

Zadatak 161 (Matea, gimnazija)

Sila 2 N djelovala je na tijelo 4 sekunde i dala mu energiju 6.4 J. Kolika je masa tijela?

Rješenje 161

$$F = 2 \text{ N}, \quad t = 4 \text{ s}, \quad E_k = 6.4 \text{ J}, \quad m = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v = a \cdot t$$

gdje su s i v put odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

1. inačica

Budući da je promjena energije jednaka utrošenom radu, slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} E_k = W \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = F \cdot s \Rightarrow E_k = F \cdot s / \frac{1}{F} \Rightarrow s = \frac{E_k}{F}.$$

Uporabom formule za put pri jednoliko ubrzanom pravocrtном gibanju dobije se akceleracija:

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{E_k}{F} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{E_k}{F} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{E_k}{F} / \frac{2}{t^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot E_k}{F \cdot t^2}.$$

Masu tijela izračunamo pomoću drugog Newtonova poučka:

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{F}{m} \\ a = \frac{2 \cdot E_k}{F \cdot t^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{F}{m} = \frac{2 \cdot E_k}{F \cdot t^2} \Rightarrow \frac{m}{F} = \frac{F \cdot t^2}{2 \cdot E_k} \Rightarrow \frac{m}{F} = \frac{F \cdot t^2}{2 \cdot E_k} / F \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m = \frac{F^2 \cdot t^2}{2 \cdot E_k} \Rightarrow m = \frac{(F \cdot t)^2}{2 \cdot E_k} = \frac{(2 \text{ N} \cdot 4 \text{ s})^2}{2 \cdot 6.4 \text{ J}} = 5 \text{ kg}.$$

2. inačica

Iz formule za kinetičku energiju uz uporabu drugog Newtonova poučka i izraza za brzinu pri jednoliko ubrzanom pravocrtном gibanju izračuna se masa:

$$\left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ a = \frac{F}{m}, \quad v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v = \frac{F}{m} \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{F \cdot t}{m} \right)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{F^2}{m^2} \cdot t^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{F^2}{m^2} \cdot t^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{m} \cdot t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_k = \frac{F^2 \cdot t^2}{2 \cdot m} \Rightarrow E_k = \frac{(F \cdot t)^2}{2 \cdot m} \Rightarrow E_k = \frac{(F \cdot t)^2}{2 \cdot m} \cdot \frac{m}{E_k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m = \frac{(F \cdot t)^2}{2 \cdot E_k} = \frac{(2 \text{ N} \cdot 4 \text{ s})^2}{2 \cdot 6.4 \text{ J}} = 5 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Vježba 161

Sila 4 N djelovala je na tijelo 2 sekunde i dala mu energiju 6.4 J. Kolika je masa tijela?

Rezultat: 5 kg.

Zadatak 162 (Mario, tehnička škola)

Vlak mase 10^6 kg uspinje se stalnom brzinom 30 km/h po strmini koja se na svaki kilometar diže za 10 m. Odredi snagu lokomotive ako je koeficijent trenja 0.002. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 162

$$m = 10^6 \text{ kg}, \quad v = 30 \text{ km/h} = [30 : 3.6] = 8.33 \text{ m/s}, \quad s = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}, \quad h = 10 \text{ m}, \\ \mu = 0.002, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad P = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo stalnom, konstantnom brzinom v za vrijeme t .

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow P = \frac{F \cdot s}{t} \Rightarrow P = F \cdot \frac{s}{t} \Rightarrow P = F \cdot v.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

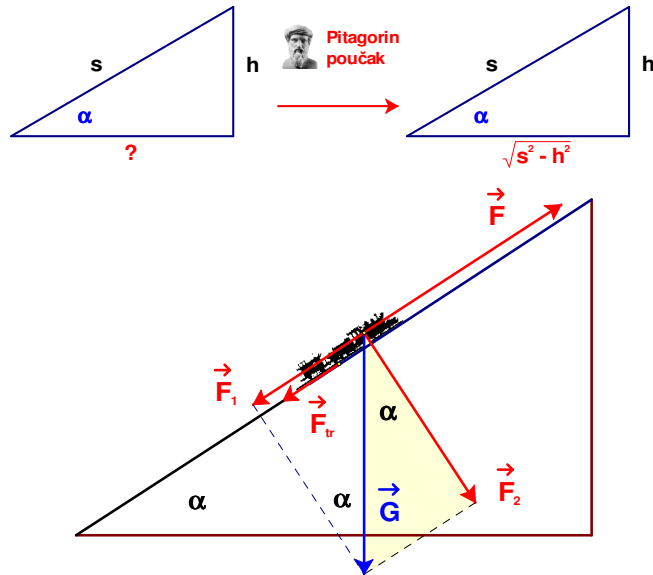
gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

1. inačica

Sa slika vidi se:

$$\sin \alpha = \frac{h}{s}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s}.$$



1. inačica

Sila F_1 je komponenta sile teže G koja vlak ubrzava niz kosinu, a ima vrijednost (gledaj gornju sliku):

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{F_1}{G} \cdot G \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha \Rightarrow \left[\sin \alpha = \frac{h}{s} \right] \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \frac{h}{s}$$

Sila F_2 je komponenta sile teže G kojom vlak pritišće kosinu, a iznosi (gledaj gornju sliku):

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{F_2}{G} \cdot G \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha \Rightarrow \left[\cos \alpha = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s}$$

Trenje F_{tr} jednako je umnošku faktora trenja μ i sile F_2 koja djeluje okomito na kosinu pa vrijedi:

$$F_{tr} = \mu \cdot F_2 \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s}$$

Budući da se vlak giba jednoliko uz kosinu, vučna sila F po iznosu jednaka je zbroju sila F_1 i F_{tr} :

