

Zadatak 121 (Hrvoje, gimnazija)

Dizalo mase 500 kg ubrza se akceleracijom 1 m/s^2 iz mirovanja do brzine 4 m/s . Za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila trenja 1000 N . Koliki je obavljeni rad? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 121

$$m = 500 \text{ kg}, \quad a = 1 \text{ m/s}^2, \quad v = 4 \text{ m/s}, \quad F_{tr} = 1000 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad W = ?$$

Ako na tijelo mase m djeluje stalna sila F u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju a koja je razmjerna (proporcionalna) sili, a obrnuto razmjerna (proporcionalna) masi tijela te ima isti smjer kao i sila (drugi Newtonov poučak):

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

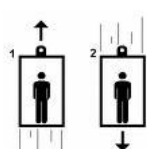
Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi:

$$W = F \cdot s.$$

Budući da motor dizala mora savladati silu težu G , silu trenja F_{tr} i dizalo ubrzavati stalnom akceleracijom a , sila F koju motor dizala mora proizvesti iznosi:

$$F = G + F_{tr} + m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot g + F_{tr} + m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (g + a) + F_{tr}.$$

Pritom je obavljeni rad motora:


$$\left. \begin{array}{l} v^2 = 2 \cdot a \cdot s \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = \frac{v^2}{2 \cdot a} \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow W = F \cdot \frac{v^2}{2 \cdot a} \Rightarrow W = \left[m \cdot (g + a) + F_{tr} \right] \cdot \frac{v^2}{2 \cdot a} =$$
$$= \left[500 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 1000 \text{ N} \right] \cdot \frac{\left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 51240 \text{ J} = 51.24 \text{ kJ}.$$

Vježba 121

Dizalo mase 500 kg ubrza se akceleracijom 1 m/s^2 iz mirovanja do brzine 4 m/s . Za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila trenja 500 N . Koliki je obavljeni rad? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 47.24 kJ.

Zadatak 122 (Ante, Visoka škola za sigurnost na radu)

Na tijelo mase 300 g , koje je u početnom trenutku u stanju mirovanja, djeluje sila od 1 N u smjeru juga i sila od 500 mN u smjeru istoka. Kolika je kinetička energija u vremenu 5 ms nakon početka djelovanja sila?

Rješenje 122

$$m = 300 \text{ g} = 0.3 \text{ kg}, \quad F_J = 1 \text{ N}, \quad F_I = 500 \text{ mN} = 0.5 \text{ N}, \quad t = 5 \text{ ms} = 0.005 \text{ s}, \quad E_k = ?$$

Pitagorin poučak: Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Ako na tijelo mase m djeluje stalna sila F u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju a koja je razmjerna (proporcionalna) sili, a obrnuto razmjerna (proporcionalna) masi tijela te ima isti smjer kao i sila (drugi Newtonov poučak):

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

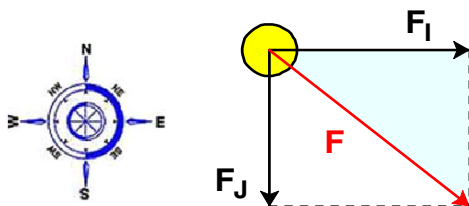
Prvo izračunamo rezultantnu silu F koja djeluje na tijelo. Uporabit ćemo Pitagorin poučak:

$$F^2 = F_I^2 + F_J^2.$$

Sada izvedemo formulu za brzinu v :

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ a = \frac{v}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot \frac{v}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cdot t = m \cdot v \Rightarrow v = \frac{F \cdot t}{m}.$$



Kinetička energija iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{F \cdot t}{m} \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{F \cdot t}{m} \right)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{F^2 \cdot t^2}{m^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot t^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F_I^2 + F_J^2) \cdot t^2}{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{((1 \text{ N})^2 + (0.5 \text{ N})^2) \cdot (0.005 \text{ s})^2}{0.3 \text{ kg}} = 5.21 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

Vježba 122

Na tijelo mase 0.3 kg, koje je u početnom trenutku u stanju mirovanja, djeluje sila od 1 N u smjeru zapada i sila od 500 mN u smjeru sjevera. Kolika je kinetička energija u vremenu 5 ms nakon početka djelovanja sila?

Rezultat: $5.21 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$

Zadatak 123 (Ante, Visoka škola za sigurnost na radu)

Tijelo mase 1500 g pada sa visine 20 m. Kolika je brzina tijela kada je potencijalna energija 1/5 od početne potencijalne energije? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 123

$$m = 1500 \text{ g} = 1.5 \text{ kg}, \quad h = 20 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi

Rješenje 125

$m, v, m_1, h, g, v_1 = ?$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Količinom gibanja mase m zovemo umnožak

$$p = m \cdot v.$$

Ako su početne brzine dva tijela jednake nuli zakon održanja količine gibanja glasi

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0,$$

gdje su brzine v_1 i v_2 brzine tijela mase m_1 odnosno m_2 nakon njihova međusobnog djelovanja.

