

**Zadatak 001 (Ivan, elektrotehnička škola)**

Metak mase 20 g i početne brzine 600 m/s zabije se u dasku debljine 2 cm i, probivši je izleti brzinom 200 m/s. Kolika je prosječna sila otpora djelovala na metak pri probijanju daske?

**Rješenje 001**

Razlika kinetičkih energija prije i poslije probijanja daske jednaka je radu sile otpora F.

$$m = 20 \text{ g} = 0.02 \text{ kg}, \quad v_1 = 600 \text{ m/s}, \quad d = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}, \quad v_2 = 200 \text{ m/s}, \quad F = ?$$

Rad je jednak razlici kinetičkih energija prije i poslije probijanja daske:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2.$$

Po definiciji rad je jednak

$$W = F \cdot d.$$

Zato je:

$$F \cdot d = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_2^2) \Rightarrow F = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_2^2)}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{m \cdot (v_1^2 - v_2^2)}{2 \cdot d} = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot \left[ \left( 600 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left( 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right]}{2 \cdot 0.02 \text{ m}} = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 320000 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{0.04 \text{ m}} = 1.6 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Sila otpora je  $1.6 \cdot 10^5 \text{ N}$ .

**Vježba 001**

Metak mase 10 g i početne brzine 400 m/s zabije se u dasku debljine 2 cm i, probivši je izleti brzinom 100 m/s. Kolika je prosječna sila otpora djelovala na metak pri probijanju daske?

**Rezultat:**  $3.75 \cdot 10^4 \text{ N}$ .

**Zadatak 002 (Tomo, gimnazija)**

Koliki je rad potreban da se zaustavi automobil mase 1000 kg, brzine 72 km/h?

**Rješenje 002**

$$m = 1000 \text{ kg}, \quad v_1 = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad v_2 = 0, \quad W = ?$$

Izvršeni rad jednak je promjeni kinetičke energije:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left( 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 500 \text{ kg} \cdot 400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 200000 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = 2 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Pri zaustavljanju se kinetička energija automobila smanjuje zbog rada sile trenja. Ukupni rad do zaustavljanja jednak je početnoj kinetičkoj energiji. Potreban je rad  $2 \cdot 10^5 \text{ J}$ .

**Vježba 002**

Koliki je rad potreban da se zaustavi automobil mase 500 kg, brzine 36 km/h?

**Rezultat:**  $2.5 \cdot 10^4 \text{ J}$ .

**Zadatak 003 (Veronika, medicinska škola)**

Tane mase 10 g ispaljeno je brzinom 1000 m/s i udari u cilj brzinom 500 m/s na istoj visini s koje je izbačeno. Koliki je rad utrošen na savladavanje otpora zraka?

**Rješenje 003**

Rad koji je utrošen na savladavanje otpora zraka jednak je razlici početne i konačne kinetičke energije.

$$m = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}, \quad v_1 = 1000 \text{ m/s}, \quad v_2 = 500 \text{ m/s}, \quad W = ?$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1 - v_2) \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2} \cdot 0.01 \text{ kg} \cdot 500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3750 \text{ J}$$

Utrošen je rad 3750 J.

### Vježba 003

Tane mase 20 g ispaljeno je brzinom 800 m/s i udari u cilj brzinom 300 m/s na istoj visini s koje je izbačeno. Koliki je rad utrošen na savladavanje otpora zraka?

**Rezultat:** 5500 J.

### Zadatak 004 (Vladimir, tehnička škola)

Raketa mase 250 kg sadrži 350 kg goriva. Pri ispaljivanju rakete gorivo je izašlo iz rakete brzinom 0.5 km/s vertikalno dolje. Do koje će visine stići raketa ako joj otpor zraka smanji domet 6 puta?

### Rješenje 004

Ovdje ćemo primijeniti zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  kojima su početne brzine  $v_1$  i  $v_2$ , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja  $v_1'$  i  $v_2'$ .

$$m_1 = 250 \text{ kg}, \quad m_2 = 350 \text{ kg}, \quad v_1 = v_2 = 0 \text{ m/s}, \quad v_2' = 0.5 \text{ km/s} = 500 \text{ m/s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow -m_1 \cdot v_1' = m_2 \cdot v_2' \Rightarrow$$

$$v_1' = -\frac{m_2 \cdot v_2'}{m_1} = -\frac{350 \text{ kg} \cdot 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{250 \text{ kg}} = -700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Predznak minus znači da se raketa giba u suprotnom smjeru od gibanja goriva, tj. giba se prema gore. U daljnjem računanju možemo uzeti apsolutnu vrijednost brzine  $v_1'$ . Najviši domet  $H$  što ga raketa može postići pri vertikalnom hicu jest:

$$H = \frac{v_1'^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(700 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 24\,500 \text{ m}.$$

Zbog otpora zraka njezin domet je 6 puta manji i iznosi:

$$d = \frac{1}{6} \cdot H = \frac{1}{6} \cdot 24\,500 \text{ m} = 4\,083.33 \text{ m}.$$

Raketa će stići do visine 4 083.33 m.