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = m \cdot g \cdot \frac{h}{s}, \quad F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s} \\ F = F_1 + F_{tr} \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot g \cdot \frac{h}{s} + \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s} \Rightarrow$$

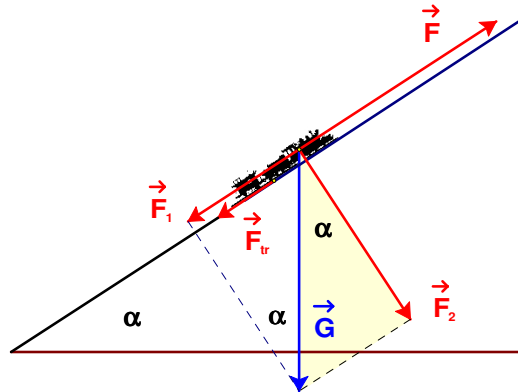
$$\Rightarrow F = m \cdot g \cdot \left[\frac{h}{s} + \mu \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s} \right]$$

Snaga lokomotive iznosi:

$$P = F \cdot v \Rightarrow P = m \cdot g \cdot \left[\frac{h}{s} + \mu \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s} \right] \cdot v =$$

$$= 10^6 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left[\frac{10 \text{ m}}{1000 \text{ m}} + 0.002 \cdot \frac{\sqrt{(1000 \text{ m})^2 - (10 \text{ m})^2}}{1000 \text{ m}} \right] \cdot 8.33 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 999591.67 \approx 10^6 \text{ W}.$$

2. inačica



Sila F_2 je komponenta sile teže G kojom vlak pritišće kosinu, a iznosi (gledaj gornju sliku):

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{F_2}{G} / \cdot G \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha \Rightarrow \left[\cos \alpha = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s}.$$

Trenje F_{tr} jednako je umnošku faktora trenja μ i sile F_2 koja djeluje okomito na kosinu pa vrijedi:

$$F_{tr} = \mu \cdot F_2 \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s}.$$

Kinetička energija lokomotive troši se na svladavanje trenja na putu s . Promjena kinetičke energije jednaka je utrošenom radu pa slijedi:

$$W_{tr} = F_{tr} \cdot s \Rightarrow W_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s} \cdot s \Rightarrow W_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s} \cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{s^2 - h^2}.$$

Promjena gravitacijske potencijalne energije također je jednaka utrošenom radu pa vrijedi:

$$W_{gp} = m \cdot g \cdot h.$$

Ukupan rad W utrošen prilikom gibanja vlaka uz kosinu, visine h , na putu s iznosi:

$$W = W_{tr} + W_{gp} \Rightarrow W = \mu \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{s^2 - h^2} + m \cdot g \cdot h \Rightarrow W = m \cdot g \cdot \left[\mu \cdot \sqrt{s^2 - h^2} + h \right].$$

Budući da se vlak giba na putu s jednolikom, konstantnom brzinom v , vrijeme gibanja je

$$t = \frac{s}{v}.$$

Snaga lokomotive iznosi:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot g \cdot \left[\mu \cdot \sqrt{s^2 - h^2} + h \right]}{\frac{s}{v}} \Rightarrow P = \frac{m \cdot g \cdot \left[\mu \cdot \sqrt{s^2 - h^2} + h \right] \cdot v}{s} =$$

$$= \frac{10^6 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left[0.002 \cdot \sqrt{(1000 \text{ m})^2 - (10 \text{ m})^2} + 10 \text{ m} \right] \cdot 8.33 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1000 \text{ m}} = 999591.67 \approx 10^6 \text{ W}.$$

Vježba 162

Vlak mase 10^6 kg uspinje se stalnom brzinom 60 km/h po strmini koja se na svaki kilometar diže za 10 m . Odredi snagu lokomotive ako je koeficijent trenja 0.002 . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $2 \cdot 10^6 \text{ W}$.

Zadatak 163 (Kate, srednja škola)

Dizalicu pokreće motor snage 7.36 kW . Koliku masu ima tijelo koje podiže ta dizalica brzinom 6 m/min ako je korisnost dizalice 80% ? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 163

$$P_u = 7.36 \text{ kW} = 7360 \text{ W}, \quad v = 6 \text{ m/min} = [6 : 60] = 0.1 \text{ m/s}, \quad \eta = 80\% = 0.80, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad m = ?$$

Omjer između energije koju iskorišćujemo od nekoga stroja i ukupne energije koju ulažemo u stroj zovemo korisnost stroja η . Često je izražavamo u postocima.

$$\eta = \frac{\text{iskorišteni rad}}{\text{utrošeni rad}}, \quad \eta = \frac{W_i}{W_u} \quad \text{ili} \quad \eta = \frac{\text{iskorištena snaga}}{\text{utrošena snaga}}, \quad \eta = \frac{P_i}{P_u}.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g.$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow P = \frac{F \cdot s}{t} \Rightarrow P = F \cdot \frac{s}{t} \Rightarrow P = F \cdot v.$$

Budući da dizalica podiže tijelo stalnom brzinom, njezina vučna sila F po iznosu jednaka je težini tijela G .



$$\left. \begin{array}{l} F = G \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot g.$$

Snaga P_i koju dizalica iskorišćuje je

$$P_i = F \cdot v \Rightarrow P_i = m \cdot g \cdot v$$

pa masa tijela iznosi:

$$\eta = \frac{P_i}{P_u} \Rightarrow \eta = \frac{P_i}{P_u} / \cdot P_u \Rightarrow P_i = \eta \cdot P_u \Rightarrow m \cdot g \cdot v = \eta \cdot P_u \Rightarrow m \cdot g \cdot v = \eta \cdot P_u / \cdot \frac{1}{g \cdot v} \Rightarrow \\ \Rightarrow m = \frac{\eta \cdot P_u}{g \cdot v} \Rightarrow m = \frac{0.80 \cdot 7360 \text{ W}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 6002.04 \text{ kg} \approx 6 \text{ t}.$$

Vježba 163

Dizalicu pokreće motor snage 7.36 kW . Koliku masu ima tijelo koje podiže ta dizalica brzinom 3 m/min ako je korisnost dizalice 80% ? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 12 t .

