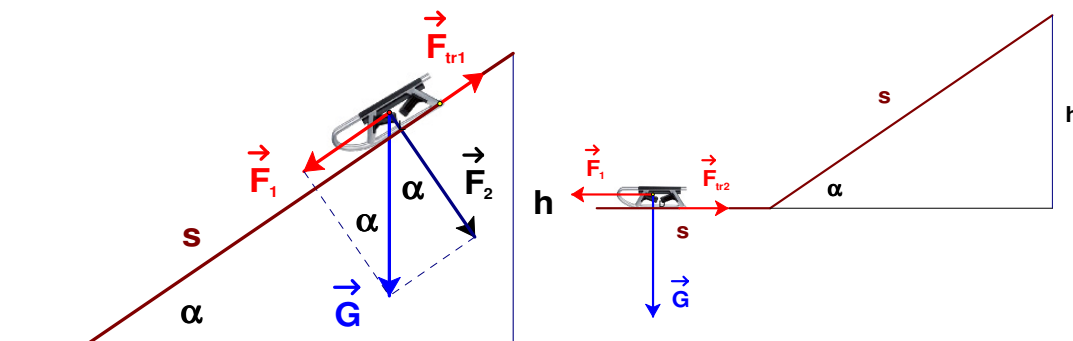
$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine  $G$  iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.



Sa slika vidi se da je:

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s \cdot \sin \alpha.$$

Na vrhu kosine saonice imaju gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow E_{gp} = m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha.$$

Tijekom gibanja saonica njihova gravitacijska potencijalna energija troši se na svladavanje sile trenja po kosini duljine  $s$  i horizontalnom dijelu puta duljine  $s$ .

Sila trenja na kosini je

$$F_{tr1} = \mu \cdot F_2 \Rightarrow F_{tr1} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha,$$

a na horizontalnom dijelu puta

$$F_{tr2} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr2} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Rad  $W_1$  utrošen na svladavanje trenja  $F_{tr1}$  na kosini duljine  $s$  iznosi:

$$W_1 = F_{tr1} \cdot s \Rightarrow W_1 = \mu \cdot F_2 \cdot s \Rightarrow W_1 = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s.$$

Rad  $W_2$  utrošen na svladavanje trenja  $F_{tr2}$  na horizontalnoj podlozi duljine  $s$  iznosi:

$$W_2 = F_{tr2} \cdot s \Rightarrow W_2 = \mu \cdot G \cdot s \Rightarrow W_2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s.$$

Budući da će se gravitacijska potencijalna energija saonice na visini  $h$  potrošiti na svladavanje trenja na kosini i horizontalnoj površini (zakon o očuvanju energije), slijedi:

$$E_{gp} = W_1 + W_2 \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot s \cdot \cos \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot s \cdot \cos \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot s \cdot \frac{1}{m \cdot g \cdot s} \Rightarrow \sin \alpha = \mu \cdot \cos \alpha + \mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \mu \cdot (1 + \cos \alpha) \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ 1 + \cos \alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \end{array} \right] \Rightarrow 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \mu \cdot 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \mu \cdot 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad /: 2 \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \mu \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \mu \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow$$

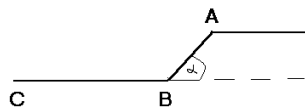
$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \left( \sin \frac{\alpha}{2} - \mu \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \\ \sin \frac{\alpha}{2} - \mu \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \\ \sin \frac{\alpha}{2} = \mu \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} = 90^\circ \\ \sin \frac{\alpha}{2} = \mu \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad /: \cos \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} = 90^\circ \quad /: 2 \\ \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \mu \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 180^\circ \text{ nema smisla} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \mu \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^{-1} \mu \quad /: 2 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot \operatorname{tg}^{-1} \mu = 2 \cdot \operatorname{tg}^{-1} 0.1 = 11^\circ 25'.$$

### Vježba 183

Saonice se s vrha brijega počinju spuštati bez početne brzine kao na slici. Saonice krenu iz točke A, a zaustave se u točki C, pri čemu je  $AB = BC$ . Ako je koeficijent trenja između saonica i podloge  $\mu = 0.2$  i jednak je na putu ABC, izračunati kut nagiba brijega  $\alpha$ .



**Rezultat:**  $11^\circ 19'$ .

### Zadatak 184 (Mily, medicinska škola)

Sa vrha kosine, visine  $h$ , počne klizati tijelo mase  $m$ . Kolika je njegova kinetička energija na vrhu kosine, na polovici puta i na kraju kosine? Trenje zanemarite.

