

Zadatak 801 (Doris, gimnazija)

Tijelo B pokrene se iz stanja mirovanja u trenutku kad pored njega prođe tijelo A koje se giba jednoliko. Tijelo B sustiže tijelo A jednolikim ubrzanim gibanjem i u trenutku kad ga sustigne tijelo B ima brzinu v . Koliko iznosi brzina tijela A?

Rješenje 801

$$v_a = \text{konst.}, \quad v_b = v, \quad v_a = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Kako naći da je

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t.$$

$$\left. \begin{array}{l} v = a \cdot t \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = a \cdot t \\ s = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot t) \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

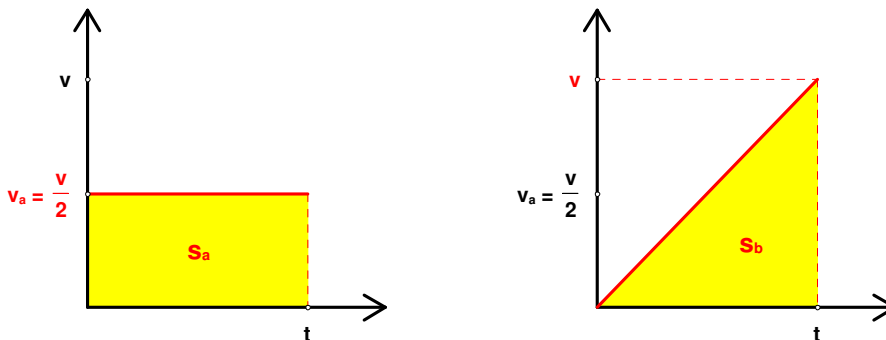
gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Gibanje tijela A i B promatramo iz iste početne točke. Nakon vremena t ponovno će se susresti. Tijelo A giba se jednoliko, a B jednoliko ubrzano. Prijedeći putovi jednaki su.

$$s_a = s_b \Rightarrow v_a \cdot t = \frac{1}{2} \cdot v_b \cdot t \Rightarrow v_a \cdot t = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow v_a \cdot t = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t / \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow v_a = \frac{1}{2} \cdot v.$$

Komentar!

Primijetimo da se prijedeći put može odrediti računajući površinu ispod krivulje $v(t)$.



Na prvom $v - t$ grafikonu put je po iznosu jednak površini pravokutnika.

$$s_a = t \cdot v_a \Rightarrow s_a = t \cdot \frac{v}{2} \Rightarrow s_a = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t.$$

Na drugom $v - t$ grafikonu put je po iznosu jednak površini pravokutnog trokuta.

$$s_b = \frac{t \cdot v}{2} \Rightarrow s_b = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t.$$

Slijedi

$$s_a = s_b \Rightarrow v_a = \frac{1}{2} \cdot v.$$

Vježba 801

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 802 (Mateo, gimnazija)

Kolika je vučna sila koja automobil težine 9.81 kN jednoliko ubrza na horizontalnoj ravnoj cesti od 36 km/h do 54 km/h za vrijeme od 5 s, ako za vrijeme gibanja na automobil djeluje sila trenja jednaka 3 % od težine automobila? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 802

$$G = 9.81 \text{ kN} = 9810 \text{ N}, \quad v_1 = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}, \quad v_2 = 54 \text{ km/h} = [54 : 3.6] = 15 \text{ m/s}, \quad t = 5 \text{ s}, \quad \mu = 3 \% = 0.03, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{G}{g},$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje po pravcu (jednoliko ubrzano (usporeno) pravocrtno gibanje) je gibanje tijela stalnom akceleracijom. Srednja akceleracija je količnik razlike brzina Δv u nekom vremenskom intervalu Δt i toga vremenskog intervala:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Trenutna akceleracija a je omjer promjene brzine Δv u neizmjerljivo malom vremenskom intervalu (trenutku) Δt i toga trenutka. Kada razmatramo slučajeve gibanja pri kojima se vrijednost akceleracije neće mijenjati, onda je:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.

Na primjer,

$$9 \% = \frac{9}{100}, \quad 81 \% = \frac{81}{100}, \quad 4.5 \% = \frac{4.5}{100}, \quad 547 \% = \frac{547}{100}, \quad p \% = \frac{p}{100}.$$

Kako se računa "... p% od x...?"

$$\frac{P}{100} \cdot x.$$

Vučna sila mora svladati silu trenja i ubrzati automobil na horizontalnoj cesti. Vučna sila F je rezultanta sile trenja F_{tr} i sile F_1 koja ubrzava automobil.

$$F = F_{tr} + F_1 \Rightarrow F = \mu \cdot G + m \cdot a \Rightarrow F = \mu \cdot G + \frac{G}{g} \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} \Rightarrow F = G \cdot \left(\mu + \frac{v_2 - v_1}{g \cdot t} \right) =$$

$$= 9810 \text{ N} \cdot \left(0.03 + \frac{\frac{15 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s}}{5 \text{ s}}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \right) = 1294.3 \text{ N}.$$

Vježba 802

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 803 (Dragec, srednja škola)

Zadana je jednačba gibanja $s = A \cdot t - B \cdot t^2$, gdje je $A = 2 \frac{m}{s}$ i $B = 0.3 \frac{m}{s^2}$.

- Kolika je početna brzina?
- Kolika je akceleracija?
- Odredite brzinu nakon 5 s gibanja.

Rješenje 803

$$s = A \cdot t - B \cdot t^2, \quad A = 2 \frac{m}{s}, \quad B = 0.3 \frac{m}{s^2}, \quad t = 5 \text{ s}, \quad v_0 = ?, \quad a = ?, \quad v = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v = v_0 - a \cdot t.$$

a) b)

Primijetimo da je $s = A \cdot t - B \cdot t^2$ jednačba puta za jednoliko usporeno gibanje. Usporedit ćemo jednačbe!

$$\left. \begin{array}{l} s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ s = A \cdot t - B \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = A \\ \frac{1}{2} \cdot a = B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = A \\ \frac{1}{2} \cdot a = B \cdot 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = A \\ a = 2 \cdot B \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 2 \frac{m}{s} \\ B = 0.3 \frac{m}{s^2} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = 2 \frac{m}{s} \\ a = 0.6 \frac{m}{s^2} \end{array} \right\}.$$

c)

Nakon 5 s brzina iznosi:

$$v = v_0 - a \cdot t = 2 \frac{m}{s} - 0.6 \frac{m}{s^2} \cdot 5 \text{ s} = -1 \frac{m}{s}.$$

Vježba 803

Zadana je jednačba gibanja $s = A \cdot t - B \cdot t^2$, gdje je $A = 10 \frac{m}{s}$ i $B = 5 \frac{m}{s^2}$.

- Kolika je početna brzina?
- Kolika je akceleracija?
- Odredite brzinu nakon 5 s gibanja.

Rezultat: $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $a = 10 \text{ m/s}^2$, $v = -40 \text{ m/s}$.

Zadatak 804 (Dragec, srednja škola)

Zadana je jednačba gibanja $s = A + B \cdot t + C \cdot t^2$, gdje je $A = 1 \text{ m}$, $B = 10 \frac{m}{s}$ i $C = 5 \frac{m}{s^2}$.

Izračunajte srednju brzinu tijela u intervalu $1 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$.