### Vježba 004

Raketa mase 200 kg sadrži 400 kg goriva. Pri ispaljivanju rakete gorivo je izašlo iz rakete brzinom 0.4 km/s vertikalno dolje. Do koje će visine stići raketa ako joj otpor zraka smanji domet 5 puta?

**Rezultat:** 6 400 m.

### Zadatak 005 (Danijel, gimnazija)

Tijelo mase 20 kg padne s visine 15 m te pri kraju pada ima brzinu 16 m/s. Kolika je sila otpora zraka? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 005

$$m = 20 \text{ kg}, \quad h = 15 \text{ m}, \quad v = 16 \text{ m/s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Na visini  $h$ , u početnom (gornjem) položaju, tijelo ima gravitacijsku potencijalnu energiju  $E_{gp} = m \cdot g \cdot h$ .

Pri kraju pada, u donjem položaju, ima brzinu  $v$  pa mu je kinetička energija  $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ .

Tijekom pada tijelo je potrošilo dio energije

$$\Delta E = E_{gp} - E_k.$$

Taj dio energije  $\Delta E$  ekvivalentan je radu što ga tijelo obavi padajući, tj. savladavajući silu otpora zraka:

$$W = \Delta E \Rightarrow W = E_{gp} - E_k.$$

Budući da se rad definira

$$W = F \cdot h$$

slijedi

$$F \cdot h = E_{gp} - E_k.$$

$$\begin{aligned} F \cdot h = E_{gp} - E_k \quad / : h \Rightarrow F &= \frac{E_{gp} - E_k}{h} = \frac{m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{h} = \frac{m \cdot \left( g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right)}{h} \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= \frac{20 \text{ kg} \cdot \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 15 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot \left( 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{15 \text{ m}} = \frac{20 \text{ kg} \cdot \left( 150 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - \frac{1}{2} \cdot 256 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right)}{15 \text{ m}} \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= \frac{20 \text{ kg} \cdot \left( 150 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 128 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right)}{15 \text{ m}} = \frac{20 \text{ kg} \cdot 22 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{15 \text{ m}} = \frac{440 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{15 \frac{\text{m}}{1}} = 29.33 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29.33 \text{ N}. \end{aligned}$$

### Vježba 005

Tijelo mase 10 kg padne s visine 25 m te pri kraju pada ima brzinu 12 m/s. Kolika je sila otpora zraka? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 71.2 N.

### Zadatak 006 (Petar, gimnazija)

Tijelo mase 100 g bačeno je vertikalno uvis kinetičkom energijom 9.81 J. Koju visinu dostigne tijelo? Zanemarite otpor zraka. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 006

$$m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}, \quad E_k = 9.81 \text{ J}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

1. inačica

Iz formule za kinetičku energiju nađemo brzinu  $v$ , a visinu  $h$  izračunamo pomoću izraza za vertikalni hitac:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \text{ J}}{0.1 \text{ kg}}} = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Visina je:

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{\left( 14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10 \text{ m}.$$

2. inačica

Kinetička je energija jednaka gravitacijskoj potencijalnoj (zakon o sačuvanju energije):

$$E_K = E_{GP} \Rightarrow E_K = m \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{E_K}{m \cdot g} = \frac{9.81 \text{ J}}{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10 \text{ m}.$$

### Vježba 006

Tijelo mase 100 g bačeno je vertikalno uvis kinetičkom energijom 19.62 J. Koju visinu dostigne tijelo? Zanemarite otpor zraka. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $h = 20 \text{ m}$ .

### Zadatak 007 (Čarobna agentica 007, gimnazija)

U vreću mase 5 kg udari metak mase 10 g. Vreća se podigne za 10 cm u odnosu na početni položaj. Ako je putanja metka horizontalna, kolika je njegova brzina?