### Rješenje 184

Za jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

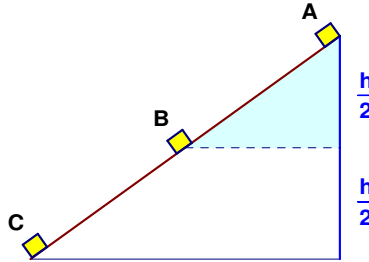
gdje je  $v$  brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ . Budući da je slobodan pad jednoliko ubrzano gibanje s akceleracijom  $g$ , vrijedi identičan izraz za brzinu

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $h$  visina.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$



Položaj A

Budući da tijelo miruje na vrhu kosine, kinetička energija je

$$E_k = 0.$$

Položaj B

Na polovici puta brzina gibanja tijela iznosi

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow v^2 = g \cdot h$$

pa je kinetička energija jednaka:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot h.$$

Položaj C

Na kraju puta (u podnožju kosine) brzina gibanja tijela iznosi

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

pa je kinetička energija jednaka:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow E_k = m \cdot g \cdot h.$$

### Vježba 184

Sa vrha kosine, visine  $h$ , počne klizati tijelo mase  $m$ . Kolika je njegova gravitacijska potencijalna energija na vrhu kosine, na polovici puta i na kraju kosine? Trenje zanemarite.

**Rezultat:**  $E_k = m \cdot g \cdot h$ ,  $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot h$ ,  $E_k = 0$ .

### Zadatak 185 (Tony, gimnazija)

Tijelo mase 20 kg bačeno je brzinom 12 m/s uz kosinu nagiba  $30^\circ$ . Ako je koeficijent trenja 0.29, odredi put zaustavljanja. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 185

$$m = 20 \text{ kg}, \quad v = 12 \text{ m/s}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \mu = 0.29, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Za jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je  $v$  brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ . Za jednoliko usporeno gibanje duž puta  $s$  vrijedi isti izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s.$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine  $G$  iznosi:

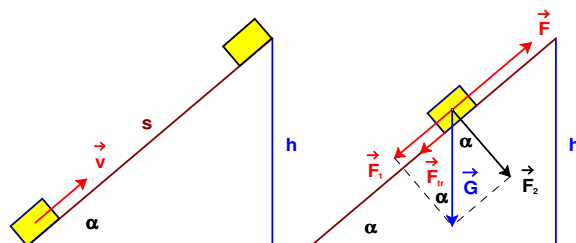
$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$



1. inačica

Sa slika vidi se da je:

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s \cdot \sin \alpha.$$

Tijelo je bačeno brzinom  $v$  uz kosinu pa je njegova kinetička energija jednaka

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U trenutku zaustavljanja na kosini kinetička energija tijela jednaka je nuli, ali je zbog zakona o očuvanju energije gravitacijska potencijalna energija maksimalna i iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} E_{gp} = m \cdot g \cdot h \\ h = s \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow E_{gp} = m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha.$$

Sila trenja na kosini je

$$\left. \begin{array}{l} F_{tr} = \mu \cdot F_2 \\ F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Rad  $W$  utrošen na svladavanje trenja  $F_{tr}$  na kosini duljine  $s$  iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} W = F_{tr} \cdot s \\ F_{tr} = \mu \cdot F_2 \end{array} \right\} \Rightarrow W = \mu \cdot F_2 \cdot s \Rightarrow W = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s.$$

Razlika između kinetičke energije  $E_k$  koju tijelo ima u trenutku bacanja uz kosinu i gravitacijske potencijalne energije  $E_{gp}$  u trenutku zaustavljanja troši se na rad  $W$  potreban za svladavanje sile trenja  $F_{tr}$ . Put zaustavljanja  $s$  iznosi:

$$\begin{aligned} E_k - E_{gp} = W &\Rightarrow E_k - E_{gp} = F_{tr} \cdot s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha &= \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s \quad / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 - 2 \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 &= 2 \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \mu \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot s \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 &= 2 \cdot g \cdot s \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)} = \\ &= \frac{\left(12 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (\sin 30^0 + 0.29 \cdot \cos 30^0)} = 9.77 \text{ m.} \end{aligned}$$

2. inačica

Sa slika vidi se da je:

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha,$$

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

Sila trenja na kosini je

$$F_{tr} = \mu \cdot F_2 \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Budući da se tijelo giba uz kosinu jednoliko usporeno, do zaustavljanja, prevaliti će put  $s$ :