Zadatak 164 (Željko, gimnazija)

Tramvaj mase 18 tona postigne 2 sekunde nakon početka gibanja brzinu 10.8 km/h. Odredi srednju vrijednost snage koju je morao razviti motor tramvaja za vrijeme gibanja?

Rješenje 164

$$m = 18 \text{ t} = 18000 \text{ kg}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad v = 10.8 \text{ km/h} = [10.8 : 3.6] = 3 \text{ m/s}, \quad P = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = a \cdot t, \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

gdje su v i s brzina odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Ako na tijelo mase m djeluje stalna sila F u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju a koja je razmjerna (proporcionalna) sili, a obrnuto razmjerna (proporcionalna) masi tijela te ima isti smjer kao i sila (drugi Newtonov poučak):

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

1. inačica

Budući da se tramvaj giba jednoliko ubrzano, za put s vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} v = a \cdot t \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{v}{t} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t} \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t} \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t.$$

Utrošeni rad W motora tramvaja za vrijeme gibanja t na putu s iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} W = F \cdot s \\ F = m \cdot a \\ s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow W = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow \left[a = \frac{v}{t} \right] \Rightarrow W = m \cdot \frac{v}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow \\ \Rightarrow W = m \cdot \frac{v}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Srednja vrijednost snage koju mora razviti motor tramvaja za vrijeme gibanja ima vrijednost:



$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot t} = \frac{18000 \text{ kg} \cdot \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 2 \text{ s}} = 40500 \text{ W} = 40.5 \text{ kW}.$$

2. inačica

Utrošeni rad motora tramvaja za vrijeme gibanja jednak je promjeni kinetičke energije tramvaja.

$$\left. \begin{array}{l} W = E_k \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Srednja vrijednost snage koju mora razviti motor tramvaja za vrijeme gibanja ima vrijednost:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{t} \Rightarrow P = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot t} = \frac{18000 \text{ kg} \cdot \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 2 \text{ s}} = 40500 \text{ W} = 40.5 \text{ kW}.$$

Vježba 164

Tramvaj mase 36 tona postigne 4 sekunde nakon početka gibanja brzinu 10.8 km/h. Odredi srednju vrijednost snage koju je morao razviti motor tramvaja za vrijeme gibanja?

Rezultat: 40.5 kW.

Zadatak 165 (Vedran, gimnazija)

Kamion mase 3 t vozi brzinom 45 km/h. Kolika mora biti sila kočenja da se kamion zaustavi na 50 m udaljenosti?

Rješenje 165

$$m = 3 \text{ t} = 3000 \text{ kg}, \quad v = 45 \text{ km/h} = [45 : 3.6] = 12.5 \text{ m/s}, \quad s = 50 \text{ m}, \quad F = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Promjena kinetičke energije kamiona jednaka je utrošenom radu koji obavi kamion kad silom kočenja F djeluje na putu s . Zato vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ W = F \cdot s \\ W = E_k \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ F \cdot s = E_k \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad / \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow F = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot s} = \frac{3000 \text{ kg} \cdot \left(12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 50 \text{ m}} = 4687.5 \text{ N}.$$

Vježba 165

Kamion mase 6 t vozi brzinom 45 km/h. Kolika mora biti sila kočenja da se kamion zaustavi na 100 m udaljenosti?

Rezultat: 4687.5 N.

Zadatak 166 (Tina, gimnazija)

Stalnom silom F podižemo uteg mase 4 kg do visine 1 m. Pritom utrošimo rad 80 J. Kolikim smo ubrzanjem podizali uteg? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 166

$$F = \text{const.}, \quad m = 4 \text{ kg}, \quad h = 1 \text{ m}, \quad W = 80 \text{ J}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Drugi Newtonov zakon: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Rad utrošen na podizanje utega na visinu h stalnom silom F definiran je izrazom:

$$W = F \cdot h \Rightarrow F = \frac{W}{h}.$$

Rezultantna sila kojom tijelo podižemo uvis jednaka je zbroju stalne sile F i težine tijela G . Prema drugom Newtonovom poučku ona iznosi:

$$m \cdot a = F + G \Rightarrow m \cdot a = \frac{W}{h} + m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow a = \frac{W}{m \cdot h} + g = \frac{80 \text{ J}}{4 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}} + 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 166

Stalnom silom F podižemo uteg mase 8 kg do visine 1 m . Pritom utrošimo rad 160 J . Kolikom ubrzanjem podizali uteg? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 30 m/s^2 .

Zadatak 167 (Tina, gimnazija)

Na horizontalnoj podlozi gurnemo tijelo brzinom 3 m/s . Faktor trenja između tijela i podloge iznosi 0.4 . Odredi put što ga tijelo prevali prije nego što se zaustavi. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 167

$$v = 3 \text{ m/s}, \quad \mu = 0.4, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Sila trenja (klizanja) definira se kao umnožak koeficijenta trenja μ (klizanja) i pritisne sile F_N okomito (ili normalno) na podlogu.