Zbog zakona očuvanja količine gibanja za vodoravnu os, vrijedi:

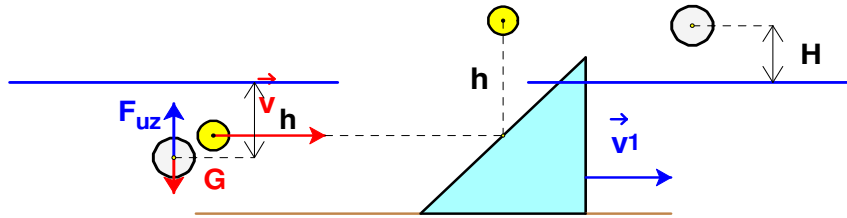
$$m \cdot v = m_1 \cdot v_1,$$

gdje je m masa kuglice, v brzina kuglice prije sudara, m_1 masa prizme, v_1 brzina prizme poslije sudara. Zbog zakona očuvanja energije slijedi da je kinetička energija kuglice prije sudara jednaka zbroju kinetičke energije prizme nakon sudara i gravitacijske potencijalne energije kuglice kad se odbije okomito uvis do visine h :

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se brzina prizme v_1 :

$$\left. \begin{aligned} m \cdot v &= m_1 \cdot v_1 \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v &= \frac{m_1 \cdot v_1}{m} \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1}{m} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{m_1^2 \cdot v_1^2}{m^2} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1^2 \cdot v_1^2}{m} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h \quad / \cdot 2 \cdot m \Rightarrow m_1^2 \cdot v_1^2 = m \cdot m_1 \cdot v_1^2 + 2 \cdot m^2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_1^2 \cdot v_1^2 - m \cdot m_1 \cdot v_1^2 = 2 \cdot m^2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v_1^2 \cdot (m_1^2 - m \cdot m_1) = 2 \cdot m^2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v_1^2 = \frac{2 \cdot m^2 \cdot g \cdot h}{m_1^2 - m \cdot m_1} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot m^2 \cdot g \cdot h}{m_1^2 - m \cdot m_1}} \Rightarrow v_1 = m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{m_1^2 - m \cdot m_1}}.$$



Vježba 125

Kuglica mase 2 kg i brzine v giba se vodoravno. Ona udara o prizmu mase 4 kg koja može kliziti bez trenja po vodoravnoj podlozi, pa se potom odbije okomito uvis do visine 1 m. Kolika je brzina prizme poslije sudara? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 3.13 m/s.

Zadatak 126 (Vlatka, maturantica)

Šuplje tijelo, vanjskog obujma 200 cm^3 , ima masu 140 g. Tijelo se potopi do dubine $h = 1 \text{ m}$ ispod površine vode i pusti. Do koje se visine diglo tijelo iznad površine vode? Zanimarite dimenzije tijela u odnosu na visinu h . ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 126

$V = 200 \text{ cm}^3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, $m = 140 \text{ g} = 0.14 \text{ kg}$, $h = 1 \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $H = ?$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

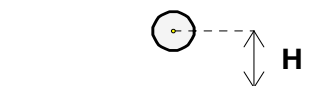
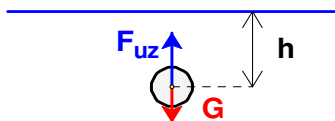
gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela.

Zadatak ćemo riješiti uporabom zakona održanja energije.

Povećanje gravitacijske potencijalne energije tijela E_{gp} jednako je radu W_{uz} sile uzgona F_{uz} na putu h :

$$E_{gp} = W_{uz} \Rightarrow m \cdot g \cdot (H + h) = F_{uz} \cdot h \Rightarrow m \cdot g \cdot (H + h) = \rho \cdot g \cdot V \cdot h \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow H + h = \frac{\rho \cdot V \cdot h}{m} \Rightarrow$$

$$H = \frac{\rho \cdot V \cdot h}{m} - h \Rightarrow H = h \cdot \left(\frac{\rho \cdot V}{m} - 1 \right) = 1 \text{ m} \cdot \left(\frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{0.14 \text{ kg}} - 1 \right) = 0.4286 \text{ m} = 42.86 \text{ cm}.$$



Vježba 126

Šuplje tijelo, vanjskog obujma 400 cm^3 , ima masu 280 g . Tijelo se potopi do dubine $h = 1 \text{ m}$ ispod površine vode i pusti. Do koje se visine diglo tijelo iznad površine vode? Zanimarite dimenzije tijela u odnosu na visinu h . ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 42.86 cm.

Zadatak 127 (Iva, gimnazija)

Dva tijela jednakih masa padnu na tlo s jednake visine h . Sudar prvog tijela s tlom je neelastičan. Drugo je tijelo nakon sudara elastično odskočilo na visinu $0.2 \cdot h$. Pri kojemu je sudaru više energije prešlo u unutrašnju energiju tijela i tla te koliko puta više?

Rješenje 127

$m_1 = m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$, $h_2' = 0.2 \cdot h$, $\Delta U_1 : \Delta U_2 = ?$
U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Računamo energiju koja je u neelastičnom sudaru prešla u unutrašnju energiju tijela i tla:

$$\Delta U_1 = \Delta E_{gp} \Rightarrow \Delta U_1 = m \cdot g \cdot h - 0 \Rightarrow \Delta U_1 = m \cdot g \cdot h.$$

Računamo energiju koja je u elastičnom sudaru prešla u unutrašnju energiju tijela i tla:

$$\Delta U_2 = \Delta E_{gp} \Rightarrow \Delta U_2 = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot 0.2 \cdot h \Rightarrow \Delta U_2 = m \cdot g \cdot h \cdot (1 - 0.2) \Rightarrow \Delta U_2 = 0.8 \cdot m \cdot g \cdot h.$$

Omjer energija iznosi:

$$\frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} = \frac{m \cdot g \cdot h}{0.8 \cdot m \cdot g \cdot h} \Rightarrow \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} = \frac{m \cdot g \cdot h}{0.8 \cdot m \cdot g \cdot h} \Rightarrow \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} = 1.25.$$

Pri neelastičnom sudaru prešlo je u unutrašnju energiju tijela i tla više energije, 1.25 puta.