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot a}$$

Pri gibanju uz kosinu tijelo mora svladati silu trenja  $F_{tr}$  i komponentu  $F_1$  sile teže  $G$  koja djeluje niz kosinu (usporedno s kosinom) pa ukupna sila  $F$  iznosi:

$$F = F_{tr} + F_1 \Rightarrow F = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot \sin \alpha \Rightarrow F = m \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Po drugom Newtonovom poučku ubrzanje  $a$  tijela mase  $m$  koje se giba uz kosinu pod djelovanjem sile  $F$  iznosi:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)}{m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)}{m} \Rightarrow a = g \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Put zaustavljanja  $s$  jednak je:

$$\left. \begin{aligned} a &= g \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \\ s &= \frac{v^2}{2 \cdot a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{\left(12 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (0.29 \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)} = 9.77 \text{ m}$$

### Vježba 185

Tijelo mase 20 kg bačeno je brzinom 15 m/s uz kosinu nagiba  $30^\circ$ . Ako je koeficijent trenja 0.29, odredi put zaustavljanja. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 15.27 m.

### Zadatak 186 (Martina, gimnazija)

Saonice se spuštaju jednoliko ubrzano niz brežuljak koji je nagnut pod kutom od  $30^\circ$ . Prešavši put od 3 metra saonice su postigle brzinu od 5 m/s. Izračunati koeficijent trenja između saonica i kosine ako su saonice u početnom trenutku bile u mirovanju. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 186

$$\alpha = 30^\circ, \quad s = 3 \text{ m}, \quad v = 5 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Tijelo obavlja rad  $W$  ako djeluje nekom silom  $F$  na putu  $s$  na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

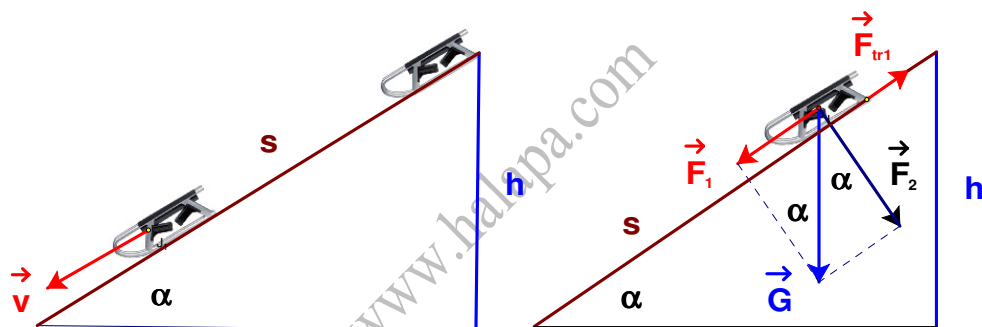
$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine  $G$  iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.



Sa slika vidi se da je:

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad , \quad \sin \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s \cdot \sin \alpha.$$

Na vrhu kosine saonice imaju gravitacijsku potencijalnu energiju

$$\left. \begin{array}{l} E_{gp} = m \cdot g \cdot h \\ h = s \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow E_{gp} = m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha.$$

Tijekom gibanja saonice njihova gravitacijska potencijalna energija troši se na svladavanje sile trenja  $F_{tr}$  na kosini duljine  $s$ .

$$\left. \begin{array}{l} F_{tr} = \mu \cdot F_2 \\ F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Rad  $W$  utrošen na svladavanje trenja  $F_{tr}$  na kosini duljine  $s$  iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} W = F_{tr} \cdot s \\ F_{tr} = \mu \cdot F_2 \end{array} \right\} \Rightarrow W = \mu \cdot F_2 \cdot s \Rightarrow W = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s.$$

Prešavši po kosini put  $s$  saonice su postigle brzinu  $v$  pa njihova kinetička energija iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Razlika između gravitacijske potencijalne energije  $E_{gp}$  koju saonice imaju na vrhu kosine i kinetičke energije  $E_k$  koju imaju nakon prevaljenog puta  $s$  troši se na rad  $W$  potreban za svladavanje sile trenja  $F_{tr}$ . Koeficijent trenja  $\mu$  iznosi:

$$\begin{aligned}
 E_{gp} - E_k &= W \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s \Rightarrow \\
 \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s \quad / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow 2 \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha - v^2 = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2 \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha - v^2 &= 2 \cdot \mu \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot g \cdot s \cdot \cos \alpha} \Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha - v^2}{2 \cdot g \cdot s \cdot \cos \alpha} = \\
 &= \frac{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 m \cdot \sin 30^\circ - \left(5 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 m \cdot \cos 30^\circ} = 0.087.
 \end{aligned}$$

### Vježba 186

Saonice se spuštaju jednoliko ubrzano niz brežuljak koji je nagnut pod kutom od  $30^\circ$ . Prešavši put od 3 metra saonice su postigle brzinu od 4 m/s. Izračunati koeficijent trenja između saonica i kosine ako su saonice u početnom trenutku bile u mirovanju. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.26.