#### Rješenje 007

$m_1 = 5 \text{ kg}$ ,  $v_1 = 0 \text{ m/s}$ ,  $m_2 = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}$ ,  $h = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  
 $v_2 = ?$

Budući da se vreća, u koju udari metak, podigne za 10 cm, gravitacijska potencijalna energija tog sustava (vreća + metak) porasla je za iznos uložene kinetičke energije:

$$(m_1 + m_2) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2,$$

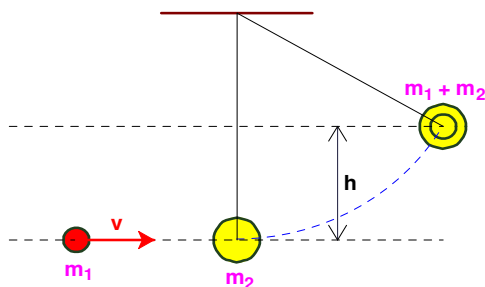
gdje je  $v$  brzina metka i vreće nakon sudara. Odatle možemo odrediti brzinu  $v$ :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 \quad /: (m_1 + m_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot v^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot h \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \end{aligned}$$

Sada se brzina metka prije sudara  $v_2$  odredi iz zakona o očuvanju količine gibanja (zbroj količina gibanja metka i vreće prije sudara jednak je količini gibanja vreće i metka zajedno nakon sudara)

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow \\ \Rightarrow m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v \quad /: m_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2 &= \frac{(m_1 + m_2) \cdot v}{m_2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{m_2} = \frac{(5 \text{ kg} + 0.01 \text{ kg}) \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.10 \text{ m}}}{0.01 \text{ kg}} = \\ &= \frac{5.01 \text{ kg} \cdot \sqrt{1.962 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}}{0.01 \text{ kg}} = \frac{5.01 \cdot \sqrt{1.962}}{0.01} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 702 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Iz slike se jasno vidi ideja za rješenje zadatka.



### Vježba 007

U vreću mase 4 kg udari metak mase 8 g. Vreća se podigne za 6 cm u odnosu na početni položaj. Ako je putanja metka horizontalna, kolika je njegova brzina?

**Rezultat:**  $544 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 008 (Marin, gimnazija)**

Vlak mase 400 t vozi brzinom 72 km/h i zaustavi se kočnicama. Koliko se topline oslobodi u kočnicama?

**Rješenje 008**

$$m = 400 \text{ t} = 400 \cdot 1000 \text{ kg} = 4 \cdot 10^5 \text{ kg}, \quad v = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad E_k = ?$$

Kinetička energija vlaka pretvorila se u toplinu.



$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot 400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 800 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 8 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m} = 8 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

**Vježba 008**

Vlak mase 800 t vozi brzinom 72 km/h i zaustavi se kočnicama. Koliko se topline oslobodi u kočnicama?

**Rezultat:**  $1.6 \cdot 10^8 \text{ J}.$

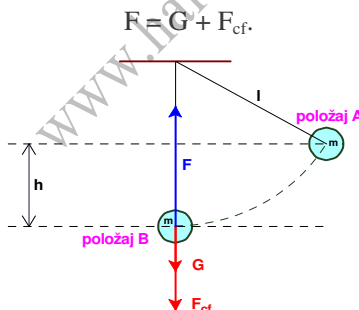
**Zadatak 009 (Martin, gimnazija)**

Na užetu duljine 1 m obješen je uteg mase 1 kg. Uže može izdržati najveću silu 11 N. Koliko visoko možemo podići uteg iz ravnotežnog položaja pa da se pri njihanju uža ne prekine? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 009**

$$l = 1 \text{ m}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad F = 11 \text{ N}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Kad se uteg njiše, uža napinje osim težine utega  $G$  još i centrifugalna sila  $F_{cf}$ . Najveća je napetost  $F$  kada uteg prolazi položajem ravnoteže.



Kad uteg dođe iz položaja A u položaj B ima brzinu:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

Tada je:

$$F = G + F_{cf} = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{l} = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{l} = m \cdot g \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{h}{l}\right).$$

Budući da su sve jedinice zapisane u SI sustavu, pišemo:

$$\begin{aligned} F = m \cdot g \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{h}{l}\right) &\Rightarrow 11 = 1 \cdot 10 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{h}{1}\right) \Rightarrow 11 = 10 \cdot (1 + 2 \cdot h) \quad /:10 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1.1 = 1 + 2 \cdot h \Rightarrow 2 \cdot h = 0.1 \quad /:2 \Rightarrow h = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

**Vježba 009**

Na užetu duljine 1 m obješen je uteg mase 1 kg. Uže može izdržati najveću silu 12 N. Koliko visoko možemo podići uteg iz ravnotežnog položaja pa da se pri njihanju uža ne prekine? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 10 cm.