Vježba 127

Dva tijela jednakih masa padnu na tlo s jednake visine h . Sudar prvog tijela s tlom je neelastičan. Drugo je tijelo nakon sudara elastično odskočilo na visinu $0.5 \cdot h$. Pri kojemu je sudaru više energije prešlo u unutrašnju energiju tijela i tla te koliko puta više?

Rezultat: Pri neelastičnom sudaru prešlo je u unutrašnju energiju tijela i tla više energije, 2 puta.

Zadatak 128 (Iva, gimnazija)

U bakrenoj posudi mase 200 g nalazi se 400 g vode. Voda se zagrijava uređajem koji trenjem pretvara mehaničku energiju u unutrašnju energiju vode i posude. Temperatura vode i posude naraste svake minute za 3 K . Kolikom snagom uređaj zagrijava vodu i posudu ako gubitke energije prema okolini zanemarimo? (specifični toplinski kapacitet bakra $c_b = 380 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, specifični toplinski kapacitet vode $c_v = 4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$)

Rješenje 128

$m_b = 200 \text{ g} = 0.2 \text{ kg}$, $m_v = 400 \text{ g} = 0.4 \text{ kg}$, $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, $\Delta t = 3 \text{ K}$,
 $c_b = 380 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, $c_v = 4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, $P = ?$

Toplina Q koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t,$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}$$

Snaga kojom se u uređaju trenjem mehanička energija pretvara u unutrašnju energiju iznosi:

$$P = \frac{Q}{t}$$

Računamo količinu topline kojom su zagrijani bakrena posuda i voda:

$$Q = Q_b + Q_v \Rightarrow Q = m_b \cdot c_b \cdot \Delta t + m_v \cdot c_v \cdot \Delta t \Rightarrow Q = (m_b \cdot c_b + m_v \cdot c_v) \cdot \Delta t$$

Snaga kojom uređaj zagrijava vodu i posudu, ako gubitke energije prema okolini zanemarimo, iznosi:

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow P = \frac{(m_b \cdot c_b + m_v \cdot c_v) \cdot \Delta t}{t} = \frac{\left(0.2 \text{ kg} \cdot 380 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} + 0.4 \text{ kg} \cdot 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right) \cdot 3 \text{ K}}{60 \text{ s}} = 87.6 \text{ W}$$

Vježba 128

U bakrenoj posudi mase 200 g nalazi se 400 g vode. Voda se zagrijava uređajem koji trenjem pretvara mehaničku energiju u unutrašnju energiju vode i posude. Temperatura vode i posude naraste svake 2 minute za 3 K. Kolikom snagom uređaj zagrijava vodu i posudu ako gubitke energije prema okolini zanemarimo? (specifični toplinski kapacitet bakra $c_b = 380 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, specifični toplinski kapacitet vode $c_v = 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$,

Rezultat: 43.8 W.

Zadatak 129 (Marin, gimnazija)

Olovna sačma doleti brzinom 100 m/s i zabije se u drvenu dasku. Koliko se povisi temperatura sačme ako se polovica mehaničke energije potroši na njezino zagrijavanje? (specifični toplinski kapacitet olova $c = 130 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$)

Rješenje 129

$$v = 100 \text{ m/s}, \quad c = 130 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}), \quad \Delta t = ?$$

Toplina Q koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t,$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju



$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Budući da se polovica mehaničke energije sačme (kinetičke energije zbog gibanja brzinom v) potroši na njezino zagrijavanje, slijedi:

$$\begin{aligned} Q = \frac{1}{2} \cdot E_k \Rightarrow m \cdot c \cdot \Delta t &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot c \cdot \Delta t = \frac{1}{4} \cdot m \cdot v^2 \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot c} \Rightarrow \Delta t = \frac{v^2}{4 \cdot c} = \\ &= \frac{\left(100 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{4 \cdot 130 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = 19.23 \text{ K} = 19.23 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Vježba 129

Olovna sačma doleti brzinom 100 m/s i zabije se u drvenu dasku. Koliko se povisi temperatura sačme ako se polovica mehaničke energije potroši na njezino zagrijavanje? (specifični toplinski kapacitet olova $c = 130 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$)

Rezultat: 19.23 °C.

Zadatak 130 (Lidija, maturantica)

Čekić mase 10^4 kg pada s visine 2.5 m na željeznu gredu mase 200 kg. Koliko puta treba čekić udariti o gredu da se temperatura grede povisi za 40 K? Na zagrijavanje grede utroši se 60% mehaničke energije. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$, specifični toplinski kapacitet željeza $c = 460 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$)

Rješenje 130

$$m_1 = 10^4 \text{ kg}, \quad h = 2.5 \text{ m}, \quad m_2 = 200 \text{ kg}, \quad \Delta t = 40 \text{ K}, \quad \eta = 60\% = 0.60, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad c = 460 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}, \quad n = ?$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Toplina Q koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t,$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela.