### Zadatak 187 (Matija, srednja škola)

Tijelo mase 0.5 kg smješteno je na horizontalnom stolu i pričvršćeno za elastičnu oprugu kojoj je  $k = 50 \text{ N/m}$ . Opruga titra, pri čemu se najviše rastegne odnosno stegne 0.1 m i vuče tijelo za sobom. Trenje po stolu možemo zanemariti. Kolika je najveća brzina tijela?

### Rješenje 187

$$m = 0.5 \text{ kg}, \quad k = 50 \text{ N/m}, \quad x = 0.1 \text{ m}, \quad v = ?$$

Elastična opruga produžena za  $x$  ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

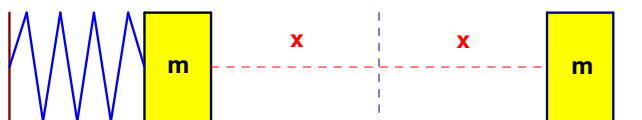
gdje je  $k$  konstanta opruge.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.



Zbog zakona o očuvanju energije elastična potencijalna energija opruge, kada se rastegne odnosno stegne za duljinu  $x$ , jednaka je maksimalnoj kinetičkoj energiji koju ima tijelo kada prolazi položajem ravnoteže.

$$E_{ep} = E_k \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot x^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k \cdot x^2}{m} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot x^2}{m}} \Rightarrow v = x \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.1 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{50 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0.5 \text{ kg}}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

### Vježba 187

Tijelo mase 0.5 kg smješteno je na horizontalnom stolu i pričvršćeno za elastičnu oprugu kojoj je  $k = 50 \text{ N/m}$ . Opruga titra, pri čemu se najviše rastezne odnosno stegne 0.2 m i vuče tijelo za sobom. Trenje po stolu možemo zanemariti. Kolika je najveća brzina tijela?

**Rezultat:** 2 m/s.

### Zadatak 188 (Maturant, gimnazija)

Tijelo je bačeno uvis početnom brzinom od 12 m/s. Do koje će visine tijelo doći ako putem izgubi 40% svoje energije na svladavanje otpora zraka? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 188

$$v = 12 \text{ m/s}, \quad p = 40\% = 0.40, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Budući da je početna brzina tijela  $v$ , njegova kinetička energija iznosi

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zbog otpora zraka tijelo izgubi 40% svoje energije što znači da je na visini  $h$  gravitacijska potencijalna energija jednaka 60% početne kinetičke energije.

$$\begin{aligned} E_{gp} &= (1-p) \cdot E_k \Rightarrow E_{gp} = (1-0.40) \cdot E_k \Rightarrow E_{gp} = 0.60 \cdot E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = 0.60 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot h = 0.30 \cdot m \cdot v^2 \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{0.30 \cdot v^2}{g} = \frac{0.30 \cdot \left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4.4 \text{ m}. \end{aligned}$$

### Vježba 188

Tijelo je bačeno uvis početnom brzinom od 15 m/s. Do koje će visine tijelo doći ako putem izgubi 40% svoje energije na svladavanje otpora zraka?

**Rezultat:** 6.9 m.

### Zadatak 189 (Ivana, gimnazija)

Kamen mase 4 kg bačen je vertikalno prema dolje s visine od 120 m početnom brzinom 10 m/s. Kolika je energija potrebna za svladavanje otpora zraka, ako kamen udari u zemlju brzinom 20 m/s? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 189

$$m = 4 \text{ kg}, \quad h = 120 \text{ m}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad v = 20 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E = ?$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

#### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Budući da je kamen mase  $m$  bačen vertikalno prema dolje s visine  $h$  početnom brzinom  $v_0$  njegova je ukupna energija jednaka zbroju gravitacijske potencijalne energiji  $E_{gp}$  i kinetičke energije  $E_{k0}$ .

$$E_{gp} + E_{k0}$$

Kada kamen udari u zemlju brzinom  $v$  ima energiju u obliku kinetičke energije

$$E_k.$$

Energija potrebna za svladavanje otpora zraka iznosi:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left( E_{gp} + E_{k0} \right) - E_k \Rightarrow \Delta E = E_{gp} + \left( E_{k0} - E_k \right) \Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot h + \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left( v_0^2 - v^2 \right) \Rightarrow \Delta E = m \cdot \left[ g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \left( v_0^2 - v^2 \right) \right] = \\ &= 4 \text{ kg} \cdot \left[ 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 120 \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left( 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) \right] = 4108.8 \text{ J}. \end{aligned}$$

#### Vježba 189

Kamen mase 8 kg bačen je vertikalno prema dolje s visine od 120 m početnom brzinom 10 m/s. Kolika je energija potrebna za svladavanje otpora zraka, ako kamen udari u zemlju brzinom 20 m/s? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 8217.6 J.