Rješenje 804

$$s = A + B \cdot t + C \cdot t^2, \quad A = 1 \text{ m}, \quad B = 10 \frac{m}{s}, \quad C = 5 \frac{m}{s^2}, \quad t_1 = 1 \text{ s}, \quad t_2 = 2 \text{ s}, \quad \bar{v} = ?$$

Srednja brzina tijela u vremenskom intervalu Δt jest kvocijent dijela puta Δs , što ga je tijelo prešlo za to vrijeme i vremenskog razmaka Δt :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Srednja (ili prosječna) brzina tijela (pri nejednolikom gibanju) definira se:

$$\bar{v} = \frac{\text{prijedeni dio puta}}{\text{pripadni dio vremena}}, \quad \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \quad \bar{v} = \frac{\text{ukupni prijedeni put}}{\text{ukupno vrijeme gibanja}}, \quad \bar{v} = \frac{s}{t}.$$

Prema definiciji srednje brzine slijedi:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \bar{v} = \frac{A + B \cdot t_2 + C \cdot t_2^2 - (A + B \cdot t_1 + C \cdot t_1^2)}{t_2 - t_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{v} &= \frac{A + B \cdot t_2 + C \cdot t_2^2 - A - B \cdot t_1 - C \cdot t_1^2}{t_2 - t_1} \Rightarrow \bar{v} = \frac{A + B \cdot t_2 + C \cdot t_2^2 - A - B \cdot t_1 - C \cdot t_1^2}{t_2 - t_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{v} &= \frac{B \cdot t_2 + C \cdot t_2^2 - B \cdot t_1 - C \cdot t_1^2}{t_2 - t_1} \Rightarrow \bar{v} = \frac{B \cdot (t_2 - t_1) + C \cdot (t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{v} &= \frac{B \cdot (t_2 - t_1) + C \cdot (t_2 - t_1) \cdot (t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} \Rightarrow \bar{v} = \frac{(t_2 - t_1) \cdot (B + C \cdot (t_2 + t_1))}{t_2 - t_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{v} &= \frac{(t_2 - t_1) \cdot (B + C \cdot (t_2 + t_1))}{t_2 - t_1} \Rightarrow \bar{v} = B + C \cdot (t_2 + t_1) = 10 \frac{m}{s} + 5 \frac{m}{s^2} \cdot (2 \text{ s} + 1 \text{ s}) = 25 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Vježba 804

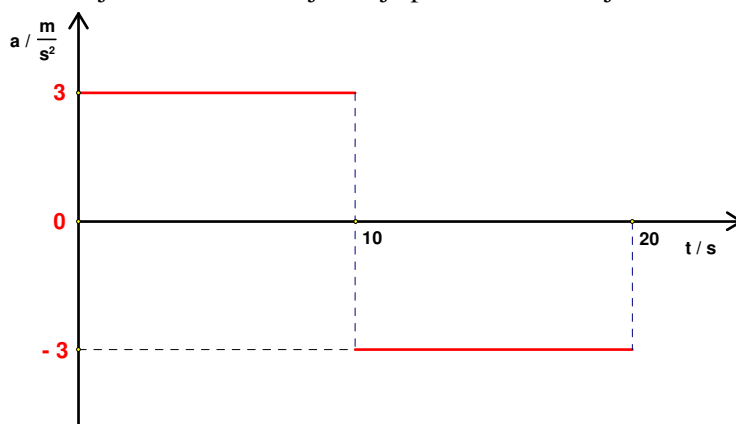
Zadana je jednačba gibanja $s = A + B \cdot t + C \cdot t^2$, gdje je $A = 2 \text{ m}$, $B = 10 \frac{m}{s}$ i $C = 5 \frac{m}{s^2}$.

Izračunajte srednju brzinu tijela u intervalu $2 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$.

Rezultat: 40 m/s .

Zadatak 805 (Ivica, maturant)

Ovisnost akceleracije o vremenu za gibanje nekog tijela predstavljena je dijagramom $a - t$. Izračunajte srednju brzinu tijela za 20 s, uz uvjet da je početna brzina tijela 0.



- A. $15 \frac{m}{s}$ B. $12 \frac{m}{s}$ C. $17 \frac{m}{s}$ D. $10 \frac{m}{s}$

Rješenje 805

$$t_1 = t_2 = t = 10 \text{ s}, \quad v_0 = 0, \quad \bar{v} = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Ista formula vrijedi i kod jednoliko usporenog gibanja.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Ista formula vrijedi i kod jednoliko usporenog gibanja.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t,$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Ista formula vrijedi i kod jednoliko usporenog gibanja.

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Srednja brzina tijela u vremenskom intervalu Δt jest kvocijent dijela puta Δs , što ga je tijelo prešlo za to vrijeme i vremenskog razmaka Δt :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Srednja (ili prosječna) brzina tijela (pri nejednolikom gibanju) definira se:

$$\bar{v} = \frac{\text{prijeđeni dio puta}}{\text{pripadni dio vremena}}, \quad \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \bar{v} = \frac{\text{ukupni prijeđeni put}}{\text{ukupno vrijeme gibanja}}, \quad \bar{v} = \frac{s}{t}.$$

1. inačica

Primijetimo da su u oba vremenska intervala akceleracije po iznosu jednake, ali imaju suprotne smjerove.

$$a_1 = a_2 = a = 3 \frac{m}{s^2}.$$

Tijelo ubrzava bez početne brzine i za vrijeme t prijeđe put

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

a konačna je brzina

$$v_1 = a \cdot t.$$

Zatim usporava akceleracijom a i za vrijeme t prevoli put

$$s_2 = v_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s_2 = a \cdot t \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s_2 = a \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Ukupni put iznosi:

$$s = s_1 + s_2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s = a \cdot t^2.$$

Srednja brzina je

$$\bar{v} = \frac{s}{t_1 + t_2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{s}{2 \cdot t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{a \cdot t^2}{2 \cdot t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{a \cdot t}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{m}{s^2} \cdot 10 s = 15 \frac{m}{s}.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Izračunamo putove s_1 i s_2 jer su zadani vremenski intervali

$$t_1 = t_2 = t = 10 s.$$

Za oba vremenska intervala akceleracije su po iznosu jednake.

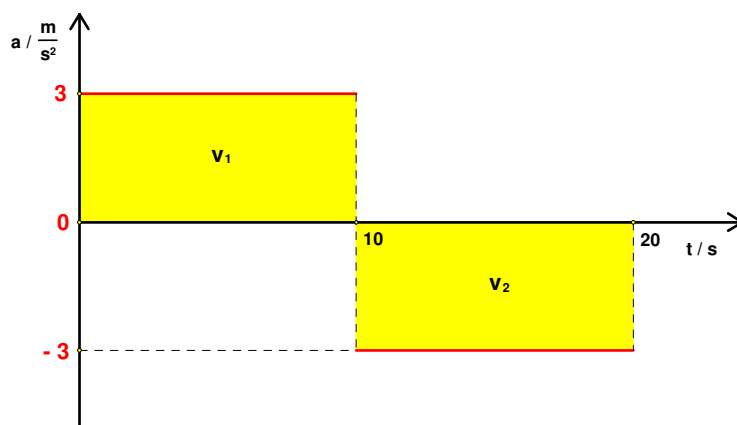
$$\left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{m}{s^2} \cdot (10 s)^2 \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{m}{s^2} \cdot (10 s)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_1 = 150 m \\ s_2 = 150 m \end{array} \right\}.$$

Srednja je brzina na cijelom putu:

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{2 \cdot t} = \frac{150 m + 150 m}{2 \cdot 10 s} = 15 \frac{m}{s}.$$

Odgovor je pod A.

3.inačica



Brzina se može izračunati kao površina ispod krivulje koja prikazuje zavisnost akceleracije o vremenu. U našem slučaju to su pravokutnici pa je prema slici

$$v_1 = a \cdot t \quad , \quad v_2 = a \cdot t.$$

Za putove vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot v_2 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\}$$

Srednja brzina na cijelom putu iznosi:

$$\begin{aligned} \bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} &\Rightarrow \bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{2 \cdot t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}{2 \cdot t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{a \cdot t^2}{2 \cdot t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{a \cdot t}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{m}{s^2} \cdot 10 s = 15 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 805

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 806 (Jopa, gimnazija)

Ulazeći u stanicu vlak počinje jednoliko usporavati. Izračunajte akceleraciju i početnu brzinu vlaka, ako prvih 50 m prijeđe za 5 s, a idućih 50 m za 7 s.