**Zadatak 010 (Martin, gimnazija)**

Lopta mase 0.2 kg ispusti se sa visine 6 m iznad poda. Kolika se količina topline oslobodi pri prvom srazu lopte sa podom, ako između prvog i drugog sraza između lopte i poda prođu 2 s? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 010**

$$m = 0.2 \text{ kg}, \quad H = 6 \text{ m}, \quad \Delta t = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad Q = ?$$

Na visini H lopta mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot H.$$

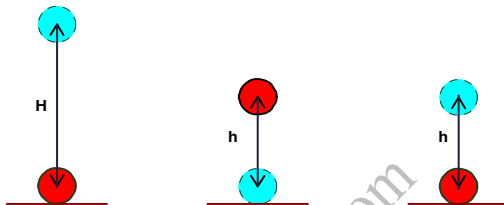
Kada udari o pod odbije se i podigne na visinu h. Sada će njezina gravitacijska potencijalna energija iznositi

$$E_{gp1} = m \cdot g \cdot h.$$

Razlika gravitacijskih potencijalnih energija pretvorila se u toplinu pri prvom srazu lopte sa podom:

$$Q = \Delta E_{gp} = E_{gp} - E_{gp1} = m \cdot g \cdot H - m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot (H - h).$$

Ako je između prvog i drugog sraza lopte sa podom prošlo  $\Delta t = 2 \text{ s}$ , onda je  $t = 1 \text{ s}$  vrijeme potrebno da lopta nakon prvog sraza postigne visinu h. Isto toliko vremena je potrebno da ponovno udari o pod (vertikalni hitac uvis !).



Visinu h izračunamo iz izraza:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s}^2 = 4.905 \text{ m}.$$

Razlika gravitacijskih potencijalnih energija na visinama H i h jednaka je gubitku energija pri udaru lopte o pod, tj. količini topline:

$$Q = E_{gp} - E_{gp1} = m \cdot g \cdot H - m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot (H - h) = 0.2 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6 \text{ m} - 4.905 \text{ m}) = 2.15 \text{ J}.$$

**Vježba 010**

Lopta mase 2 kg ispusti se sa visine 6 m iznad poda. Kolika se količina topline oslobodi pri prvom srazu lopte sa podom, ako između prvog i drugog sraza između lopte i poda prođu 2 s? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 21.5 J.

**Zadatak 011 (Marko, gimnazija)**

Kamen mase 200 g pao je s neke visine. Vrijeme padanja bilo je 1.44 s. Kolika je njegova kinetička energija na  $\frac{1}{4}$  puta?

**Rješenje 011**

$$m = 200 \text{ g} = [200 : 1000] = 0.2 \text{ kg}, \quad t = 1.44 \text{ s}, \quad s = \frac{1}{4} \text{ h}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad E_k = ?$$

1. inačica

Visina s koje kamen pada (slobodni pad!) je:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{4} \cdot h = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{8} \cdot g \cdot t^2.$$

Brzina padanja na kraju puta s iznosi:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot s$$

pa je kinetička energija jednaka:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g \cdot s = m \cdot g \cdot \frac{1}{8} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{8} \cdot m \cdot (g \cdot t)^2 = \frac{1}{8} \cdot 0.2 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1.44 \text{ s}\right)^2 \approx 5 \text{ J.}$$

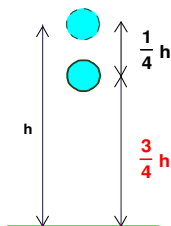
2. inačica

Zbroj je kinetičke i gravitacijske potencijalne energije stalan. Nađimo gravitacijsku potencijalnu energiju na maksimalnoj visini h:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow E_{gp} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (g \cdot t)^2.$$

Nakon što je tijelo prešlo četvrtinu puta, vrijedi:

$$E_k + \frac{3}{4} \cdot E_{gp} = E_{gp} \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot E_{gp} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot (g \cdot t)^2 = \frac{1}{8} \cdot m \cdot (g \cdot t)^2 = \frac{1}{8} \cdot 0.2 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1.44 \text{ s}\right)^2 \approx 5 \text{ J.}$$



### Vježba 011

Kamen mase 500 g pao je s neke visine. Vrijeme padanja bilo je 1.44 s. Kolika je njegova kinetička energija na  $\frac{1}{4}$  puta?