### Zadatak 190 (Lea, gimnazija)

U otvorena prazna kolica mase 800 kg, koja se gibaju horizontalno brzinom 1.5 m/s, padne okomito odozgo 600 kg šljunka. Kolika će biti brzina kolica napunjenih šljunkom?

#### Rješenje 190

$$m_1 = 800 \text{ kg}, \quad v_1 = 1.5 \text{ m/s}, \quad m_2 = 600 \text{ kg}, \quad v_2 = 0 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Ako je sudar središnji (kad svi vektori brzina leže na pravcu koji prolazi središtem masa obaju tijela), zakon održanja količina gibanja glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v + m_2 \cdot v \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2},$$

gdje je  $v$  zajednička brzina za oba tijela koja su se sudarila.

Brzina  $v$  kolica napunjenih šljunkom iznosi:

$$v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{800 \text{ kg} \cdot 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 600 \text{ kg} \cdot 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{800 \text{ kg} + 600 \text{ kg}} = 0.857 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



### Vježba 190

U otvorena prazna kolica mase 800 kg, koja se gibaju horizontalno brzinom 3 m/s, padne okomito odozgo 600 kg šljunka. Kolika će biti brzina kolica napunjenih šljunkom?

**Rezultat:** 1.714 m/s.

### Zadatak 191 (Josip, gimnazija)

Sila stalnog iznosa  $F = 1 \text{ N}$  daje tijelu ubrzanje  $a = 10 \text{ cm/s}^2$ . Ako je prije djelovanja sile tijelo mirovalo izračunati njegovu kinetičku energiju poslije vremena  $t = 5 \text{ s}$  od početka gibanja.

### Rješenje 191

$$F = 1 \text{ N}, \quad a = 10 \text{ cm/s}^2 = 0.1 \text{ m/s}^2, \quad t = 5 \text{ s}, \quad E_k = ?$$

Drugi Newtonov zakon: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je  $v$  brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela poslije vremena  $t$  iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ v = a \cdot t \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \frac{F}{a} \\ v = a \cdot t \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{a} \cdot (a \cdot t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{a} \cdot a^2 \cdot t^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{a} \cdot a^2 \cdot t^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot F \cdot a \cdot t^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ N} \cdot 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5 \text{ s})^2 = 1.25 \text{ J}.$$

### Vježba 191

Sila stalnog iznosa  $F = 2 \text{ N}$  daje tijelu ubrzanje  $a = 5 \text{ cm/s}^2$ . Ako je prije djelovanja sile tijelo mirovalo izračunati njegovu kinetičku energiju poslije vremena  $t = 5 \text{ s}$  od početka gibanja.

**Rezultat:** 1.25 J.

### Zadatak 192 (Marina, gimnazija)

Vagon mase 10 tona giba se brzinom 2 m/s. Njega sustiže vagon mase 15 tona brzinom 3 m/s. Kolika je brzina obaju vagona nakon sudara ako pretpostavimo da je sudar neelastičan?

### Rješenje 192

$$m_1 = 10 \text{ t}, \quad v_1 = 2 \text{ m/s}, \quad m_2 = 15 \text{ t}, \quad v_2 = 3 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'.$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Ako je sudar središnji (kad svi vektori brzina leže na pravcu koji prolazi središtem masa obaju tijela), zakon održanja količina gibanja glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v',$$

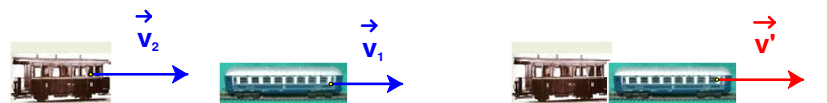
gdje je  $v'$  zajednička brzina za oba tijela koja su se sudarila.

Brzina oba vagona  $v'$  nakon sudara iznosi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v' \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{10 \text{ t} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 15 \text{ t} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ t} + 15 \text{ t}} = 2.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



### Vježba 192

Vagon mase 20 tona giba se brzinom 2 m/s. Njega sustiže vagon mase 30 tona brzinom 3 m/s. Kolika je brzina obaju vagona nakon sudara ako pretpostavimo da je sudar neelastičan?