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N.$$

Ako je podloga horizontalna, tada je:

$$F_{tr} = \mu \cdot G = \mu \cdot m \cdot g.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su v i s brzina odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

1. inačica

Kinetička energija E_k tijela troši se na svladavanje trenja F_{tr} na putu s pa slijedi:

$$\begin{aligned} E_k = W_{tr} &\Rightarrow E_k = F_{tr} \cdot s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s \quad / : \frac{1}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \\ &= \frac{\left(3 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0.4 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 1.15 \text{ m.} \end{aligned}$$

2. inačica

Sila F koja tijelo usporava jest sila trenja F_{tr} između tijela i podloge. Prema drugom Newtonovom poučku slijedi:

$$\begin{aligned} F = F_{tr} &\Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot G \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \quad / : m \Rightarrow a = \mu \cdot g \Rightarrow \left[v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{2 \cdot s} = \mu \cdot g \Rightarrow \frac{v^2}{2 \cdot s} = \mu \cdot g \quad / : \mu \cdot g \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(3 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0.4 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 1.15 \text{ m.} \end{aligned}$$

Vježba 167

Na horizontalnoj podlozi gurnemo tijelo brzinom 3 m/s. Faktor trenja između tijela i podloge iznosi 0.2. Odredi put što ga tijelo prevali prije nego što se zaustavi. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 2.29 m.

Zadatak 168 (Marko, srednja škola)

Automobil mase 1 t može se kočnicama zadržati sve do uspona od 24%. Na kojoj će se udaljenosti zaustaviti pomoću kočnica vozeći po horizontalnom putu brzinom 64.8 km/h? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 168

$$m = 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}, \quad n = 24\% = 0.24, \quad v = 64.8 \text{ km/h} = [64.8 : 3.6] = 18 \text{ m/s}, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

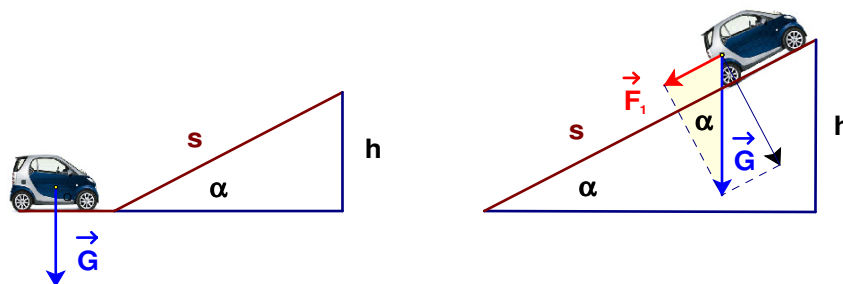
Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$



Uspón od 24% znači da se na svakih 100 m duljine puta nadmorska visina poveća za 24 m. Iz podataka za kosinu (pravokutan trokut s katetom h i hipotenuzom s) dobije se:

$$n = 0.24 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = 100 \text{ m} \\ h = 24 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\sin \alpha = \frac{h}{s} \right] \Rightarrow \sin \alpha = \frac{24}{100} \Rightarrow \sin \alpha = 0.24.$$

Sa slike vidi se da je F_1 sila kočenja koju možemo izračunati pomoću funkcije sinus (uočimo pravokutan trokut s katetom F_1 i hipotenuzom G).

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

Promjena kinetičke energije E_k automobila jednaka je utrošenom radu W sile F_1 na putu s pa slijedi:

$$\begin{aligned} E_k = W &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = F_1 \cdot s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot s \cdot \frac{1}{m \cdot g \cdot \sin \alpha} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot \sin \alpha} = \\ &= \frac{\left(18 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.24} = 68.81 \text{ m}. \end{aligned}$$

Vježba 168

Automobil mase 2 t može se kočnicama zadržati sve do uspona od 24%. Na kojoj će se udaljenosti zaustaviti pomoću kočnica vozeći po horizontalnom putu brzinom 64.8 km/h? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 68.81 m.

Zadatak 169 (Marko, srednja škola)

Čekićem mase 4 kg zabijamo čavao u drvenu podlogu. U času kad čekić udari o čavao, čekić ima brzinu 500 cm/s, a čavao pritom zađe u drvo 30 mm duboko. Kolikom srednjom silom udari čekić o čavao i koliko dugo traje djelovanje te sile?

Rješenje 169

$$m = 4 \text{ kg}, \quad v = 500 \text{ cm/s} = 5 \text{ m/s}, \quad s = 30 \text{ mm} = 0.030 \text{ m}, \quad F = ?, \quad t = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t, \quad v = a \cdot t,$$

gdje su s i v put odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Ako je početna brzina nula, za tijelo mase m na koje je za vrijeme t djelovala sila F vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je v brzina na kraju vremenskog intervala t za koji je sila djelovala. Umnožak

$$I = F \cdot t$$

zovemo impulsom sile F , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase m .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Srednja sila F kojom čekić udari u čavao iznosi:

$$E_k = W \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = F \cdot s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = F \cdot s \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow F = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot s} = \frac{4 \text{ kg} \cdot \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.03 \text{ m}} = 1666.67 \text{ N}.$$



Vrijeme t za koje je djelovala sila F iznosi:

1. inačica

Iz formule za put pri jednoliko ubrzanom gibanju dobije se vrijeme:

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \cdot \frac{2}{v} \Rightarrow t = \frac{2 \cdot s}{v} = \frac{2 \cdot 0.03 \text{ m}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0.012 \text{ s}.$$

2. inačica

Uporabom izraza za impuls sile i količinu gibanja slijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v \Rightarrow t = \frac{m \cdot v}{F} = \frac{4 \text{ kg} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1666.67 \text{ N}} = 0.012 \text{ s}.$$

3. inačica

Koristeći drugi Newtonov poučak mehanike i formulu za brzinu pri jednoliko ubrzanom gibanju dobije se vrijeme:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ a = \frac{v}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow F = m \cdot \frac{v}{t} \cdot \frac{t}{F} \Rightarrow t = \frac{m \cdot v}{F} = \frac{4 \text{ kg} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1666.67 \text{ N}} = 0.012 \text{ s}.$$

Vježba 169

Čekićem mase 8 kg zabijamo čavao u drvenu podlogu. U času kad čekić udari o čavao, čekić ima brzinu 500 cm/s, a čavao pritom zađe u drvo 60 mm duboko. Kolikom srednjom silom udari čekić o čavao?