**Rezultat:** 12.5 J.

### Zadatak 012 (Martin, gimnazija)

Kugla polumjera  $R = 20 \text{ cm}$  kotrlja se (bez sklizanja) po horizontalnoj ravni brzinom  $v = 1 \text{ m/s}$ . Zatim naide na nizbrdnicu pa ponovno nastavlja po ravnom dijelu puta. S koliko se okretaja u sekundi kotrlja kugla na donjoj ravni ako je visinska razlika dviju ravni jednaka  $5 \text{ m}$ ? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , moment tromosti kugle s obzirom na os kroz središte kugle iznosi  $I = 0.25 \cdot m \cdot R^2$ )

### Rješenje 012

$R = 20 \text{ cm} = [20 : 100] = 0.2 \text{ m}$ ,  $v = 1 \text{ m/s}$ ,  $h = 5 \text{ m}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $I = 0.25 \cdot m \cdot R^2$ ,  $v = ?$

Kada se kugla kotrlja (bez sklizanja) po horizontalnoj ravni na visini h njezina se ukupna energija sastoji od kinetičke energije njezine translacije, kinetičke energije rotacije i gravitacijske potencijalne energije:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 + m \cdot g \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{5} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{7}{10} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h.$$

Zbog zakona o očuvanju energije ukupna energija kugle prije spuštanja niz kosinu jednaka je ukupnoj energiji nakon spuštanja:

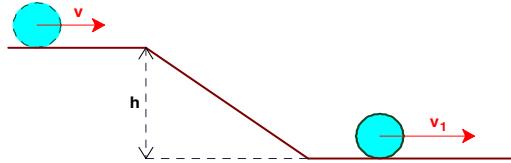
$$\frac{7}{10} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 \Rightarrow \frac{7}{10} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (R \cdot \omega_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{10}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot v^2 + 10 \cdot g \cdot h = 5 \cdot R^2 \cdot \omega_1^2 + 2 \cdot R^2 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow 7 \cdot v^2 + 10 \cdot g \cdot h = 7 \cdot R^2 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{7 \cdot v^2 + 10 \cdot g \cdot h}{7 \cdot R^2} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{7 \cdot v^2 + 10 \cdot g \cdot h}{7 \cdot R^2}} \Rightarrow v = \frac{\omega_1}{2\pi} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{7 \cdot \left(1 \frac{m}{s}\right)^2 + 10 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 5 m}{7 \cdot (0.2 m)^2}} = 6.7 \frac{\text{okr}}{s} = 6.7 \text{ Hz.}$$



### Vježba 012

Kugla polumjera  $R = 20 \text{ cm}$  kotrlja se (bez sklizanja) po horizontalnoj ravni brzinom  $v = 1 \text{ m/s}$ . Zatim naiđe na nizbrdicu pa ponovno nastavlja po ravnom dijelu puta. S koliko se okretaja u minuti kotrlja kugla na donjoj ravni ako je visinska razlika dviju ravni jednaka  $5 \text{ m}$ ? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , moment tromosti kugle s obzirom na os kroz središte kugle iznosi  $I = 0.25 \cdot m \cdot R^2$ )

**Rezultat:** 402 okr / min.

### Zadatak 013 (Ante, elektrotehnička škola)

Tijelo mase  $1 \text{ kg}$  bačeno je vertikalno uvis brzinom  $10 \text{ m/s}$ . Kolika mu je promjena potencijalne energije nakon  $1 \text{ sekunde}$  gibanja? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 013

$$m = 1 \text{ kg}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad t = 1 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta E_{gp} = ?$$

1. inačica

Određimo visinu  $h$  na koju se tijelo popne nakon vremena  $t$ :

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Tada je:

$$\Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot \left( v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right) = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left( 10 \frac{m}{s} \cdot 1 s - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1 s^2 \right) = 50 \text{ J.}$$

2. inačica

Budući da je tijelo bačeno brzinom  $v_0$ , ima kinetičku energiju:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2.$$

Nakon vremena  $t$  brzina iznosi  $v = v_0 - g \cdot t$  pa je kinetička energija jednaka:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0 - g \cdot t)^2.$$