**Rezultat:** 2.6 m/s.

### Zadatak 193 (Marina, gimnazija)

U kamion mase 20 tona, koji stoji na mjestu, udari i zabije se drugi natovareni kamion mase 30 tona. Natovareni je kamion imao prije sudara brzinu 1 m/s. Kolika je brzina nakon sudara ako se oba vozila nakon sudara gibaju zajedno?

### Rješenje 193

$$m_1 = 20 \text{ t}, \quad v_1 = 0 \text{ m/s}, \quad m_2 = 30 \text{ t}, \quad v_2 = 1 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2.$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Ako je sudar središnji (kad svi vektori brzina leže na pravcu koji prolazi središtem masa obaju tijela), zakon održanja količina gibanja glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v',$$

gdje je  $v'$  zajednička brzina za oba tijela koja su se sudarila.

Ako se oba vozila nakon sudara gibaju zajedno njihova brzina  $v'$  iznosi:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v' \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v' \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{20 \text{ t} \cdot 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 30 \text{ t} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \text{ t} + 30 \text{ t}} = 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$



### Vježba 193

U kamion mase 40 tona, koji stoji na mjestu, udari i zabije se drugi natovareni kamion mase 60 tona. Natovareni je kamion imao prije sudara brzinu 1 m/s. Kolika je brzina nakon sudara ako se oba vozila nakon sudara gibaju zajedno?

**Rezultat:** 0.6 m/s.

### Zadatak 194 (Marina, gimnazija)

Kada se proton sudari s neutronom te se dvije čestice mogu sjediniti u novu česticu - deuteron. Kojom će se brzinom gibati deuteron ako se proton gibao brzinom  $7.0 \cdot 10^6$  m/s udesno, a neutron brzinom  $3.0 \cdot 10^6$  m/s ulijevo, uz pretpostavku da zanemarimo defekt mase. (masa protona  $m_1 = 1.6726 \cdot 10^{-27}$  kg, masa neutrona  $m_2 = 1.675 \cdot 10^{-27}$  kg)

### Rješenje 194

$$v_1 = +7.0 \cdot 10^6 \text{ m/s udesno}, \quad m_1 = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad v_2 = -3.0 \cdot 10^6 \text{ m/s ulijevo}, \\ m_2 = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad v = ?$$

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$ , kojima su početne brzine bile  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v'_1$  i  $v'_2$ , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2.$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Ako je sudar središnji (kad svi vektori brzina leže na pravcu koji prolazi središtem masa obaju tijela), zakon održanja količina gibanja glasi:

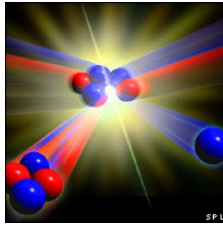
$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v',$$

gdje je  $v'$  zajednička brzina za oba tijela koja su se sudarila.

Brzina deuterona iznosi:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v' \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v' \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 7.0 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \left(-3.0 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = +1.996 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



### Vježba 194

Kada se proton sudari s neutronom te se dvije čestice mogu sjediniti u novu česticu - deuteron. Kojom će se brzinom gibati deuteron ako se proton gibao brzinom  $7.0 \cdot 10^3$  km/s udesno, a neutron brzinom  $3.0 \cdot 10^3$  km/s ulijevo, uz pretpostavku da zanemarimo defekt mase. (masa protona  $m_1 = 1.6726 \cdot 10^{-27}$  kg, masa neutrona  $m_2 = 1.675 \cdot 10^{-27}$  kg)

**Rezultat:**  $+1.996 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### Zadatak 195 (Tony, gimnazija)

Svemirski brod mase 8 t giba se kao umjetni Zemljin satelit prvom kozmičkom brzinom. Kolika je kinetička energija svemirskog broda? (polumjer Zemlje  $R = 6.37 \cdot 10^6$  m,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>)

### Rješenje 195

$$m = 8 \text{ t} = 8 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad E_k = ?$$

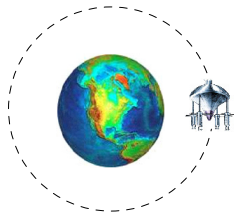
Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Prva kozmička brzina je brzina kružnog gibanja oko Zemlje u blizini njezine površine (zanemarimo li otpor zraka). Uvjet za to je da je centripetalna sila jednaka gravitacijskoj sili.

$$v_1 = \sqrt{R \cdot g}$$

gdje je  $R$  polumjer Zemlje,  $g$  ubrzanje sile teže.