Rješenje 806

$$s_1 = 50 \text{ m}, \quad t_1 = 5 \text{ s}, \quad s_2 = 50 \text{ m}, \quad t_2 = 7 \text{ s}, \quad a = ?, \quad v_0 = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

1. inačica

Neka je v_0 početna brzina vlaka. Za prvi dio puta vrijedi

$$s_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2.$$

Za prvi i drugi dio puta bit će

$$s_1 + s_2 = v_0 \cdot (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2.$$

Zbog jednostavnosti pisat ćemo samo broježane vrijednosti bez fizikalnih jedinica (sve su jedinice napisane u SI sustavu).

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ s_1 + s_2 = v_0 \cdot (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50 = 5 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5^2 \\ 100 = 12 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 12^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50 = 5 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 25 \\ 100 = 12 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 144 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijentata} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50 = 5 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 25 \quad / \cdot 24 \\ 100 = 12 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 144 \quad / \cdot (-10) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1200 = 120 \cdot v_0 - 300 \cdot a \\ -1000 = -120 \cdot v_0 + 720 \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 = 420 \cdot a \Rightarrow 420 \cdot a = 200 \Rightarrow 420 \cdot a = 200 \quad / : 420 \Rightarrow a = 0.48 \frac{m}{s^2}.$$

Računamo početnu brzinu v_0 .

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} a &= 0.48 \\ 50 &= 5 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 50 = 5 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot 0.48 \cdot 25 \Rightarrow 50 = 5 \cdot v_0 - 6 \Rightarrow 5 \cdot v_0 - 6 = 50 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow 5 \cdot v_0 = 50 + 6 \Rightarrow 5 \cdot v_0 = 56 \Rightarrow 5 \cdot v_0 = 56 \text{ /: } 5 \Rightarrow v_0 = 11.2 \frac{m}{s}.
 \end{aligned}$$

2. inačica

Neka je v_0 početna brzina vlaka. Za prvi dio puta vrijedi

$$s_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2.$$

Drugi dio puta je razlika ukupnog puta i prvog dijela puta.

$$\begin{aligned}
 s_2 &= (s_1 + s_2) - s_1 \Rightarrow s_2 = v_0 \cdot (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 - \left(v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow s_2 = v_0 \cdot (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 - v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2.
 \end{aligned}$$

Zbog jednostavnosti pisat ćemo samo bročane vrijednosti bez fizikalnih jedinica (sve su jedinice napisane u SI sustavu).

$$\begin{aligned}
 & s_2 = v_0 \cdot (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 - v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & 50 = 12 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 12^2 - 5 \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5^2 \Rightarrow 50 = 12 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 144 - 5 \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 25 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow 50 = 7 \cdot v_0 - \frac{119}{2} \cdot a.
 \end{aligned}$$

Za jednadžbu s_1 je

$$s_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Rightarrow 50 = 5 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5^2 \Rightarrow 50 = 5 \cdot v_0 - \frac{25}{2} \cdot a.$$

Riješimo sustav

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} 50 &= 7 \cdot v_0 - \frac{119}{2} \cdot a \\ 50 &= 5 \cdot v_0 - \frac{25}{2} \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{aligned} 50 &= 7 \cdot v_0 - \frac{119}{2} \cdot a \text{ /} \cdot (-5) \\ 50 &= 5 \cdot v_0 - \frac{25}{2} \cdot a \text{ /} \cdot 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow & \left. \begin{aligned} -250 &= -35 \cdot v_0 + \frac{595}{2} \cdot a \\ 350 &= 35 \cdot v_0 - \frac{175}{2} \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 100 = 210 \cdot a \Rightarrow 210 \cdot a = 100 \Rightarrow 210 \cdot a = 100 \text{ /: } 210 \Rightarrow a = 0.48 \frac{m}{s}.
 \end{aligned}$$

Računamo početnu brzinu v_0 .

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} a &= 0.48 \\ 50 &= 5 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 50 = 5 \cdot v_0 - \frac{1}{2} \cdot 0.48 \cdot 25 \Rightarrow 50 = 5 \cdot v_0 - 6 \Rightarrow 5 \cdot v_0 - 6 = 50 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow 5 \cdot v_0 = 50 + 6 \Rightarrow 5 \cdot v_0 = 56 \Rightarrow 5 \cdot v_0 = 56 \text{ /: } 5 \Rightarrow v_0 = 11.2 \frac{m}{s}.
 \end{aligned}$$

Vježba 806

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 807 (Branko, gimnazija)

Predmet je izbačen vertikalno uvis brzinom 60 m / s. Nakon koliko vremena se nalazi na visini 100 m? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 807

$$v_0 = 60 \text{ m / s}, \quad h = 100 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad t = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom v_0 i slobodnog pada u suprotnom smjeru, stoga je put (visina) h dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \cdot / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot h = 2 \cdot v_0 \cdot t - g \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot t^2 - 2 \cdot v_0 \cdot t + 2 \cdot h = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g \cdot t^2 - 2 \cdot v_0 \cdot t + 2 \cdot h = 0 \\ a = g, \quad b = -2 \cdot v_0, \quad c = 2 \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = g, \quad b = -2 \cdot v_0, \quad c = 2 \cdot h \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-2 \cdot v_0) \pm \sqrt{(-2 \cdot v_0)^2 - 4 \cdot g \cdot 2 \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4 \cdot v_0^2 - 8 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4 \cdot (v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h)}}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot v_0 \pm 2 \cdot \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot (v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot (v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}}{g} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}}{g} \\ t_2 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}}{g} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{60 \frac{m}{s} + \sqrt{\left(60 \frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 100 m}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \\ t_2 = \frac{60 \frac{m}{s} - \sqrt{\left(60 \frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 100 m}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 10.24 \text{ s pri povratku} \\ t_2 = 1.99 \text{ s pri uspinjanju} \end{array} \right\}$$

Vježba 807

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 808 (Luka, maturant)

Na tijelo mase 1 kg djeluje sila od 10.81 N okomito uvis. Za koliko će se tijelo podići tijekom 10 s gibanja? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

A. 48 m B. 50 m C. 54 m D. 60 m

Rješenje 808

$$m = 1 \text{ kg}, \quad F = 10.81 \text{ N}, \quad t = 10 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže. Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Budući da su sile \vec{F} i \vec{G} suprotnog smjera, tijelo se giba djelovanjem rezultantne sile

$$F_r = F - G \Rightarrow F_r = F - m \cdot g.$$

Prema drugom Newtonovu poučku ubrzanje tijela je

$$a = \frac{F_r}{m} \Rightarrow a = \frac{F - m \cdot g}{m} \Rightarrow a = \frac{F}{m} - g.$$

Prijeđeni put s iznosi:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F}{m} - g \right) \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10.81 \text{ N}}{1 \text{ kg}} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot (10 \text{ s})^2 = 50 \text{ m}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 808

Na tijelo mase 2 kg djeluje sila od 21.62 N okomito uvis. Za koliko će se tijelo podići tijekom 10 s gibanja? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

A. 48 m B. 50 m C. 54 m D. 60 m

Rezultat: B.

Zadatak 809 (MP4, gimnazija)

Ulazeći u stanicu vlak počinje jednoliko usporavati. Izračunajte akceleraciju vlaka ako prvih 50 m prijeđe za 5 s, a sljedećih 50 m za 7 s.

Rješenje 809

$$s_1 = 50 \text{ m}, \quad t_1 = 5 \text{ s}, \quad s_2 = 50 \text{ m}, \quad t_2 = 7 \text{ s}, \quad a = ?$$

Za jednoliko **usporeno** pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko **ubrzano** pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Uvjeti u zadatku daju sustav jednačnja.