Kada čekić mase m_1 padne s visine h na željeznu gredu njegova mehanička energija (gravitacijska potencijalna energija) iznosi:

$$E_{gp} = m_1 \cdot g \cdot h.$$

Budući da se 60% mehaničke energije čekića potroši na zagrijavanje željezne grede mase m_2 , broj udaraca n čekića bit će:

$$n \cdot \eta \cdot E_{gp} = Q \Rightarrow n = \frac{Q}{\eta \cdot E_{gp}} \Rightarrow n = \frac{m_2 \cdot c \cdot \Delta t}{\eta \cdot m_1 \cdot g \cdot h} = \frac{200 \text{ kg} \cdot 460 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 40 \text{ K}}{0.60 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2.5 \text{ m}} = 25 \text{ udaraca.}$$

Vježba 130

Čekić mase 10^4 kg pada s visine 5 m na željeznu gredu mase 400 kg. Koliko puta treba čekić udariti o gredu da se temperatura grede povisi za 40 K? Na zagrijavanje grede utroši se 60% mehaničke energije. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$, specifični toplinski kapacitet željeza $c = 460 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$)

Rezultat: 25 udaraca.

Zadatak 131 (Matko, gimnazija)

Kuglica mase 10 g, bačena sa zemlje vertikalno uvis početnom brzinom od 80 m/s, na tlo pada brzinom od 40 m/s. Na kuglicu za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila otpora. Koliki je rad obavljen na savladavanje sile otpora?

Rješenje 131

$$m = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}, \quad v_0 = 80 \text{ m/s}, \quad v = 40 \text{ m/s}, \quad W = ?$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Vertikalni hitac je gibanje sastavljeno od jednolikog gibanja vertikalno uvis i slobodnog pada. Vrijeme padanja jednako je vremenu uspinjanja; tijelo će se vratiti brzinom koja je po iznosu jednaka brzini v_0 kojom smo ga bacili vertikalno uvis ali suprotnog smjera, tj. brzinom $-v_0$.

Rad obavljen na savladavanje sile otpora jednak je razlici kinetičkih energija na početku i na kraju gibanja tijela:

$$W = E_{k_0} - E_k \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0^2 - v^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0 - v) \cdot (v_0 + v) = \frac{1}{2} \cdot 0.01 \text{ kg} \cdot \left(80 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \left(80 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 24 \text{ J.}$$

Vježba 131

Kuglica mase 20 g, bačena sa zemlje vertikalno uvis početnom brzinom od 80 m/s, na tlo pada brzinom od 40 m/s. Na kuglicu za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila otpora. Koliki je rad obavljen na savladavanje sile otpora?

Rezultat: 48 J.

Zadatak 132 (Pedantna, gimnazija)

Tijelo mase 100 g bačeno je vertikalno uvis kinetičkom energijom od 5.81 J. Kolika je visina koju dostigne tijelo? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 132

$$m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}, \quad E_k = 5.81 \text{ J}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Vertikalni hitac je gibanje sastavljeno od jednolikog gibanja vertikalno uvis i slobodnog pada. Najviši domet h što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je $v = 0$. Onda je

$$h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

1. inačica

Budući da je zadana kinetička energija E_k , početna brzina v_0 kojom je tijelo bačeno uvis iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v_0^2 = \frac{2 \cdot E_k}{m} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}}.$$

Maksimalna visina h koju tijelo dosegne je:

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} \\ h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow h = \frac{\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} \right)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot E_k}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{E_k}{m \cdot g} = \frac{5.81 \text{ J}}{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5.923 \text{ m}.$$

2. inačica

Zbog zakona o očuvanju energije slijedi da je zbroj kinetičke i gravitacijske potencijalne energije stalan:

$$E_k + E_{gp} = \text{konst.}$$

Kada tijelo dosegne maksimalnu visinu kinetička energija jednaka je nuli, a gravitacijska potencijalna po iznosu jednaka je kinetičkoj energiji koju je tijelo imalo u početku bacanja (ispaljivanja) uvis:

$$E_{gp} = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{E_k}{m \cdot g} = \frac{5.81 \text{ J}}{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5.923 \text{ m.}$$

Vježba 132

Tijelo mase 100 g bačeno je vertikalno uvis kinetičkom energijom od 11.62 J. Kolika je visina koju dostigne tijelo i kolika mu je tada gravitacijska potencijalna energija? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 11.845 m.

Zadatak 133 (Ivan, gimnazija)

Koliki je stupanj korisnog djelovanja η automobila koji troši 6 litara benzina na sat, razvijajući pri tome snagu od 23 kW? Toplina izgaranja benzina je $4.6 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$, a gustoća benzina 750 kg/m^3 .

Rješenje 133

$$V = 6 \text{ l} = 6 \text{ dm}^3 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \quad t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}, \quad P = 23 \text{ kW} = 2.3 \cdot 10^4 \text{ W}, \\ q = 4.6 \cdot 10^7 \text{ J/kg}, \quad \rho = 750 \text{ kg/m}^3, \quad \eta = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova volumena:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow W = P \cdot t.$$

Toplina Q koja se oslobađa pri potpunom izgaranju goriva mase m izražava se umnoškom

$$Q = m \cdot q,$$

gdje je q specifična toplina izgaranja.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Omjer između energije koju iskorišćujemo od nekog stroja i ukupne energije koju ulažemo u stroj zovemo korisnost stroja η . Često je izražavamo u postocima:

$$\eta = \frac{W_i}{W_u} \cdot 100\%.$$

Energija koju automobil iskorišćuje iznosi:

$$W_i = P \cdot t.$$

Ukupna energija benzina je

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ W_u = m \cdot q \end{array} \right\} \Rightarrow W_u = \rho \cdot V \cdot q.$$

Stupanj korisnog djelovanja η automobila ima vrijednost:

$$\eta = \frac{W_i}{W_u} \Rightarrow \eta = \frac{P \cdot t}{\rho \cdot V \cdot q} = \frac{2.3 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s}}{750 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4.6 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 0.40 = \frac{40}{100} = 40\%.$$

Vježba 133

Koliki je stupanj korisnog djelovanja η automobila koji troši 6 litara benzina na sat, razvijajući pri tome snagu od 46 kW? Toplina izgaranja benzina je $4.6 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$, a gustoća benzina 750 kg/m^3 .