Budući da se svemirski brod giba prvom kozmičkom brzinom, njegova kinetička energija iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v = v_1 \\ v_1 = \sqrt{R \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v = \sqrt{R \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\sqrt{R \cdot g})^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R \cdot g \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2.5 \cdot 10^{11} \text{ J}.$$

### Vježba 195

Svemirski brod mase 16 t giba se kao umjetni Zemljin satelit prvom kozmičkom brzinom. Kolika je kinetička energija svemirskog broda? (polumjer Zemlje  $R = 6.37 \cdot 10^6$  m,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>)

**Rezultat:**  $5 \cdot 10^{11} \text{ J}$ .

**Zadatak 196 (Tony, gimnazija)**

Koliku kinetičku energiju treba imati svemirski brod mase 20 t prilikom polaska sa Zemlje da bi se oslobodio utjecaja njezinog gravitacijskog polja? (polumjer Zemlje  $R = 6.37 \cdot 10^6$  m,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>)

**Rješenje 196**

$$m = 20 \text{ t} = 2 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad E_k = ?$$

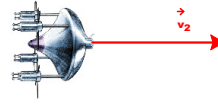
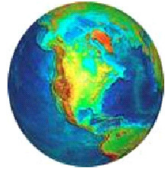
Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Druga kozmička brzina je najmanja brzina kojom tijelo mora biti bačeno uvis sa Zemljine površine u svemir u bilo kojem smjeru da zauvijek napusti Zemlju (zanemarimo li atmosfersko trenje).

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot R \cdot g},$$

gdje je  $R$  polumjer Zemlje,  $g$  ubrzanje sile teže.



Budući da se svemirski brod mora osloboditi utjecaja Zemljinog gravitacijskog polja, njegova brzina mora biti jednaka drugoj kozmičkoj brzini. Tada kinetička energija broda iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v = v_2 \\ v_2 = \sqrt{2 \cdot R \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v = \sqrt{2 \cdot R \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\sqrt{2 \cdot R \cdot g})^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot R \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot R \cdot g \Rightarrow E_k = m \cdot R \cdot g = 2 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1.25 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

**Vježba 196**

Koliku kinetičku energiju treba imati svemirski brod mase 40 t prilikom polaska sa Zemlje da bi se oslobodio utjecaja njezinog gravitacijskog polja? (polumjer Zemlje  $R = 6.37 \cdot 10^6$  m,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>)

**Rezultat:**  $2.5 \cdot 10^{12} \text{ J}.$

**Zadatak 197 (Goga, gimnazija)**

Tramvaj mase 15 t giba se stalnom brzinom 20 km/h uz kosinu nagiba 10°. Koliku korisnu snagu razvijaju motori pri ovom gibanju? ( $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>)

**Rješenje 197**

$$m = 15 \text{ t} = 15000 \text{ kg}, \quad v = 20 \text{ km/h} = [20 : 3.6] = 5.56 \text{ m/s}, \quad \alpha = 10^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad P_k = ?$$

**Prvi Newtonov poučak:**

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu.

Zato kažemo da je tijelo tromo. Mjera tromosti tijela je masa.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

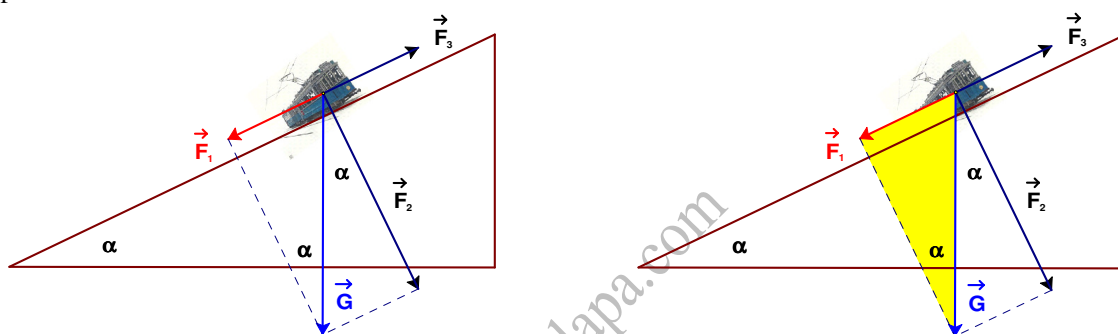
gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow P = F \cdot v.$$

Budući da se tramvaj giba stalnom brzinom, rezultantna sila na tramvaj jednaka je nuli. Zato vučna sila  $F_3$  motora tramvaja po iznosu mora biti jednaka sili  $F_1$ , komponenti sile teže koja je paralelna sa kosinom.