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ s_1 + s_2 &= v_0 \cdot (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 \end{aligned} \right\}$$

Iz prve jednačnje nađemo v_0 .

$$\begin{aligned} s_1 &= v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Rightarrow v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = s_1 \Rightarrow v_0 \cdot t_1 \Rightarrow v_0 \cdot t_1 = s_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_0 \cdot t_1 = s_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \quad / \cdot \frac{1}{t_1} \Rightarrow v_0 = \frac{s_1}{t_1} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1. \end{aligned}$$

Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} v_0 &= \frac{s_1}{t_1} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 \\ s_1 + s_2 &= v_0 \cdot (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s_1 + s_2 = \left(\frac{s_1}{t_1} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 \right) \cdot (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_1 + s_2 = (t_1 + t_2) \cdot \left(\frac{s_1}{t_1} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_1 + s_2 = (t_1 + t_2) \cdot \left(\frac{s_1}{t_1} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_1 + s_2 = (t_1 + t_2) \cdot \left(\frac{s_1}{t_1} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 \right) \Rightarrow s_1 + s_2 = (t_1 + t_2) \cdot \left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_1 + s_2 = (t_1 + t_2) \cdot \left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 \right) \quad / \cdot \frac{1}{t_1 + t_2} \Rightarrow \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1}{t_1} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} \quad / \cdot \frac{2}{t_2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s_1}{t_1 \cdot t_2} - \frac{2 \cdot (s_1 + s_2)}{t_2 \cdot (t_1 + t_2)} = \\ &= \frac{2 \cdot 50 \text{ m}}{5 \text{ s} \cdot 7 \text{ s}} - \frac{2 \cdot (50 \text{ m} + 50 \text{ m})}{7 \text{ s} \cdot (5 \text{ s} + 7 \text{ s})} = 0.48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Vlak usporava akceleracijom $a = 0.48 \text{ m/s}^2$.

Da smo postavili sustav jednačnja

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ s_1 + s_2 &= v_0 \cdot (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 \end{aligned} \right\}$$

dobili bismo $a = -0.48 \text{ m/s}^2$. Predznak minus označava usporavanje vlaka akceleracijom a .

Vježba 809

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 810 (Ivana, gimnazija)

Cesta na zavoju nagnuta je prema unutarnjoj strani zavoja tako da bi za određenu brzinu horizontalna komponenta reakcije sile ceste na automobil bila jednaka potrebnoj centripetalnoj sili.

a) Koliki mora biti nagib ceste na zavoju polumjera zakrivljenosti 100 m da bi automobil mogao voziti brzinom od 60 km/h nezavisno od trenja?

b) Kada cesta ne bi bila nagnuta koliki bi trebao biti minimalni koeficijent trenja pri toj brzini? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 810

$$r = 100 \text{ m}, \quad v = 60 \text{ km/h} = [60 : 3.6] = 16.67 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?, \quad \mu = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.

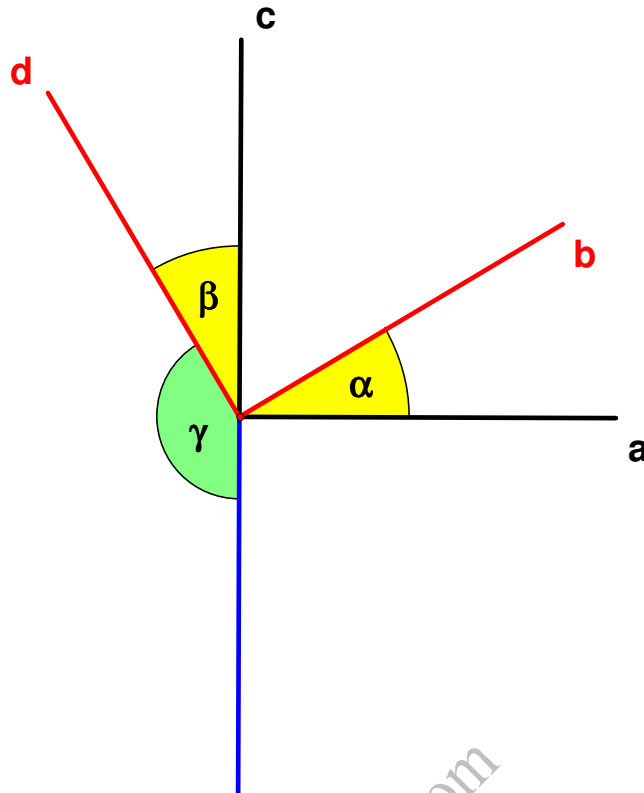
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Kutovi s okomitim kracima sukladni su ili suplementarni.

$$\left. \begin{aligned} a \perp c \\ b \perp d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha = \beta \\ \alpha + \gamma = 180^\circ \end{aligned} \right\}.$$



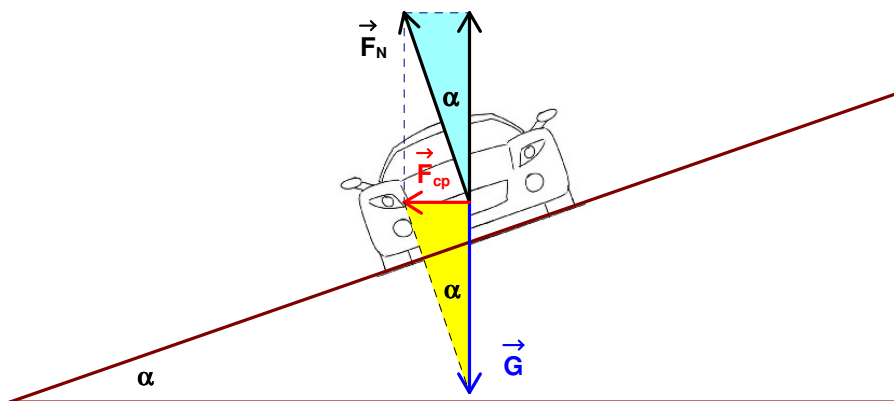
Na automobil djeluju dvije sile:

- sila teža $G = m \cdot g$
- okomita reakcija podloge F_N .

Rezultanta tih sila u slučaju optimalnog nagiba mora biti jednaka centripetalnoj sili

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

a)



Uočimo pravokutan trokut (žuti ili plavi) i uporabimo funkciju tangens.

$$tg(\alpha) = \frac{F_{cp}}{G} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{v^2}{r \cdot g} \Rightarrow \alpha = tg^{-1} \left(\frac{v^2}{r \cdot g} \right) =$$

$$= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\left(16.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{100 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) = 15.82^\circ.$$

Nagib ceste ovisi samo o brzini i polumjeru zakrivljenosti zavoja, a ne ovisi o masi vozila.

b)

Maksimalna centripetalna sila koja može proizvesti trenje je

$$\begin{aligned} F_{tr} = F_{cp} &\Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} / \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{r \cdot g} = \\ &= \frac{\left(16.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{100 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.28. \end{aligned}$$

Vježba 810

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 811 (Hrvoje, gimnazija)

Sa vrha tornja jedno je tijelo bačeno vertikalno uvis, a drugo nadolje istom brzinom $v_0 = 5 \text{ m/s}$, u istom trenutku. Poslije koliko će vremena međusobna udaljenost tijela biti jednaka desetini visine tornja, ako tijelo izbačeno dolje udari o zemlju 5 s nakon izbacivanja? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 811

$$v_0 = 5 \text{ m/s}, \quad t = 5 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t_1 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom v_0 i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina) h dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Vertikalni hitac prema gore (uvis) je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom v_0 i slobodnog pada u suprotnom smjeru, stoga je put (visina) h dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Najprije izračunamo visinu h tornja.

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5 \text{ s})^2 = 147.63 \text{ m}.$$

Neka je t_1 vrijeme nakon kojeg tijelo bačeno gore prevali put h_1 , a ono bačeno dolje put h_2 .

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \\ h_2 &= v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow h_1 + h_2 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 + v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 + v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow h_1 + h_2 = v_0 \cdot t_1 + v_0 \cdot t_1 \Rightarrow h_1 + h_2 = 2 \cdot v_0 \cdot t_1.$$

Iz uvjeta u zadatku slijedi:

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{10} \cdot h \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t_1 = \frac{1}{10} \cdot h \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t_1 = \frac{1}{10} \cdot h / \cdot \frac{1}{2 \cdot v_0} \Rightarrow t_1 = \frac{h}{20 \cdot v_0} =$$

$$= \frac{147.63 \text{ m}}{20 \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1.48 \text{ s.}$$

Vježba 811

Sa vrha tornja jedno je tijelo bačeno vertikalno uvis, a drugo nadolje istom brzinom $v_0 = 5 \text{ m/s}$, u istom trenutku. Poslije koliko će vremena međusobna udaljenost tijela biti jednaka petini visine tornja, ako tijelo izbačeno dolje udari o zemlju 5 s nakon izbacivanja?