Rezultat: 1666.67 N.

Zadatak 170 (Kristina, gimnazija)

Tijelo slobodno pada s visine h . U točki A ima brzinu $v_A = 29.43 \text{ m/s}$, a u točki B brzinu $v_B = 49.05 \text{ m/s}$. Kolika je visinska razlika točaka A i B? Za koje će vrijeme tijelo prijeći put AB? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

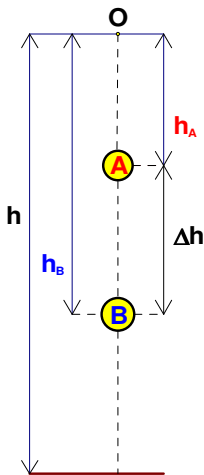
Rješenje 170

$$h, \quad v_A = 29.43 \text{ m/s}, \quad v_B = 49.05 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta h = ?, \quad \Delta t = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v = g \cdot t, \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

gdje su v brzina pada, h visina pada.



Odredimo vremena za koje će tijelo najprije doći u točku A, a zatim u točku B:

- vrijeme za koje tijelo dođe u točku A

$$v_A = g \cdot t_A \Rightarrow t_A = \frac{v_A}{g}.$$

- vrijeme za koje tijelo dođe u točku B

$$v_B = g \cdot t_B \Rightarrow t_B = \frac{v_B}{g}.$$

Vrijeme za koje tijelo prijeđe put od točke A do točke B jednako je razlici vremena t_B i t_A :

$$\Delta t = t_B - t_A \Rightarrow \Delta t = \frac{v_B}{g} - \frac{v_A}{g} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_B - v_A}{g} = \frac{49.05 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 29.43 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2 \text{ s}.$$

1. inačica

Da bismo izračunali visinsku razliku točaka A i B najprije odredimo udaljenosti od početne točke do točaka A i B:

- udaljenost od početne točke do točke A

$$h_A = \frac{1}{2} g \cdot t_A^2.$$

- udaljenost od početne točke do točke B

$$h_B = \frac{1}{2} g \cdot t_B^2.$$

Visinska razlika točaka A i B (duljina puta AB) jednaka je razlici udaljenosti h_B i h_A :

$$\begin{aligned} \Delta h &= h_B - h_A \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_B^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_A^2 \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_B^2 - t_A^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\left(\frac{v_B}{g} \right)^2 - \left(\frac{v_A}{g} \right)^2 \right) \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_B^2}{g^2} - \frac{v_A^2}{g^2} \right) \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{g^2} \cdot (v_B^2 - v_A^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{g^2} \cdot (v_B^2 - v_A^2) \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot (v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \left(\left(49.05 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(29.43 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = 78.48 \text{ m}. \end{aligned}$$

2. inačica

Da bismo izračunali visinsku razliku točaka A i B najprije odredimo udaljenosti od početne točke do točaka A i B:

- udaljenost od početne točke do točke A

$$h_A = \frac{v_A^2}{2 \cdot g}$$

- udaljenost od početne točke do točke B

$$h_B = \frac{v_B^2}{2 \cdot g}$$

Visinska razlika točaka A i B (duljina puta AB) jednaka je razlici udaljenosti h_B i h_A :

$$\begin{aligned} \Delta h = h_B - h_A &\Rightarrow \Delta h = \frac{v_B^2}{2 \cdot g} - \frac{v_A^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot (v_B^2 - v_A^2) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} \cdot \left(\left(49.05 \frac{m}{s} \right)^2 - \left(29.43 \frac{m}{s} \right)^2 \right) = 78.48 \text{ m.} \end{aligned}$$

Vježba 170

Tijelo slobodno pada s visine h . U točki A ima brzinu $v_A = 58.86 \text{ m/s}$, a u točki B brzinu $v_B = 98.10 \text{ m/s}$. Za koje će vrijeme tijelo prijeći put AB? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 4 s.

Zadatak 171 (Nino, gimnazija)

Tijelo mase m_1 udara u tijelo mase m_2 koje miruje. Odrediti koliki treba biti odnos masa ovih tijela (m_1/m_2) da bi se pri centralnom elastičnom sudaru brzina prvog tijela smanjila tri puta?

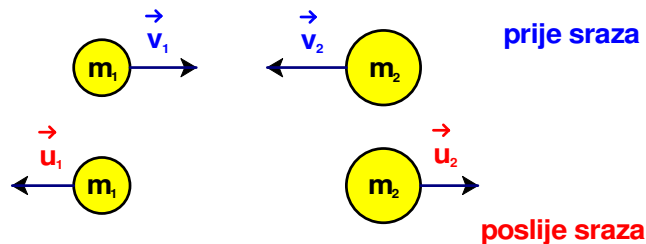
Rješenje 171

$$m_1, \quad m_2, \quad v_1, \quad v_2 = 0 \text{ m/s}, \quad u_1 = \frac{1}{3} \cdot v_1, \quad \frac{m_1}{m_2} = ?$$

Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Centralni elastični sraz (sudar)



Centralni sraz je sraz kod kojega se tijela gibaju po spojnici njihovih središta. Centralni sraz dva tijela nastaje:

- 1) ako se tijela gibaju jedno prema drugom
- 2) ako sustižu jedno drugo.