Rezultat: 80%.

Zadatak 134 (Siniša, tehnička škola)

Na tijelo mase 30 kg djeluje stalna vertikalna sila i podiže ga na visinu 10 m u vremenu od 5 s. Koliki je rad te sile? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 134

$$m = 30 \text{ kg}, \quad h = 10 \text{ m}, \quad t = 5 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad W = ?$$

Ako na tijelo mase m djeluje stalna sila F u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju a koja je razmjerna (proporcionalna) sili, a obrnuto razmjerna (proporcionalna) masi tijela te ima isti smjer kao i sila (drugi Newtonov poučak):

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su s i v put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi:

$$W = F \cdot s.$$

Ukupan rad W jednak je zbroju rada obavljenog prilikom svladavanja sile teže G na putu h i rada koji obavi sila F na istom putu:

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ G = m \cdot g, \quad F = m \cdot a \\ W = G \cdot h + F \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \cdot \frac{2}{t^2} \\ W = m \cdot g \cdot h + m \cdot a \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{2 \cdot h}{t^2} \\ W = m \cdot h \cdot (g + a) \end{array} \right\} \Rightarrow W = m \cdot h \cdot \left(g + \frac{2 \cdot h}{t^2} \right) =$$

$$= 30 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{(5 \text{ s})^2} \right) = 3183 \text{ J}.$$

Vježba 134

Na tijelo mase 60 kg djeluje stalna vertikalna sila i podiže ga na visinu 10 m u vremenu od 5 s. Koliki je rad te sile? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 6366 J.

Zadatak 135 (Vesna, gimnazija)

Projekttil mase 20 kg ispaljen je uvis brzinom 400 m/s i postigne visinu 4 km. Kolika je energija pritom utrošena na otpor zraka? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 135

$$m = 20 \text{ kg}, \quad v = 400 \text{ m/s}, \quad h = 4 \text{ km} = 4000 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Vertikalni hitac je gibanje sastavljeno od jednolikog gibanja vertikalno uvis i slobodnog pada. Najviši domet H što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je $v = 0$. Onda je

$$H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

1. inačica

Energija utrošena na otpor zraka jednaka je razlici početne kinetičke energije i konačne gravitacijske potencijalne energije:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_k - E_{gp} \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot h \Rightarrow \Delta E = m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v^2 - g \cdot h \right) = \\ &= 20 \text{ kg} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(400 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4000 \text{ m} \right) = 815200 \text{ J} \approx 0.82 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

2. inačica

Da nema otpora zraka tijelo bi se popelo na maksimalnu visinu (vertikalni hitac uvis):

$$H = \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Energija utrošena na otpor zraka jednaka je razlici gravitacijskih potencijalnih energija na visinama H i h:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{gp_H} - E_{gp_h} \Rightarrow \Delta E = m \cdot g \cdot H - m \cdot g \cdot h \Rightarrow \Delta E = m \cdot (g \cdot H - g \cdot h) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta E &= m \cdot \left(g \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} - g \cdot h \right) \Rightarrow \Delta E = m \cdot \left(g \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} - g \cdot h \right) \Rightarrow \Delta E = m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v^2 - g \cdot h \right) = \\ &= 20 \text{ kg} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(400 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4000 \text{ m} \right) = 815200 \text{ J} \approx 0.82 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

Vježba 135

Projektile mase 40 kg ispaljen je uvis brzinom 400 m/s i postigne visinu 4 km. Kolika je energija pritom utrošena na otpor zraka? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1630400 \approx 1.63 MJ.

Zadatak 136 (Vesna, gimnazija)

Tijelo mase 1 kg bačeno je vertikalno uvis brzinom 10 m/s. Kolika mu je promjena potencijalne energije nakon 1 sekunde gibanja? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 136

$$m = 1 \text{ kg}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad t = 1 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E_{gp} = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato su mu brzina v i put s u času kad je prošlo vrijeme t dani ovim izrazima:

$$v = v_0 - g \cdot t, \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

1. inačica

Izračunamo visinu s na koju se tijelo popne nakon vremena t:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Promjena gravitacijske potencijalne energije iznosi:

$$\begin{aligned} \Delta E_{gp} &= m \cdot g \cdot s \Rightarrow \Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot \left(v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right) = \\ &= 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1 \text{ s})^2 \right) = 49.98 \text{ J} \approx 50 \text{ J}. \end{aligned}$$

2. inačica

Tijelo je bačeno brzinom v_0 pa mu je kinetička energija:

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2.$$

Nakon vremena t brzina iznosi:

$$v = v_0 - g \cdot t.$$

Tada je kinetička energija:

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0 - g \cdot t)^2.$$

Promjena kinetičke energije tijela jednaka je promjeni gravitacijske potencijalne energije:

$$\begin{aligned} \Delta E_{gp} &= E_{k_1} - E_{k_2} \Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0 - g \cdot t)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta E_{gp} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_0^2 - (v_0 - g \cdot t)^2 \right) \Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_0^2 - v_0^2 + 2 \cdot v_0 \cdot g \cdot t - (g \cdot t)^2 \right) = \\ \Rightarrow \Delta E_{gp} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_0^2 - v_0^2 + 2 \cdot v_0 \cdot g \cdot t - (g \cdot t)^2 \right) \Rightarrow \Delta E_{gp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(2 \cdot v_0 \cdot g \cdot t - (g \cdot t)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ kg} \cdot \left(2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} - \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} \right)^2 \right) = 49.98 \text{ J} \approx 50 \text{ J}. \end{aligned}$$

Vježba 136

Tijelo mase 2 kg bačeno je vertikalno uvis brzinom 10 m/s. Kolika mu je promjena potencijalne energije nakon 1 sekunde gibanja? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 100 J.