Rezultat: 2.95 s.

Zadatak 812 (Zlatko, tehnička škola)

Iskočivši iz aviona, padobranac slobodno pada bez trenja. Nakon 70 m slobodnog padanja otvora padobran i brzina padanja se počinje smanjivati deceleracijom od 2 m/s^2 . Padobranac se prizemljuje brzinom 3 m/s . Izračunajte visinu na kojoj je iskočio. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 812

$$h_1 = 70 \text{ m}, \quad a = 2 \text{ m/s}^2, \quad v = 3 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Deceleracija: ubrzanje koje ima smjer suprotan od smjera brzine.

Deceleracija: smanjivanje brzine gibanja u jedinici vremena, usporavanje.

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

gdje je v konačna brzina, h visina pada.

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v = v_0 - a \cdot t.$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$



Visina h na kojoj je padobranac iskočio jednaka je zbroju visine h_1 slobodnog pada i visine h_2 tijekom koje se brzina smanjuje deceleracijom a .

$$h = h_1 + h_2.$$

Slobodnim padom padobranac je prešao put h_1 i na kraju tog dijela puta ima brzinu

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}.$$

Brzina v_0 početna je brzina za dio puta h_2 kada padobranac usporava deceleracijom a . On je prizemljio brzinom v za koju vrijedi:

$$v = v_0 - a \cdot t \Rightarrow a \cdot t = v_0 - v \Rightarrow a \cdot t = v_0 - v / \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow t = \frac{v_0 - v}{a}.$$

Put h_2 , kada padobranac usporava, opisuje jednačina

$$h_2 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Računamo visinu h .

$$\begin{aligned} h &= h_1 + h_2 \Rightarrow h = h_1 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow h = h_1 + v_0 \cdot \frac{v_0 - v}{a} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v_0 - v}{a} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow h = h_1 + \frac{v_0 - v}{a} \cdot \left(v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{v_0 - v}{a} \right) \Rightarrow h = h_1 + \frac{v_0 - v}{a} \cdot \left(v_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{v_0 - v}{a} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow h = h_1 + \frac{v_0 - v}{a} \cdot \left(v_0 - \frac{1}{2} \cdot (v_0 - v) \right) \Rightarrow h = h_1 + \frac{v_0 - v}{a} \cdot \left(v_0 - \frac{1}{2} \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot v \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow h = h_1 + \frac{v_0 - v}{a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot v \right) \Rightarrow h = h_1 + \frac{v_0 - v}{2 \cdot a} \cdot (v_0 + v) \Rightarrow h = h_1 + \frac{v_0^2 - v^2}{2 \cdot a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \right] \Rightarrow h = h_1 + \frac{\left(\sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \right)^2 - v^2}{2 \cdot a} \Rightarrow h = h_1 + \frac{2 \cdot g \cdot h_1 - v^2}{2 \cdot a} = \\ &= 70 \text{ m} + \frac{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 70 \text{ m} - \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 411.1 \text{ m}. \end{aligned}$$

Vježba 812

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 813 (Zdravko, tehnička škola)

Automobil težine 8000 N penje se uz brijeg nagnut 35° prema horizontu. Na putu od 40 m brzina mu se povećava od 20 m/s do 40 m/s. Kolika je sila potrebna za gibanje automobila, ako je faktor trenja 0.15? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 813

$$G = 8000 \text{ N}, \quad \alpha = 35^\circ, \quad s = 40 \text{ m}, \quad v_0 = 20 \text{ km/h} = [20 : 3.6] = 5.56 \text{ m/s}, \\ v = 40 \text{ km/h} = [40 : 3.6] = 11.11 \text{ m/s}, \quad \mu = 0.15, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{G}{g},$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek

počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot s}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

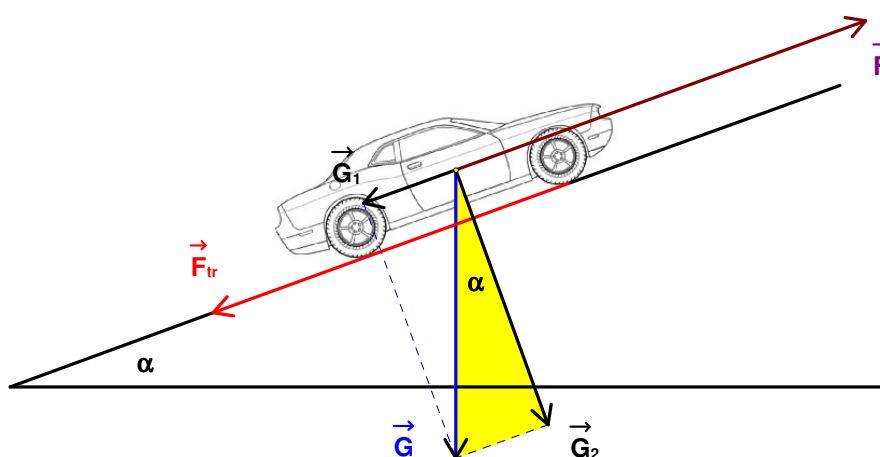
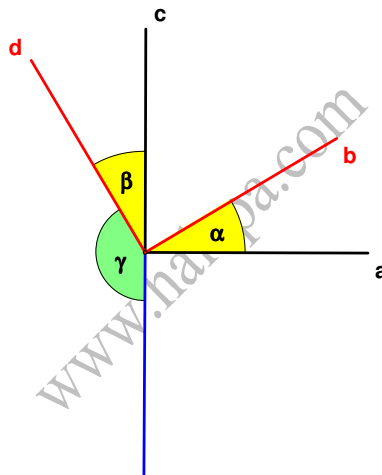
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Kutovi s okomitim kracima sukladni su ili suplementarni.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \alpha + \gamma = 180^\circ \end{array} \right\}.$$



Iz pravokutnog trokuta (žuta boja) odredimo izraze za komponente G_1 i G_2 sile teže G .

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\alpha) = \frac{G_1}{G} \\ \cos(\alpha) = \frac{G_2}{G} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{G_1}{G} = \sin(\alpha) \\ \frac{G_2}{G} = \cos(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{G_1}{G} = \sin(\alpha) \cdot G \\ \frac{G_2}{G} = \cos(\alpha) \cdot G \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} G_1 = G \cdot \sin(\alpha) \\ G_2 = G \cdot \cos(\alpha) \end{array} \right\}.$$

Sila F , potrebna za gibanje automobila, umanjena za sile G_1 i F_{tr} daje rezultantnu silu $m \cdot a$ koja ubrzava automobil uz brijeg.

$$F - G_1 - F_{tr} = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot a + G_1 + F_{tr} \Rightarrow F = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot s} + G \cdot \sin(\alpha) + \mu \cdot G_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot s} + G \cdot \sin(\alpha) + \mu \cdot G \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow F = G \cdot \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot g \cdot s} + \sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha) \right) \Rightarrow$$

$$= 8000 \text{ N} \cdot \left(\frac{\left(11.11 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(5.56 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 40 \text{ m}} + \sin(35^\circ) + 0.15 \cdot \cos(35^\circ) \right) = 6514.7 \text{ N}.$$

Vježba 813

Automobil težine 4000 N penje se uz brijeg nagnut 35° prema horizontu. Na putu od 40 m brzina mu se povećava od 20 m/s do 40 m/s. Kolika je sila potrebna za gibanje automobila, ako je faktor trenja 0.15? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 3257.3 N.