Kod elastičnog sraza ne mijenja se ukupna kinetička energija tijela prije i poslije sraza. Jednadžbe koje određuju gibanje tijela poslije sraza glase:

- $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$ (zakon o sačuvanju količine gibanja),
- $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$ (zakon o sačuvanju kinetičke energije).

gdje su m_1, m_2 mase prvog i drugog tijela; v_1, v_2 brzine prvog i drugog tijela prije sraza; u_1, u_2 brzine prvog i drugog tijela poslije sraza.

Iz zakona o sačuvanju mehaničke energije i količine gibanja primijenjenih na savršeno elastičan sraz tijela masa m_1 , m_2 i brzina v_1 , v_2 slijede brzine tijela nakon sraza:

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Budući da tijelo mase m_1 udara u tijelo mase m_2 koje miruje, zbog očuvanja količine gibanja slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \\ v_2 = 0 \frac{m}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2,$$

gdje su v_1 brzina tijela mase m_1 prije sudara, u_1 brzina tijela mase m_1 poslije sudara, u_2 brzina tijela mase m_2 poslije sudara.

Zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \\ u_1 = \frac{1}{3} \cdot v_1 \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot v_1 + m_2 \cdot u_2 \quad / \cdot 3 \Rightarrow 3 \cdot m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v_1 + 3 \cdot m_2 \cdot u_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_1 = 3 \cdot m_2 \cdot u_2 \Rightarrow 2 \cdot m_1 \cdot v_1 = 3 \cdot m_2 \cdot u_2 \quad / \cdot \frac{1}{3 \cdot m_2} \Rightarrow u_2 = \frac{2 \cdot m_1}{3 \cdot m_2} \cdot v_1.$$

Iz zakona o očuvanju ukupne energije dobije se traženi odnos masa:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 \\ v_2 = 0 \frac{m}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvrštavamo izraze za } u_1 \text{ i } u_2 \\ u_1 = \frac{1}{3} \cdot v_1, u_2 = \frac{2 \cdot m_1}{3 \cdot m_2} \cdot v_1 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot v_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{2 \cdot m_1}{3 \cdot m_2} \cdot v_1 \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{4 \cdot m_1^2}{9 \cdot m_2^2} \cdot v_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{18} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{2 \cdot m_1^2}{9 \cdot m_2} \cdot v_1^2 \quad / \cdot \frac{18}{v_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot m_1 = m_1 + \frac{4m_1^2}{m_2} \Rightarrow 9 \cdot m_1 - m_1 = \frac{4m_1^2}{m_2} \Rightarrow 8 \cdot m_1 = \frac{4m_1^2}{m_2} \quad / \cdot \frac{1}{4 \cdot m_1} \Rightarrow 2 = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2.$$

Vježba 171

Tijelo mase m_1 udara u tijelo mase m_2 koje miruje. Odrediti koliki treba biti odnos masa ovih tijela (m_2/m_1) da bi se pri centralnom elastičnom sudaru brzina prvog tijela smanjila tri puta?

Rezultat: 0.5.

Zadatak 172 (Ana, gimnazija)

Sila stalnog intenziteta $F = 1 \text{ N}$ daje tijelu ubrzanje $a = 10 \text{ cm/s}^2$. Ako je prije djelovanja sile tijelo mirovalo izračunati njegovu kinetičku energiju poslije vremena $t = 5 \text{ s}$ od početka gibanja.

Rješenje 172

$$F = 1 \text{ N}, \quad a = 10 \text{ cm/s}^2 = 0.1 \text{ m/s}^2, \quad t = 5 \text{ s}, \quad E_k = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow m = \frac{F}{a}.$$

Kinetička energija tijela, mase m i brzine v , poslije vremena t iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{F}{a}, \quad v = a \cdot t \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{a} \cdot (a \cdot t)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{a} \cdot a^2 \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{a} \cdot a^2 \cdot t^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot F \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ N} \cdot 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5 \text{ s})^2 = 1.25 \text{ J}.$$

Vježba 172

Sila stalnog intenziteta $F = 2 \text{ N}$ daje tijelu ubrzanje $a = 5 \text{ cm/s}^2$. Ako je prije djelovanja sile tijelo mirovalo izračunati njegovu kinetičku energiju poslije vremena $t = 5 \text{ s}$ od početka gibanja.

Rezultat: 1.25 J.

Zadatak 173 (Dunja, gimnazija)

Vlak ubrzava iz stanja mirovanja iz točke A. U točki B postigne brzinu 10 m/s, a u točki C brzinu 15 m/s. Kako se odnosi rad W_{AB} , utrošen na ubrzanje vlaka na dijelu puta AB, prema radu W_{BC} ? Rad utrošen na savladavanje trenja i otpora zraka zanemarite.

Rješenje 173

$$v_A = 0 \text{ m/s}, \quad v_B = 10 \text{ m/s}, \quad v_C = 15 \text{ m/s}, \quad W_{AB} : W_{BC} = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

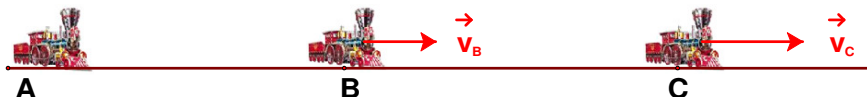
Rad utrošen na dijelu puta AB jednak je razlici kinetičke energije u točki B i točki A:

$$W_{AB} = E_{kB} - E_{kA} \Rightarrow W_{AB} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 \Rightarrow W_{AB} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_B^2 - v_A^2).$$

Rad utrošen na dijelu puta BC jednak je razlici kinetičke energije u točki C i točki B:

$$W_{BC} = E_{kC} - E_{kB} \Rightarrow W_{BC} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 \Rightarrow W_{BC} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_C^2 - v_B^2).$$

Računamo omjer rada W_{AB} i W_{BC} .