Promjena kinetičke energije jednaka je povećanju gravitacijske potencijalne energije:

$$\begin{aligned} \Delta E_{gp} = E_{k1} - E_{k2} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0 - g \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot v_0 \cdot g \cdot t - \frac{1}{2} \cdot m \cdot g^2 \cdot t^2 = \\ &= m \cdot g \cdot t \cdot \left( v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \right) = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1 s \cdot \left( 10 \frac{m}{s} - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1 s \right) = 50 \text{ J.} \end{aligned}$$

### Vježba 013

Tijelo mase  $2 \text{ kg}$  bačeno je vertikalno uvis brzinom  $10 \text{ m/s}$ . Kolika mu je promjena potencijalne energije nakon  $1 \text{ sekunde}$  gibanja? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 100 J.

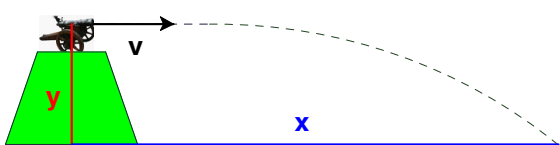


### Zadatak 014 (Miroslav, gimnazija)

Na 150 m visoku brežuljku postavljen je top iz kojega izleti u horizontalnom smjeru kugla mase 2 kg i padne na zemlju na udaljenosti 3000 m. Kolika je bila kinetička energija kugle u času kad je izletjela iz topa? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 014

$$y = 150 \text{ m}, \quad m = 2 \text{ kg}, \quad x = 3000 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad E_k = ?$$



Budući da je riječ o horizontalnom hicu, vrijedi:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot x^2}{v^2} \quad / \cdot \frac{v^2}{y} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot x^2}{y}$$

Kinetička energija kugle iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot x^2}{y} = \frac{1}{4} \cdot \frac{m \cdot g \cdot x^2}{y} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3000 \text{ m})^2}{150 \text{ m}} = 2.94 \cdot 10^5 \text{ J}$$

### Vježba 014

Na 150 m visoku brežuljku postavljen je top iz kojega izleti u horizontalnom smjeru kugla mase 4 kg i padne na zemlju na udaljenosti 3000 m. Kolika je bila kinetička energija kugle u času kad je izletjela iz topa? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $5.88 \cdot 10^5 \text{ J}$ .

### Zadatak 015 (Miroslav, gimnazija)

Tijelo je palo s visine 240 m i zarilo se u pijesak 0.2 m duboko. Odredi srednju silu otpora pijeska ako je tijelo mase 1 kg počelo padati brzinom 14 m/s. Otpor zraka zanemarimo. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 015

$$s = 240 \text{ m}, \quad s_1 = 0.2 \text{ m}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad v_0 = 14 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Slovo  $s$  označava visinu sa koje je tijelo počelo padati, a  $s_1$  je put što da je tijelo prešlo u pijesku.

1. inačica

Uporabit ćemo zakon gibanja. Pomoću izraza za trenutnu brzinu  $v$  dobije se akceleracija  $a$ :

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2 \cdot g \cdot s \\ v^2 &= 2 \cdot a \cdot s_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s_1 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot s \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot s_1} \Rightarrow a = \frac{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot s}{2 \cdot s_1}$$

Srednja sila otpora iznosi:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot s}{2 \cdot s_1} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\left(14 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 240 \text{ m}}{2 \cdot 0.2 \text{ m}} = 12262 \text{ N}$$

2. inačica

Uporabit ćemo zakon održanja energije. Ukupna energija tijela jednaka je zbroju kinetičke i gravitacijske potencijalne energije:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot s$$

Ukupna energija troši se na rad sile otpora pijeska:

$$E = W = F \cdot s_1 \Rightarrow F \cdot s_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot s \quad / \cdot \frac{1}{s_1} \Rightarrow F = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot s}{s_1} = \frac{m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v_0^2 + g \cdot s\right)}{s_1} = \frac{1 \text{ kg} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(14 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 240 \text{ m}\right)}{0.2 \text{ m}} = 12262 \text{ N}$$

### Vježba 015

Tijelo je palo s visine 240 m i zarilo se u pijesak 0.2 m duboko. Odredi srednju silu otpora pijeska ako je tijelo mase 2 kg počelo padati brzinom 14 m/s. Otpor zraka zanemarimo. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 24 524 N.