Zadatak 814 (Sara, maturantica)

Kako se dugo spušta tijelo niz kosinu visine 2 m i nagiba 45° , ako je maksimalni kut pri kojem tijelo može mirovati na kosini 30° ? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 814

$$h = 2 \text{ m}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \beta = 30^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2},$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

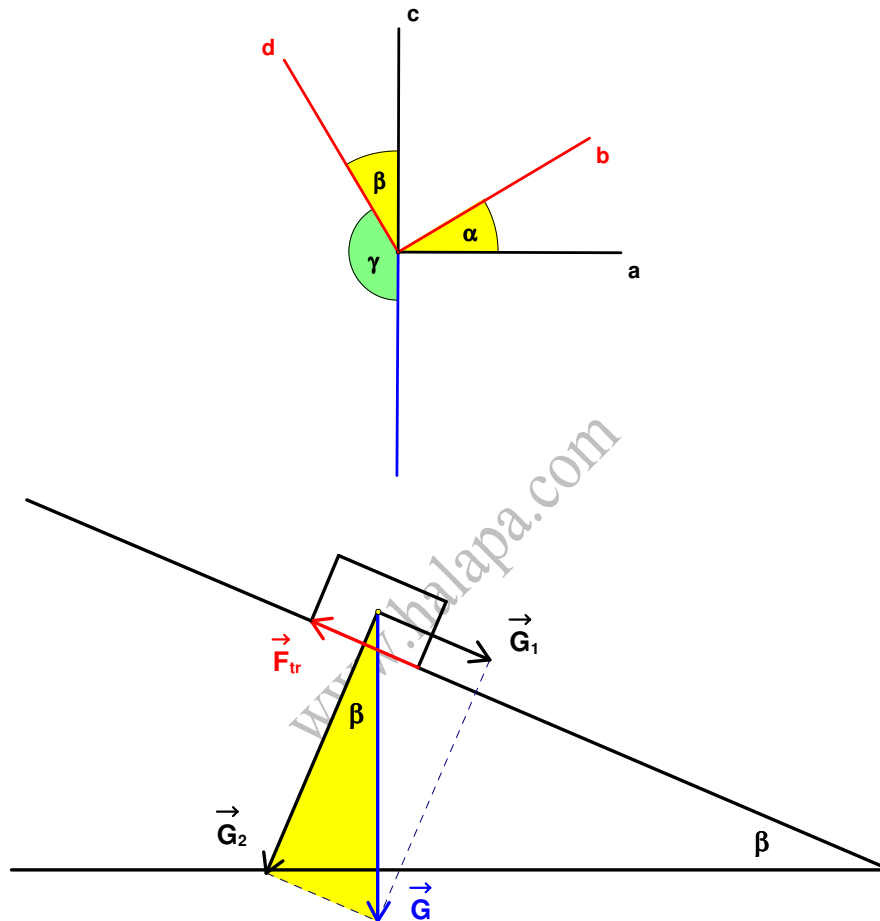
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Kutovi s okomitim kracima sukladni su ili suplementarni.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \alpha + \gamma = 180^\circ \end{array} \right\}$$



Silu G rastavimo na dvije komponente: G_1 u smjeru kosine i G_2 okomito na kosinu.

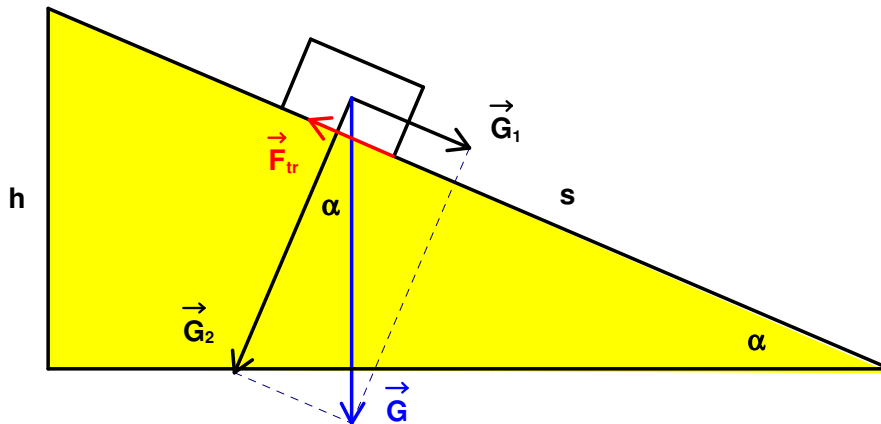
Iz pravokutnog trokuta (žuta boja) odredimo izraze za komponente G_1 i G_2 sile teže G .

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\beta) = \frac{G_1}{G} \\ \cos(\beta) = \frac{G_2}{G} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{G_1}{G} = \sin(\beta) \\ \frac{G_2}{G} = \cos(\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{G_1}{G} = \sin(\beta) \cdot G \\ \frac{G_2}{G} = \cos(\beta) \cdot G \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} G_1 = G \cdot \sin(\beta) \\ G_2 = G \cdot \cos(\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} G_1 = m \cdot g \cdot \sin(\beta) \\ G_2 = m \cdot g \cdot \cos(\beta) \end{array} \right\}$$

Budući da na kosini nagiba β tijelo miruje, sila trenja F_{tr} po iznosu jednaka je komponenti G_1 sile teže G .

$$F_{tr} = G_1 \Rightarrow \mu \cdot G_2 = G_1 \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\beta) = m \cdot g \cdot \sin(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\beta) = m \cdot g \cdot \sin(\beta) \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot g \cdot \cos(\beta)} \Rightarrow \mu = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \Rightarrow \mu = \operatorname{tg}(\beta).$$



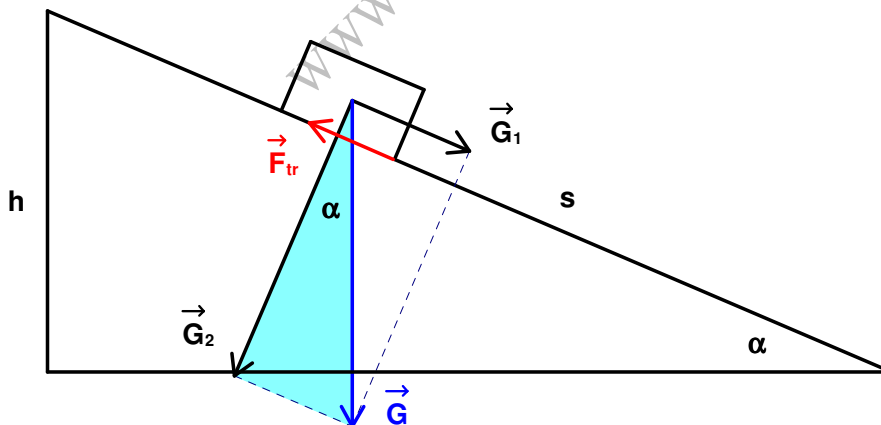
Na kosini nagiba α tijelo se spušta sa visine h . Prijedeni put s iznosi:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{s} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{h}{s} \quad / \cdot \frac{s}{\sin(\alpha)} \Rightarrow s = \frac{h}{\sin(\alpha)}.$$

Također vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\alpha) = \frac{G_1}{G} \\ \cos(\alpha) = \frac{G_2}{G} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{G_1}{G} = \sin(\alpha) \\ \frac{G_2}{G} = \cos(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{G_1}{G} = \sin(\alpha) \quad / \cdot G \\ \frac{G_2}{G} = \cos(\alpha) \quad / \cdot G \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} G_1 = G \cdot \sin(\alpha) \\ G_2 = G \cdot \cos(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} G_1 = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \\ G_2 = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \end{array} \right\}.$$



Na kosini nagiba α tijelo se spušta i rezultantna sila F koja ga ubrzava jednaka je razlici sila G_1 i F_{tr} .