$$\frac{W_{AB}}{W_{BC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_B^2 - v_A^2)}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_C^2 - v_B^2)} \Rightarrow \frac{W_{AB}}{W_{BC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_B^2 - v_A^2)}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_C^2 - v_B^2)} \Rightarrow \frac{W_{AB}}{W_{BC}} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{v_C^2 - v_B^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{W_{AB}}{W_{BC}} = \frac{\left(10 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(0 \frac{m}{s}\right)^2}{\left(15 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(10 \frac{m}{s}\right)^2} \Rightarrow \frac{W_{AB}}{W_{BC}} = \frac{100}{125} \Rightarrow \frac{W_{AB}}{W_{BC}} = \frac{4}{5}.$$

Vježba 173

Vlak ubrzava iz stanja mirovanja iz točke A. U točki B postigne brzinu 36 km/h, a u točki C brzinu 54 km/h. Kako se odnosi rad W_{AB} , utrošen na ubrzanje vlaka na dijelu puta AB, prema radu W_{BC} ? Rad utrošen na savladavanje trenja i otpora zraka zanemarite.

Rezultat: 4 : 5.

Zadatak 174 (Malena, medicinska škola)

Automobil mase 1000 kg giba se brzinom 72 km/h.

- Kolika je kinetička energija automobila?
- Koliki je rad potreban za ubrzanje automobila iz mirovanja do te brzine?
- Koliki rad trebaju obaviti kočnice da bi se automobil zaustavio? Zanemarite gubitke.

Rješenje 174

$$m = 1000 \text{ kg}, \quad v = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad E_k = ?, \quad W = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

- Kinetička energija automobila mase m i brzine v iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(20 \frac{m}{s}\right)^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

- Ako su gubici (trenje, otpor zraka i dr.) zanemarivi, rad potreban za ubrzanje jednak je promjeni kinetičke energije:

$$W = \Delta E_k \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - 0 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(20 \frac{m}{s}\right)^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

- Rad pri zaustavljanju automobila mase m i brzine v također je jednak njegovoj kinetičkoj energiji i iznosi:

$$W = \Delta E_k \Rightarrow W = 2 \cdot 10^5 \text{ J}.$$



Vježba 174

Automobil mase 2000 kg giba se brzinom 72 km/h. Kolika je kinetička energija automobila?

Rezultat: $4 \cdot 10^5 \text{ J}$.

Zadatak 175 (Ivica, strojarska škola)

Na niti duljine 1 m obješena je kuglica. Koliku horizontalnu brzinu moramo dati kuglici da se ona otkloni do iste visine na kojoj se nalazi objesište niti? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 175

$$h = 1 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.



Da bi se kuglica otklonila do iste visine na kojoj se nalazi objesište niti mora, zbog zakona o očuvanju energije, gravitacijska potencijalna energija kuglice biti jednaka kinetičkoj energiji u času kad prolazi najnižom točkom.

$$\begin{aligned} E_{gp} = E_k &\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot h \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m}} = 4.43 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Vježba 175

Na niti duljine 100 cm obješena je kuglica. Koliku horizontalnu brzinu moramo dati kuglici da se ona otkloni do iste visine na kojoj se nalazi objesište niti? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 4.43 m/s.

Zadatak 176 (Ivica, strojarska škola)

Na horizontalnoj podlozi gurnemo tijelo brzinom 3 m/s. Faktor trenja između tijela i podloge iznosi 0.4. Odredi put što ga tijelo prevali prije nego što se zaustavi. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 176

$$v = 3 \text{ m/s}, \quad \mu = 0.4, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad. Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi:

$$W = F \cdot s.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite (normalne) komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Kada je tijelo na horizontalnoj podlozi sila trenja iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Budući da se kinetička energija tijela troši na svladavanje trenja na putu s , rad sile trenja jednak je promjeni kinetičke energije.

$$\begin{aligned} E_k = W &\Rightarrow E_k = F_{tr} \cdot s \Rightarrow E_k = \mu \cdot G \cdot s \Rightarrow E_k = \mu \cdot G \cdot s \cdot \frac{1}{\mu \cdot G} \Rightarrow s = \frac{E_k}{\mu \cdot G} \Rightarrow \\ \Rightarrow s &= \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow s = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow s = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(3 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0.4 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 1.15 \text{ m}. \end{aligned}$$

Vježba 176

Na horizontalnoj podlozi gurnemo tijelo brzinom 10.8 km/h. Faktor trenja između tijela i podloge iznosi 0.4. Odredi put što ga tijelo prevali prije nego što se zaustavi. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.15 m.

Zadatak 177 (Mily, gimnazija)

Srednja kinetička energija čestica plina pri temperaturi T iznosi $\overline{E_k}$. Pri kojoj će temperaturi srednja kinetička energija čestica plina biti dvostruko veća?

$$A. \frac{1}{2} \cdot T \quad B. \frac{2}{3} \cdot T \quad C. \frac{3}{2} \cdot T \quad D. 2 \cdot T$$

Rješenje 177

Pri određenoj temperaturi srednja kinetička energija molekule svih plinova jednaka je. Ona ovisi samo o temperaturi T plina

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T,$$

gdje je k_B Boltzmanova konstanta.

1. inačica

Budući da su srednja kinetička energija čestice i temperatura razmjerne (veća temperatura \rightarrow veća srednja kinetička energija, manja temperatura \rightarrow manja srednja kinetička energija)

$$\overline{E_k} \sim T,$$

srednja kinetička energija čestice plina bit će dvostruko veća ako je i temperatura dvostruko veća.

Odgovor je pod D.

2. inačica

$$\left. \begin{aligned} \overline{E_k} &= \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T \\ 2 \cdot \overline{E_k} &= \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot \overline{E_k}}{\overline{E_k}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T'}{\frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T} \Rightarrow \frac{2 \cdot \overline{E_k}}{\overline{E_k}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T'}{\frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 = \frac{T'}{T} \Rightarrow T' = 2 \cdot T.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 177

Srednja kinetička energija čestica plina pri temperaturi T iznosi $\overline{E_k}$. Pri kojoj će temperaturi srednja kinetička energija čestica plina biti trostruko veća?