### Zadatak 016 (Slatkica, gimnazija)

Na kolica mase 1 kg koja leže na horizontalnoj podlozi i miruju, počinjemo djelovati stalnom silom 5 N u smjeru puta. Pod utjecajem sile kolica su prešla put 4 m bez trenja. Kolika je brzina kolica na kraju puta?

#### Rješenje 016

$$m = 1 \text{ kg}, \quad F = 5 \text{ N}, \quad s = 4 \text{ m}, \quad v = ?$$

1. inačica

Kinetička energija prenesena na kolica mase  $m$ , jednaka je radu koji je utrošila sila  $F$  da bi kolica prešla put  $s$ :

$$E_k = W \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = F \cdot s \quad / \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot F \cdot s}{m} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ N} \cdot 4 \text{ m}}{1 \text{ kg}}} = 6.32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



2. inačica

Ako je početna brzina nula, za tijelo mase  $m$  na koje je za vrijeme  $t$  djelovala sila  $F$  vrijedi:  $F \cdot t = m \cdot v$ , gdje je  $v$  brzina na kraju vremenskog intervala za koji je sila djelovala. Umnožak  $F \cdot t$  zovemo impulsom sile  $F$ , a umnožak  $m \cdot v$  količinom gibanja mase  $m$ .

Budući da na kolica djeluje sila, gibanje je jednoliko ubrzano pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} F \cdot t = m \cdot v \\ s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F \cdot t = m \cdot v \\ t = \frac{2 \cdot s}{v} \end{array} \right\} \Rightarrow F \cdot \frac{2 \cdot s}{v} = m \cdot v \quad / \cdot v \Rightarrow 2 \cdot F \cdot s = m \cdot v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot F \cdot s}{m} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ N} \cdot 4 \text{ m}}{1 \text{ kg}}} = 6.32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Vježba 016

Na kolica mase 1 kg koja leže na horizontalnoj podlozi i miruju, počinjemo djelovati stalnom silom 5 N u smjeru puta. Pod utjecajem sile kolica su prešla put 16 m bez trenja. Kolika je brzina kolica na kraju puta?

**Rezultat:**  $12.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### Zadatak 017 (Marina, medicinska škola)

Za vrijeme teškog tjelesnog rada ljudsko srce stegne se otprilike 150 puta u minuti. Pri svakom stezanju srce obavi rad jednak radu koji je potreban da se tijelo mase 0.5 kg digno 0.4 m visoko. Kolika je snaga srca? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 017

$$n = 150, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad m = 0.5 \text{ kg}, \quad h = 0.4 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad P = ?$$

Promjena gravitacijske potencijalne energije jednaka je radu potrebnom da se tijelo mase  $m$  podigne na visinu  $h$ :

$$\Delta E_{gp} = W = m \cdot g \cdot h.$$

Budući da se taj rad, u vremenu  $t$ , obavi  $n$  puta snaga ljudskog srca iznosi:

$$P = n \cdot \frac{W}{t} = n \cdot \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = 150 \cdot \frac{0.5 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.4 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 4.905 \text{ W}.$$

### Vježba 017

Za vrijeme teškog tjelesnog rada ljudsko srce stegne se otprilike 150 puta u minuti. Pri svakom stezanju srce obavi rad jednak radu koji je potreban da se tijelo mase 1 kg digno 0.2 m visoko. Kolika je snaga srca? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

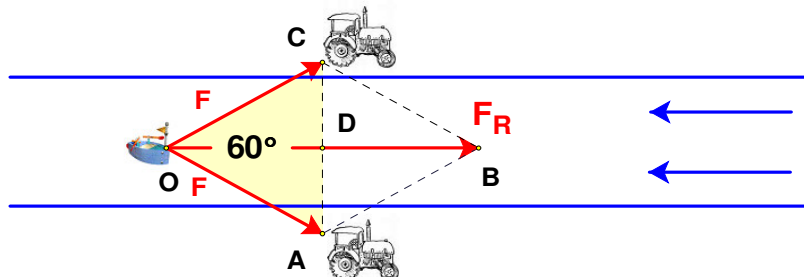
**Rezultat:** 4.905 W.

### Zadatak 018 (Force, gimnazija)

Dva traktora, svaki na jednoj obali rijeke, vuku uz tok rijeke natovareni čamac stalnom brzinom. Koliki rad treba utrošiti pri svladavanju tog otpora na putu 500 m ako su sile koje napinju užad međusobno jednake, iznose 4000 N i čine kut  $60^\circ$ ?