Zadatak 137 (Miroslav, gimnazija)

Tijelo mase 0.1 kg bačeno je vertikalno uvis kinetičkom energijom od 9.81 J. Zanimarite otpor zraka. Kolika je visina koju dostigne tijelo? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 137

$$m = 0.1 \text{ kg}, \quad E_k = 9.81 \text{ J}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato su mu brzina v i put s u času kad je prošlo vrijeme t dani ovim izrazima:

$$v = v_0 - g \cdot t \quad , \quad v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot s \quad , \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 .$$

Najviši domet h što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je $v = 0$. Onda je

$$h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} .$$

1. inačica

Iz formule za kinetičku energiju E_k izračunamo početnu brzinu v_0 vertikalnog hica uvis:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v_0^2 = \frac{2 \cdot E_k}{m} .$$

Za vertikalni hitac vrijedi:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h .$$

U najvišoj točki trenutna brzina v jednaka je nuli pa je:

$$\left. \begin{array}{l} v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h \\ v = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h = 0 \Rightarrow v_0^2 = 2 \cdot g \cdot h \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \left[v_0^2 = \frac{2 \cdot E_k}{m} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{\frac{2 \cdot E_k}{m}}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{\frac{2 \cdot E_k}{m}}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{E_k}{m \cdot g} = \frac{9.81 \text{ J}}{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10 \text{ m} .$$

2. inačica

Otpor zraka zanemarujemo.

Zbog zakona o očuvanju energije slijedi da je zbroj kinetičke i gravitacijske potencijalne energije stalan:

$$E_k + E_{gp} = konst. .$$

Kada tijelo dosegne maksimalnu visinu kinetička energija jednaka je nuli, a gravitacijska potencijalna po iznosu jednaka je kinetičkoj energiji koju je tijelo imalo u početku bacanja (ispaljivanja) uvis:

$$E_{gp} = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{E_k}{m \cdot g} = \frac{9.81 \text{ J}}{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10 \text{ m} .$$

Vježba 137

Tijelo mase 0.1 kg bačeno je vertikalno uvis kinetičkom energijom od 19.62 J. Zanemarite otpor zraka. Kolika je visina koju dostigne tijelo? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 20 m.

Zadatak 138 (Neven, student)

Tijelo mase 4 kg i brzine 5 m/s elastično se sudara s tijelom mase 3 kg koje mu dolazi u susret. Ako se tijelo mase 3 kg nakon sudara popne do visine 3.2 m uz kosinu bez trenja, kolika je bila njegova brzina prije sudara? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 138

$$m_1 = 4 \text{ kg}, \quad v_1 = 5 \text{ m/s}, \quad m_2 = 3 \text{ kg}, \quad h = 3.2 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad v_2 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je v brzina pada, h visina pada.

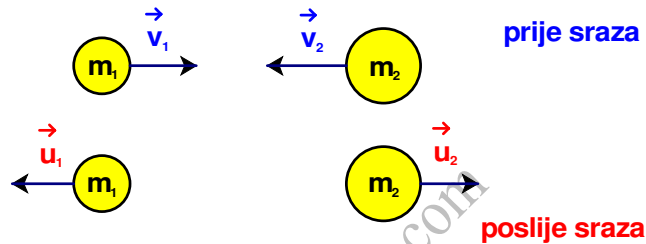
Zakon o sačuvanju energije

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihovog međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Centralni elastični sraz (sudar)



Centralni sraz je sraz kod kojega se tijela gibaju po spojnici njihovih središta. Centralni sraz dva tijela nastaje:

- 1) ako se tijela gibaju jedno prema drugom
- 2) ako sustižu jedno drugo.

Kod elastičnog sraza ne mijenja se ukupna kinetička energija tijela prije i poslije sraza. Jednadžbe koje određuju gibanje tijela poslije sraza glase:

- $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$ (zakon o sačuvanju količine gibanja),
- $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$ (zakon o sačuvanju kinetičke energije).

gdje su m_1, m_2 mase prvog i drugog tijela; v_1, v_2 brzine prvog i drugog tijela prije sraza; u_1, u_2 brzine prvog i drugog tijela poslije sraza.

Iz zakona o sačuvanju mehaničke energije i količine gibanja primijenjenih na savršeno elastičan sraz tijela masa m_1, m_2 i brzina v_1, v_2 slijede brzine tijela nakon sraza:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}.$$

Specijalni slučajevi ovih rješenja:

- drugo tijelo miruje prije sraza

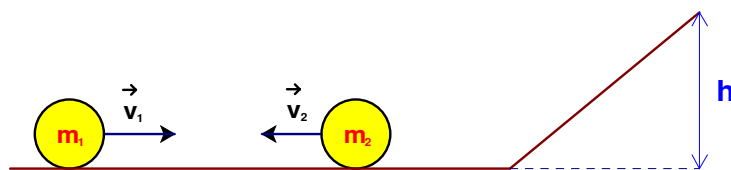
$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1, \quad u_2 = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