A. $2 \cdot T$ B. $\frac{2}{3} \cdot T$ C. $\frac{3}{2} \cdot T$ D. $3 \cdot T$

Rezultat: D.

Zadatak 178 (Mily, gimnazija)

Ljuljajući se na ljuljački Hana prođe kroz najnižu točku putanje brzinom 2 m/s. Trenje je zanemarivo. Kolika je visina s koje se Hana spustila mjereno u odnosu na najnižu točku putanje? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 178

$$v = 2 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow E_{gp} = G \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

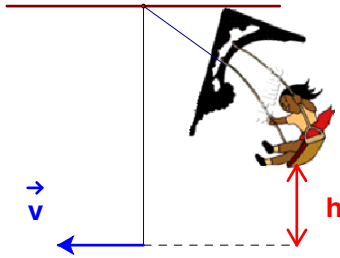
Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.

Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zbog zakona o očuvanju energije bit će gravitacijska potencijalna energija ljuljačke u najvišoj točki putanje jednaka kinetičkoj energiji u najnižoj točki putanje. Visina s koje se Hana spustila iznosi:

$$E_{gp} = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{v^2}{2 \cdot g} =$$
$$= \frac{\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.204 \text{ m.}$$



Vježba 178

Ljuljajući se na ljuljački Hana prođe kroz najnižu točku putanje brzinom 4 m/s. Trenje je zanemarivo. Kolika je visina s koje se Hana spustila mjereno u odnosu na najnižu točku putanje?

Rezultat: 0.815 m.

Zadatak 179 (Mily, gimnazija)

Kolica mase 0.4 kg gibaju se brzinom 2 m/s. Njima ususret gibaju se druga kolica mase 0.25 kg. Koliko treba iznositi brzina drugih kolica da nakon sudara oboja kolica miruju?

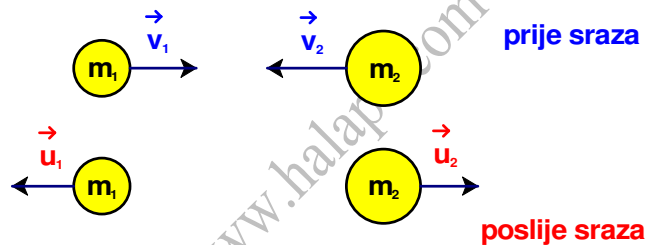
Rješenje 179

$$m_1 = 0.4 \text{ kg}, \quad v_1 = 2 \text{ m/s}, \quad m_2 = 0.25 \text{ kg}, \quad u_1 = u_2 = 0 \text{ m/s}, \quad v_2 = ?$$

Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Centralni elastični sraz (sudar)



Centralni sraz je sraz kod kojega se tijela gibaju po spojnici njihovih središta. Centralni sraz dva tijela nastaje:

- 1) ako se tijela gibaju jedno prema drugom
- 2) ako sustižu jedno drugo.

Kod elastičnog sraza ne mijenja se ukupna kinetička energija tijela prije i poslije sraza. Jednadžbe koje određuju gibanje tijela poslije sraza glase:

- $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$ (zakon o sačuvanju količine gibanja),
- $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$ (zakon o sačuvanju kinetičke energije).

gdje su m_1, m_2 mase prvog i drugog tijela; v_1, v_2 brzine prvog i drugog tijela prije sraza; u_1, u_2 brzine prvog i drugog tijela poslije sraza.

Iz zakona o sačuvanju količine gibanja dobije se brzina v_2 drugih kolica prije sudara:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot v_1 \cdot \frac{1}{m_2} \Rightarrow v_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1 = -\frac{0.4 \text{ kg}}{0.25 \text{ kg}} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vježba 179

Kolica mase 0.8 kg gibaju se brzinom 2 m/s. Njima ususret gibaju se druga kolica mase 0.5 kg. Koliko treba iznositi brzina drugih kolica da nakon sudara oboja kolica miruju?

Rezultat: - 3.2 m/s.

Zadatak 180 (Ivana, gimnazija)

Kamen mase 4 kg bačen je vertikalno dolje s visine 120 m početnom brzinom $v_0 = 10$ m/s. Kolika je energija potrebna za savladavanje otpora zraka, ako kamen udari u zemlju brzinom $v = 20$ m/s? ($g = 9.81$ m/s²)

Rješenje 180

$$m = 4 \text{ kg}, \quad h = 120 \text{ m}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad v = 20 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Da bi se tijelu povećala kinetička energija, mora okolica na njemu obaviti rad. Ako se tijelu smanjuje kinetička energija, tijelo obavlja rad.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow E_{gp} = G \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.

Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Energija ΔE potrebna za savladavanje otpora zraka jednaka je razlici zbroja gravitacijske potencijalne energije na visini h i kinetičke energije pri brzini v_0 te kinetičke energije koju kamen ima prilikom pada na zemlju brzinom v .

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left(E_{gp} + E_{k_0} \right) - E_k \Rightarrow \Delta E = \left(m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \right) - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta E &= m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \Delta E = m \cdot \left(g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right) = \\ &= 4 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 120 \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = 4108.8 \text{ J} \approx 4.109 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Vježba 180

Kamen mase 8 kg bačen je vertikalno dolje s visine 120 m početnom brzinom $v_0 = 10$ m/s. Kolika je energija potrebna za savladavanje otpora zraka, ako kamen udari u zemlju brzinom $v = 20$ m/s? ($g = 9.81$ m/s²)

Rezultat: 8217.6 J.