$$F = G_1 - F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = G \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot G_2 \Rightarrow [\mu = \operatorname{tg}(\beta)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = g \cdot \sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow a = g \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha)) \Rightarrow \left[a = \frac{2 \cdot s}{t^2} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t^2} &= g \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha)) \Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t^2} = g \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha)) / \cdot t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot s = g \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha)) \cdot t^2 \Rightarrow \left[s = \frac{h}{\sin(\alpha)} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot \frac{h}{\sin(\alpha)} = g \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha)) \cdot t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2 \cdot h}{\sin(\alpha)} = g \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha)) \cdot t^2 / \cdot \frac{1}{g \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin(\alpha) \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha))} = t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin(\alpha) \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin(\alpha) \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha))} / \sqrt{\quad} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin(\alpha) \cdot (\sin(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha))}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin(45^\circ) \cdot (\sin(45^\circ) - \operatorname{tg}(30^\circ) \cdot \cos(45^\circ))}} = 1.39 \text{ s.} \end{aligned}$$

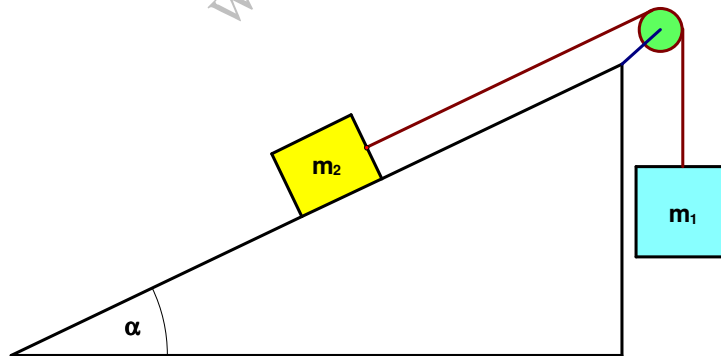
Vježba 814

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 815 (Luka, maturant)

Za sustav utega s kolotutom, prikazan na slici, poznate su sljedeće veličine: $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ i prikloni kut kosine $\alpha = 50^\circ$. Izračunajte vrijednost faktora trenja μ takvu da omogućuje gibanje utega jednolikom brzinom. Trenje između kolotura i konca valja zanemariti.



Rješenje 815

$$m_1 = 2 \text{ kg}, \quad m_2 = 1.2 \text{ kg}, \quad \alpha = 50^\circ, \quad \mu = ?$$

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela

padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

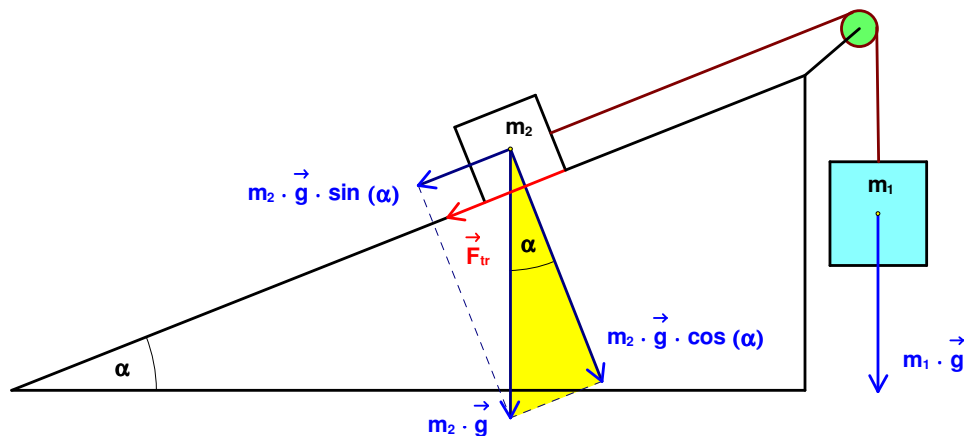
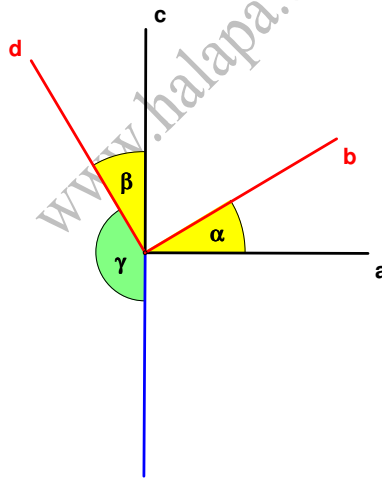
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Kutovi s okomitim kracima sukladni su ili suplementarni.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \alpha + \gamma = 180^\circ \end{array} \right\}$$



Silu $m_2 \cdot g$ rastavimo na dvije komponente: $m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ u smjeru kosine i $m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha)$ okomito na kosinu.

Sa slike vidi se da jednadžba gibanja glasi:

- za uteg mase m_1

$$m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - N$$

- za uteg mase m_2

$$m_2 \cdot a = N - m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) - F_{tr} \Rightarrow m_2 \cdot a = N - m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha),$$

gdje je a akceleracija utega, N sila napetosti niti.

Iz sustava jednadžba dobije se:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot a &= m_1 \cdot g - N \\ m_2 \cdot a &= N - m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_1 \cdot g - N + N - m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = m_1 \cdot g - N + N - m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = g \cdot (m_1 - m_2 \cdot \sin(\alpha) + \mu \cdot m_2 \cdot \cos(\alpha)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = g \cdot (m_1 - m_2 \cdot (\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = g \cdot (m_1 - m_2 \cdot (\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha))) \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{g \cdot (m_1 - m_2 \cdot (\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)))}{m_1 + m_2}.$$

Utezi se gibaju jednoliko pa akceleracija mora biti jednaka nuli (prvi Newtonov poučak).

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{g \cdot (m_1 - m_2 \cdot (\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)))}{m_1 + m_2} \\ a &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{g \cdot (m_1 - m_2 \cdot (\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)))}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot (m_1 - m_2 \cdot (\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha))) = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 \cdot (\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m_2 \cdot (\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)) = -m_1 \Rightarrow -m_2 \cdot (\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)) = -m_1 \cdot \left(-\frac{1}{m_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha) = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \mu \cdot \cos(\alpha) = \frac{m_1}{m_2} - \sin(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \cdot \cos(\alpha) = \frac{m_1}{m_2} - \sin(\alpha) \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \mu = \frac{m_1}{m_2 \cdot \cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{m_1}{m_2 \cdot \cos(\alpha)} - \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2 \text{ kg}}{1.2 \text{ kg} \cdot \cos(50^\circ)} - \operatorname{tg}(50^\circ) = 1.4.$$

2.inačica

Utezi se gibaju jednoliko. Zato sila teža utega mase m_1 mora biti po iznosu jednaka zbroju sila $m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ i F_{tr} .

$$\begin{aligned}
m_1 \cdot g &= m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) + F_{tr} \Rightarrow m_1 \cdot g = m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) + \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \\
\Rightarrow m_1 \cdot g &= m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) + \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad / \cdot \frac{1}{m_2 \cdot g} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \\
\Rightarrow -\mu \cdot \cos(\alpha) &= \sin(\alpha) - \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow -\mu \cdot \cos(\alpha) = \sin(\alpha) - \frac{m_1}{m_2} \quad / \cdot \left(-\frac{1}{\cos(\alpha)} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu &= \frac{m_1}{m_2 \cdot \cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \mu = \frac{m_1}{m_2 \cdot \cos(\alpha)} - \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2 \text{ kg}}{1.2 \text{ kg} \cdot \cos(50^\circ)} - \operatorname{tg}(50^\circ) = 1.4.
\end{aligned}$$

Vježba 815

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 816 (Dario, maturant)

Gibajući se stalnom brzinom $v_0 = 40 \text{ km/h}$ automobil počinje kočiti i nakon 4.6 s kočenja prijeđe upravo dvostruki put od onog koji je prešao u prvih 1.5 s kočenja. Kolika je akceleracija kočenja?