- drugo tijelo je beskonačne mase (npr. odraz elastične kuglice od fiksne čelične ploče, kuglica se odbije istom brzinom kojom je udarila u ploču, ali suprotnog smjera)

$$u_1 = -v_1, \quad u_2 = 0$$

- oba tijela su jednake mase (prvo tijelo se zaustavlja i predaje svoju energiju drugom tijelu koje odlazi istom brzinom kojom je prvo tijelo u nj udarilo)

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = v_1.$$



Budući da se tijelo mase m_2 nakon sruca popne bez trenja do visine h uz kosinu, njegova brzina u_2 iznosi (slobodan pad)

$$u_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 3.2 m} = 8 \frac{m}{s}.$$

Brzina v_2 tijela mase m_2 prije sruca iznosila je:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow u_2 = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \cdot (m_1 + m_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot u_2 &= (m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1 \Rightarrow (m_2 - m_1) \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u_2 - 2 \cdot m_1 \cdot v_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_2 - m_1) \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot u_2 - 2 \cdot m_1 \cdot v_1 \cdot \frac{1}{m_2 - m_1} \Rightarrow v_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u_2 - 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_2 - m_1} = \\ &= \frac{(4 \text{ kg} + 3 \text{ kg}) \cdot 8 \frac{m}{s} - 2 \cdot 4 \text{ kg} \cdot 5 \frac{m}{s}}{3 \text{ kg} - 4 \text{ kg}} = -16 \frac{m}{s} \text{ suprotan smjer.} \end{aligned}$$

Vježba 138

Tijelo mase 8 kg i brzine 5 m/s elastično se sudara s tijelom mase 6 kg koje mu dolazi u susret. Ako se tijelo mase 6 kg nakon sudara popne do visine 3.2 m uz kosinu bez trenja, kolika je bila njegova brzina prije sudara? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: -16 m/s .

Zadatak 139 (Neven, student)

Tijelo mase 2.5 kg i brzine 5 m/s elastično se sudara s tijelom mase 2 kg koje mu dolazi u susret brzinom 3 m/s. Do koje će se visine drugo tijelo nakon sudara popeti uz kosinu bez trenja? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 139

$$m_1 = 2.5 \text{ kg}, \quad v_1 = 5 \text{ m/s}, \quad m_2 = 2 \text{ kg}, \quad v_2 = -3 \text{ m/s} \text{ suprotan smjer}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je v brzina pada, h visina pada.

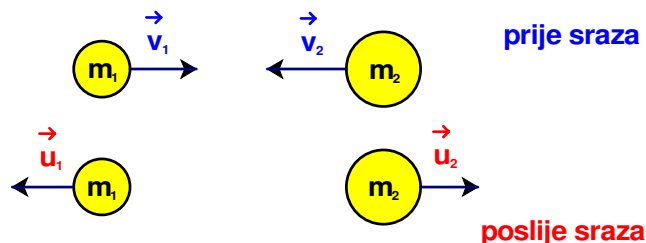
Zakon o sačuvanju energije

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Centralni elastični sraz (sudar)



Centralni sraz je sraz kod kojega se tijela gibaju po spojnici njihovih središta. Centralni sraz dva tijela nastaje:

- 1) ako se tijela gibaju jedno prema drugom
- 2) ako sustižu jedno drugo.

Kod elastičnog sraza ne mijenja se ukupna kinetička energija tijela prije i poslije sraza. Jednadžbe koje određuju gibanje tijela poslije sraza glase:

- $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$ (zakon o sačuvanju količine gibanja),
- $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$ (zakon o sačuvanju kinetičke energije).

gdje su m_1, m_2 mase prvog i drugog tijela; v_1, v_2 brzine prvog i drugog tijela prije sraza; u_1, u_2 brzine prvog i drugog tijela poslije sraza.

Iz zakona o sačuvanju mehaničke energije i količine gibanja primijenjenih na savršeno elastičan sraz tijela masa m_1, m_2 i brzina v_1, v_2 slijede brzine tijela nakon sraza:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

Specijalni slučajevi ovih rješenja:

- drugo tijelo miruje prije sraza

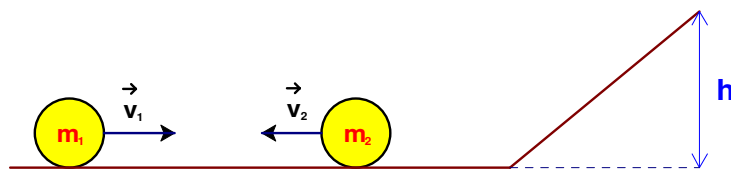
$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1, \quad u_2 = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

- drugo tijelo je beskonačne mase (npr. odraz elastične kuglice od fiksne čelične ploče, kuglica se odbije istom brzinom kojom je udarila u ploču, ali suprotnog smjera)

$$u_1 = -v_1, \quad u_2 = 0$$

- oba tijela su jednake mase (prvo tijelo se zaustavlja i predaje svoju energiju drugom tijelu koje odlazi istom brzinom kojom je prvo tijelo u nj udarilo)

$$u_1 = 0, \quad u_2 = v_1$$



Brzina u_2 tijela mase m_2 nakon sraza iznosi:

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} = \frac{(2 \text{ kg} - 2.5 \text{ kg}) \cdot \left(-3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + 2 \cdot 2.5 \text{ kg} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2.5 \text{ kg} + 2 \text{ kg}} = 5.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Budući da se tijelo nakon sraza popne brzinom u_2 do visine h uz kosinu, visina h iznosi (slobodan pad):

$$u_2^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow u_2^2 = 2 \cdot g \cdot h \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{u_2^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(5.9 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2}} = 1.74 \text{ m.}$$

Vježba 139

Tijelo mase 5 kg i brzine 5 m/s elastično se sudara s tijelom mase 4 kg koje mu dolazi u susret brzinom 3 m/s. Do koje će se visine drugo tijelo nakon sudara popeti uz kosinu bez trenja? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.74 m.