Uočimo pravokutan trokut čija je hipotenuza sila teža G, a jedna kateta sila  $F_1$ . Pomoću sinusa dobije se:

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{F_1}{G} \cdot G \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

Korisna snaga  $P_k$  koju razvijaju motori tramvaja pri gibanju iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} P_k = F_3 \cdot v \\ F_3 = F_1 \\ F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_k = F_1 \cdot v \\ F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow P_k = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot v \Rightarrow P_k = m \cdot g \cdot v \cdot \sin \alpha =$$

$$= 15000 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5.56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 10^\circ = 142070.95 \text{ W} \approx 142 \text{ kW}.$$

### Vježba 197

Tramvaj mase 30 t giba se stalnom brzinom 20 km/h uz padinu nagiba  $10^\circ$ . Koliku korisnu snagu razvijaju motori pri ovom gibanju? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 284141.90 W  $\approx$  284 kW.

### Zadatak 198 (Vedran, srednja škola)

Elastična se opruga stisne za 20 cm pod utjecajem sile od 20 N. Kolika je elastična potencijalna energija tako stisnute opruge?

### Rješenje 198

$$s = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad F = 20 \text{ N}, \quad E_{\text{ep}} = ?$$

Harmoničko titranje je gibanje tijela (titranje) pri kojemu je sila koja uzrokuje titranje razmjerna elongaciji.

$$F = -k \cdot s.$$

Elongacija je udaljenost tijela od položaja ravnoteže. Budući da se elongacija mjeri od položaja ravnoteže, sila ima uvijek smjer prema položaju ravnoteže, stoga se u izrazu nalazi predznak minus (-). Pri numeričkom izračunu može se uzeti

$$F = k \cdot s.$$

Elastična opruga produžena za  $s$  ima elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2,$$

gdje je  $k$  konstanta opruge.

1. inačica

Određimo konstantu opruge  $k$ .

$$F = k \cdot s \Rightarrow F = k \cdot s \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow k = \frac{F}{s} = \frac{20 \text{ N}}{0.2 \text{ m}} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Elastična potencijalna energija iznosi:

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0.2 \text{ m})^2 = 2 \text{ J}.$$

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} F = k \cdot s \\ E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = k \cdot s \cdot \frac{1}{s} \\ E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k = \frac{F}{s} \\ E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{s} \cdot s^2 \Rightarrow E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{s} \cdot s^2 \Rightarrow E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ N} \cdot 0.2 \text{ m} = 2 \text{ J}.$$

### Vježba 198

Elastična se opruga stisne za 40 cm pod utjecajem sile od 40 N. Kolika je elastična potencijalna energija tako stisnute opruge?

**Rezultat:** 8 J.

### Zadatak 199 (Kety, gimnazija)

Ljuljajući se na ljuljački Hana prođe kroz najnižu točku putanje brzinom 2 m/s. Trenje je zanemarivo. Kolika je visina  $s$  koje se Hana spustila, mjerena u odnosu na najnižu točku putanje? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 199

$$v = 2 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.

- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona očuvanja energije gravitacijska potencijalna energija koju Hana ima u najvišoj točki putanje (na visini  $h$ ) jednaka je kinetičkoj energiji u najnižoj točki putanje.

$$E_{gp} = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(2 \frac{m}{s}\right)^2}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 0.2 \text{ m.}$$



### Vježba 199

Ljuljajući se na ljuljački Hana prođe kroz najnižu točku putanje brzinom 4 m/s. Trenje je zanemarivo. Kolika je visina  $s$  koje se Hana spustila, mjerena u odnosu na najnižu točku putanje? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.82 m.

### Zadatak 200 (Rocky, gimnazija)

Kolica mase 0.4 kg gibaju se brzinom 2 m/s. Njima ususret gibaju se druga kolica mase 0.25 kg. Koliko treba iznositi brzina drugih kolica da nakon sudara oboja kolica miruju?

### Rješenje 200

$$m_1 = 0.4 \text{ kg}, \quad v_1 = 2 \text{ m/s}, \quad m_2 = 0.25 \text{ kg}, \quad v_2 = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

### Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Budući da nakon sudara oboja kolica miruju, zbog zakona sačuvanja količine gibanja zbroj njihovih količina gibanja prije sudara mora biti jednak nuli. Brzina drugih kolica prije sudara iznosi:

$$p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = -p_1 \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 \quad /: m_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = -\frac{m_1 \cdot v_1}{m_2} = -\frac{0.4 \text{ kg} \cdot 2 \frac{m}{s}}{0.25 \text{ kg}} = -3.2 \frac{m}{s}.$$



**Vježba 200**

Kolica mase 0.8 kg gibaju se brzinom 2 m/s. Njima ususret gibaju se druga kolica mase 0.5 kg. Koliko treba iznositi brzina drugih kolica da nakon sudara oboja kolica miruju?

**Rezultat:** – 3.2 m/s.

[www.halapa.com](http://www.halapa.com)