#### Rješenje 018

$$s = 500 \text{ m}, \quad F_1 = F_2 = F = 4000 \text{ N}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad W = ?$$



Budući da je trokut OAC jednakostraničan (ima kutove od  $60^\circ$ ), rezultantna sila  $F_r$  iznosi:

$$F_r = |OB| = 2 \cdot |OD| = 2 \cdot \frac{F \cdot \sqrt{3}}{2} = F \cdot \sqrt{3}.$$

Čamac se giba stalnom brzinom jer je rezultantna sila  $F_r$  jednaka otporu vode. Tada rad ima vrijednost:

$$W = F_r \cdot s = F \cdot \sqrt{3} \cdot s = 4000 \text{ N} \cdot \sqrt{3} \cdot 500 \text{ m} = 3.464 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

### Vježba 018

Dva traktora, svaki na jednoj obali rijeke, vuku uz tok rijeke natovareni čamac stalnom brzinom. Koliki rad treba utrošiti pri svladavanju tog otpora na putu 500 m ako su sile koje napinju užad međusobno jednake, iznose 6000 N i čine kut  $60^\circ$ ?

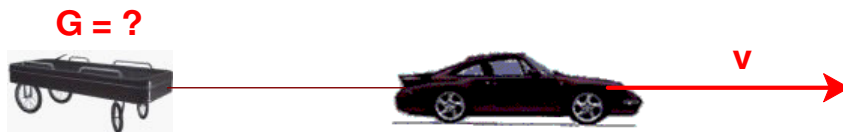
**Rezultat:**  $5.196 \cdot 10^6 \text{ J}$ .

### Zadatak 019 (Force, gimnazija)

Koliku težinu može vući automobil snage motora 22.05 kW po horizontalnom putu pri brzini 54 km/h ako je koeficijent trenja 0.15?

#### Rješenje 019

$$P = 22.05 \text{ kW} = 22050 \text{ W}, \quad v = 54 \text{ km/h} = [54 : 3.6] = 15 \text{ m/s}, \quad \mu = 0.15, \quad G = ?$$



Budući da vučna sila automobila svladava silu trenja  $F_{tr}$ , slijedi:

$$P = \frac{F_{tr} \cdot s}{t} = F_{tr} \cdot \frac{s}{t} = F_{tr} \cdot v \Rightarrow [F_{tr} = \mu \cdot G] \Rightarrow P = \mu \cdot G \cdot v \Rightarrow G = \frac{P}{\mu \cdot v} = \frac{22050 \text{ W}}{0.15 \cdot 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 9800 \text{ N}.$$

### Vježba 019

Koliku težinu može vući automobil snage motora 22.05 kW po horizontalnom putu pri brzini 54 km/h ako je koeficijent trenja 0.30?

**Rezultat:** 4900 N.

### Zadatak 020 (Force, gimnazija)

Dizalo mase 500 kg ubrza se akceleracijom od  $1 \text{ m/s}^2$  iz mirovanja do brzine 4 m/s, a zatim se nastavi dizati jednoliko po pravcu. Za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila trenja od 1000 N. Koliki je izvršeni rad za vrijeme ubrzavanja dizala?

#### Rješenje 020

$$m = 500 \text{ kg}, \quad a = 1 \text{ m/s}^2, \quad v = 4 \text{ m/s}, \quad F_{tr} = 1000 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad W = ?$$

Budući da motor dizala mora svladati silu težu, silu trenja i dizalo ubrzavati stalnom akceleracijom, sila koju motor mora proizvesti iznosi:

$$F = m \cdot g + m \cdot a + F_{tr}.$$

Pri tome je obavljeni rad motora jednak:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot g + m \cdot a + F_{tr} \\ s = \frac{v^2}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow W = F \cdot s = (m \cdot g + m \cdot a + F_{tr}) \cdot \frac{v^2}{2 \cdot a} =$$

$$= \left( 500 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 500 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 1000 \text{ N} \right) \cdot \frac{\left( 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 51.24 \text{ kJ}.$$

#### Vježba 020

Dizalo mase 500 kg ubrza se akceleracijom od  $1 \text{ m/s}^2$  iz mirovanja do brzine 8 m/s, a zatim se nastavi dizati jednoliko po pravcu. Za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila trenja od 1000 N. Koliki je izvršeni rad za vrijeme ubrzavanja dizala?

**Rezultat:** 204960 J.