Zadatak 140 (Neven, student)

Kuglica mase 200 g i brzine 2 m/s udara u kuglicu mase 150 g koja visi na niti duljine 40 cm. Za koliko će se nit otkloniti od vertikale nakon sudara, ako je sudar bio elastičan? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 140

$m_1 = 200 \text{ g} = 0.2 \text{ kg}$, $v_1 = 2 \text{ m/s}$, $m_2 = 150 \text{ g} = 0.15 \text{ kg}$, $r = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$,
 $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\alpha = ?$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je v brzina pada, h visina pada.

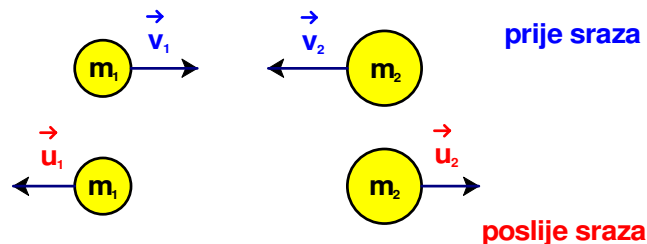
Zakon o sačuvanju energije

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Zakon o sačuvanju količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela.

Centralni elastični sraz (sudar)



Centralni sraz je sraz kod kojega se tijela gibaju po spojnici njihovih središta. Centralni sraz dva tijela nastaje:

- 1) ako se tijela gibaju jedno prema drugom
- 2) ako sustižu jedno drugo.

Kod elastičnog sraza ne mijenja se ukupna kinetička energija tijela prije i poslije sraza. Jednadžbe koje određuju gibanje tijela poslije sraza glase:

- $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$ (zakon o sačuvanju količine gibanja),
- $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$ (zakon o sačuvanju kinetičke energije).

gdje su m_1 , m_2 mase prvog i drugog tijela; v_1 , v_2 brzine prvog i drugog tijela prije sraza; u_1 , u_2 brzine prvog i drugog tijela poslije sraza.

Iz zakona o sačuvanju mehaničke energije i količine gibanja primijenjenih na savršeno elastičan sraz tijela masa m_1 , m_2 i brzina v_1 , v_2 slijede brzine tijela nakon sraza:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}.$$

Specijalni slučajevi ovih rješenja:

- drugo tijelo miruje prije sraza

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1, \quad u_2 = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

- drugo tijelo je beskonačne mase (npr. odraz elastične kuglice od fiksne čelične ploče, kuglica se odbije istom brzinom kojom je udarila u ploču, ali suprotnog smjera)

$$u_1 = -v_1, \quad u_2 = 0$$

- oba tijela su jednake mase (prvo tijelo se zaustavlja i predaje svoju energiju drugom tijelu koje odlazi istom brzinom kojom je prvo tijelo u nj udarilo)

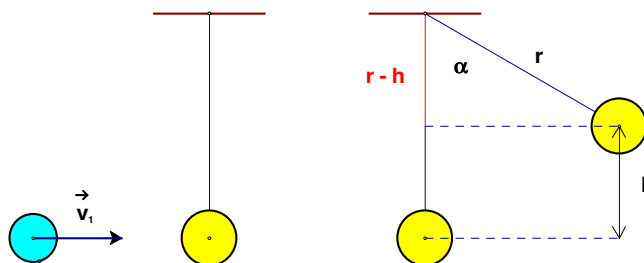
$$u_1 = 0, \quad u_2 = v_1.$$

Drugo tijelo (tijelo mase m_2) miruje prije sraza pa je njegova brzina u_2 nakon sraza dana izrazom:

$$u_2 = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1.$$

Budući da se tijelo nakon sraza popne brzinom u_2 do visine h uz kosinu, visina h ima vrijednost (slobodan pad):

$$\begin{aligned} u_2^2 &= 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow u_2^2 = 2 \cdot g \cdot h \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{u_2^2}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow h &= \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \frac{4 \cdot m_1^2 \cdot v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \frac{4 \cdot m_1^2 \cdot v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot m_1^2 \cdot v_1^2}{g \cdot (m_1 + m_2)^2}. \end{aligned}$$



Računamo za koliko će se nit otkloniti od vertikale nakon sudara. Sa slike vidi se:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{r-h}{r} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{r}{r} - \frac{h}{r} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{h}{r} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{1}{r} \cdot \frac{2 \cdot m_1^2 \cdot v_1^2}{g \cdot (m_1 + m_2)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \alpha &= 1 - \frac{2 \cdot m_1^2 \cdot v_1^2}{r \cdot g \cdot (m_1 + m_2)^2} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{2}{r \cdot g} \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left[1 - \frac{2}{r \cdot g} \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] = \cos^{-1} \left[1 - \frac{2}{0.4 \text{ m} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \left(\frac{0.2 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.2 \text{ kg} + 0.15 \text{ kg}} \right)^2 \right] = 69^{\circ} 41' 59.3''.$$

Vježba 140

Kuglica mase 0.2 kg i brzine 2 m/s udara u kuglicu mase 0.15 kg koja visi na niti duljine 0.4 m. Za koliko će se nit otkloniti od vertikale nakon sudara, ako je sudar bio elastičan? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $69^{\circ} 41' 59.3''$.

www.halapa.com