Rješenje 816

$$v_0 = 40 \text{ km/h} = [40 : 3.6] = 11.11 \text{ m/s}, \quad t_1 = 4.6 \text{ s}, \quad t_2 = 1.5 \text{ s}, \quad a = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= 2 \cdot s_2 \Rightarrow v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = 2 \cdot \left(v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \right) \Rightarrow v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = 2 \cdot v_0 \cdot t_2 - a \cdot t_2^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow a \cdot t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 &= 2 \cdot v_0 \cdot t_2 - v_0 \cdot t_1 \Rightarrow a \cdot \left(t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot t_1^2 \right) = v_0 \cdot (2 \cdot t_2 - t_1) \Rightarrow \\
\Rightarrow a \cdot \left(t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot t_1^2 \right) &= v_0 \cdot (2 \cdot t_2 - t_1) \quad / \cdot \frac{1}{t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot t_1^2} \Rightarrow a = \frac{v_0 \cdot (2 \cdot t_2 - t_1)}{t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot t_1^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{11.11 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (2 \cdot 1.5 \text{ s} - 4.6 \text{ s})}{\left(1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(4.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2} = 2.13 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.
\end{aligned}$$

Akceleracija kočenja je $a = 2.13 \text{ m/s}^2$.

Može i ovako: akceleracija automobila je $a = -2.13 \text{ m/s}^2$.

Vježba 816

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 817 (Ljerka, veleučilište)

Tijelo je smješteno na kosinu nagiba α . Koju akceleraciju treba imati kosina u horizontalnom smjeru da bi tijelo slobodno padalo? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 817

$$\alpha, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

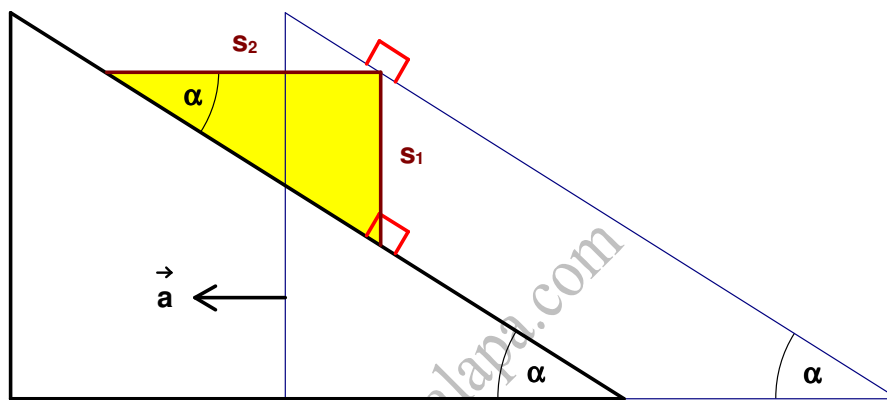
$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Kotangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine katete nasuprot tog kuta.



Za vrijeme t :

- tijelo će slobodno padati i prijeći vertikalnu udaljenost s_1 :

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

- kosina će se pomaknuti, akceleracijom a , za put s_2 :

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Ako je tijelo stalno u dodiru s kosinom onda je (koristimo funkciju kotangens na pravokutnom trokutu)

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{s_2}{s_1} &\Rightarrow \operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2} \Rightarrow \operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{1 \cdot a \cdot t^2}{1 \cdot g \cdot t^2} \Rightarrow \operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{a}{g} \Rightarrow \frac{a}{g} = \operatorname{ctg}(\alpha) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{a}{g} = \operatorname{ctg}(\alpha) \cdot g \Rightarrow a = g \cdot \operatorname{ctg}(\alpha). \end{aligned}$$

Vježba 817

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 818 (Tomo, srednja škola)

Dva su vagona s masama $m_1 = 10 \text{ t}$ i $m_2 = 20 \text{ t}$ međusobno spojena i stoje na horizontalnim tračnicama. Koliko silom je napregnuta spojka ako vagon manje mase vučemo silom $3 \cdot 10^4 \text{ N}$? (Zanemarite trenje.)

- A. 15 kN B. 700 N C. 200 N D. 20 kN

Rješenje 818

$$m_1 = 10 \text{ t} = 10^4 \text{ kg}, \quad m_2 = 20 \text{ t} = 2 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad F_1 = 3 \cdot 10^4 \text{ N}, \quad F = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$



Kako sila F_1 pokreće oba vagona, to je ukupna masa

$$m = m_1 + m_2$$

pa akceleracija sustava iznosi:

$$a = \frac{F_1}{m} \Rightarrow a = \frac{F_1}{m_1 + m_2}.$$

Spojka je napregnuta silom F .

$$F = m_2 \cdot a \Rightarrow F = m_2 \cdot \frac{F_1}{m_1 + m_2} = 2 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \frac{3 \cdot 10^4 \text{ N}}{10^4 \text{ kg} + 2 \cdot 10^4 \text{ kg}} = 2 \cdot 10^4 \text{ N} = 20 \text{ kN}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 818

Dva su vagona s masama $m_1 = 10 \text{ t}$ i $m_2 = 20 \text{ t}$ međusobno spojena i stoje na horizontalnim tračnicama. Koliko silom je napregnuta spojka ako vagon veće mase vučemo silom $3 \cdot 10^4 \text{ N}$? (Zanemarite trenje.)

- A. 10 kN B. 70 N C. 200 N D. 15 kN

Rezultat: A.

Zadatak 819 (Valentina, medicinska škola)

Automobil mase 850 kg zaustavio se uslijed kvara na horizontalnoj cesti. Dva čovjeka pokušavaju ga gurati tako da djeluju paralelnim silama iste orijentacije. Jedan djeluje silom 275 N, a drugi silom 395 N na automobil. Sila trenja između ceste i automobila iznosi 560 N. Koliko iznosi akceleracija automobila?

Rješenje 819

$$m = 850 \text{ kg}, \quad F_1 = 275 \text{ N}, \quad F_2 = 395 \text{ N}, \quad F_{tr} = 560 \text{ N}, \quad a = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$



Rezultantna sila F koja ubrzava automobil jednaka je zbroju sila oba čovjeka umanjena za silu trenja.

$$F = F_1 + F_2 - F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = F_1 + F_2 - F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = F_1 + F_2 - F_{tr} \quad /: m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{F_1 + F_2 - F_{tr}}{m} = \frac{275 \text{ N} + 395 \text{ N} - 560 \text{ N}}{850 \text{ kg}} = 0.129 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 819

Automobil mase 850 kg zaustavio se uslijed kvara na horizontalnoj cesti. Dva čovjeka pokušavaju ga gurati tako da djeluju paralelnim silama iste orijentacije. Jedan djeluje silom 285 N, a drugi silom 385 N na automobil. Sila trenja između ceste i automobila iznosi 560 N. Koliko iznosi akceleracija automobila?

Rezultat: 0.129 m / s².

Zadatak 820 (Tuđmmana, veterinarska škola)

Automobil se giba jednoliko ubrzano iz mirovanja te za 8 s prijeđe 100 m. Kolika je brzina automobila nakon ubrzavanja?

Rješenje 820

$$t = 8 \text{ s}, \quad s = 100 \text{ m}, \quad v = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje bez početne brzine vrijedi formula za put s:

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow v = \frac{2 \cdot s}{t},$$

gdje je v konačna brzina.

1.inačica

Iz podataka za vrijeme t i put s možemo izračunati akceleraciju a.

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = s \cdot \frac{2}{t^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2} = \frac{2 \cdot 100 \text{ m}}{(8 \text{ s})^2} = 3.125 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Brzina iznosi:

$$v = a \cdot t = 3.125 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8 \text{ s} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2.inačica

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot v \cdot t = s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot v \cdot t = s \cdot \frac{2}{t} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot s}{t} = \frac{2 \cdot 100 \text{ m}}{8 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 820

Automobil se giba jednoliko ubrzano iz mirovanja te za 16 s prijeđe 200 m. Kolika je brzina automobila nakon ubrzavanja?

Rezultat: 25 m / s.