

Zadatak 781 (Cibos, maturant)

Vlak mase 4000 t vozi brzinom 36 km / h. Prije stanice započinje jednoliko kočiti. Sila kočenja je $2 \cdot 10^5$ N.

- a) Koliki put prijeđe vlak za vrijeme prve minute kočenja?
b) Koliki put prijeđe vlak za vrijeme prve dvije minute kočenja?

Rješenje 781

$$m = 4000 \text{ t} = 4 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad v_0 = 36 \text{ km / h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m / s}, \quad F = 2 \cdot 10^5 \text{ N}, \\ t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad t_2 = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}, \quad s_1 = ?, \quad s_2 = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v:

$$v = v_0 - a \cdot t.$$

Za jednoliko usporeno (ubrzano) pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t,$$

gdje je v_0 početna brzina, v konačna brzina.

a)

1. inačica

$$s_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Rightarrow \left[a = \frac{F}{m} \right] \Rightarrow s_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t_1^2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^5 \text{ N}}{4 \cdot 10^6 \text{ kg}} \cdot (60 \text{ s})^2 = \\ = 510 \text{ m}.$$

2. inačica

Određimo brzinu vlaka na kraju prve minute kočenja.

$$v = v_0 - a \cdot t_1 \Rightarrow \left[a = \frac{F}{m} \right] \Rightarrow v = v_0 - \frac{F}{m} \cdot t_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{2 \cdot 10^5 \text{ N}}{4 \cdot 10^6 \text{ kg}} \cdot 60 \text{ s} = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Prijeđeni put za vrijeme prve minute kočenja iznosi:

$$s_1 = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t_1 = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 60 \text{ s} = 510 \text{ m}.$$

b)

1. inačica

$$s_2 = v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \left[a = \frac{F}{m} \right] \Rightarrow s_2 = v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t_2^2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 120 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^5 \text{ N}}{4 \cdot 10^6 \text{ kg}} \cdot (120 \text{ s})^2 = \\ = 840 \text{ m}.$$

2. inačica

Određimo brzinu vlaka na kraju druge minute kočenja.

$$v = v_0 - a \cdot t_2 \Rightarrow \left[a = \frac{F}{m} \right] \Rightarrow v = v_0 - \frac{F}{m} \cdot t_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{2 \cdot 10^5 \text{ N}}{4 \cdot 10^6 \text{ kg}} \cdot 120 \text{ s} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Prijeđeni put za vrijeme prve dvije minute kočenja iznosi:

$$s_2 = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t_2 = \frac{10 \frac{m}{s} + 4 \frac{m}{s}}{2} \cdot 120 s = 840 m.$$

Vježba 781

Vlak mase 8000 t vozi brzinom 36 km / h. Prije stanice započinje jednoliko kočiti. Sila kočenja je $4 \cdot 10^5$ N. Koliki put prijeđe vlak za vrijeme prve minute kočenja?

Rezultat: 510 m.

Zadatak 782 (Cibos, maturant)

Vlak mase 4000 t vozi brzinom 36 km / h. Prije stanice započinje jednoliko kočiti. Sila kočenja je $2 \cdot 10^5$ N. Za koje će se vrijeme vlak zaustaviti?

Rješenje 78

$$m = 4000 t = 4 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad v_0 = 36 \text{ km / h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m / s}, \quad F = 2 \cdot 10^5 \text{ N},$$

$$t = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v = v_0 - a \cdot t.$$

$$v = v_0 - a \cdot t \Rightarrow [v = 0] \Rightarrow 0 = v_0 - a \cdot t \Rightarrow a \cdot t = v_0 \Rightarrow \left[a = \frac{F}{m} \right] \Rightarrow \frac{F}{m} \cdot t = v_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F}{m} \cdot t = v_0 / \cdot \frac{m}{F} \Rightarrow t = v_0 \cdot \frac{m}{F} = 10 \frac{m}{s} \cdot \frac{4 \cdot 10^6 \text{ kg}}{2 \cdot 10^5 \text{ N}} = 200 s.$$

Vježba 782

Vlak mase 8000 t vozi brzinom 36 km / h. Prije stanice započinje jednoliko kočiti. Sila kočenja je $4 \cdot 10^5$ N. Za koje će se vrijeme vlak zaustaviti?

Rezultat: 200 s.

Zadatak 783 (Cibos, maturant)

Vlak mase 4000 t vozi brzinom 36 km / h. Prije stanice započinje jednoliko kočiti. Sila kočenja je $2 \cdot 10^5$ N. Koliki put prijeđe vlak u drugoj minuti kočenja?

Rješenje 783

$$m = 4000 t = 4 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad v_0 = 36 \text{ km / h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m / s}, \quad F = 2 \cdot 10^5 \text{ N},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s druga minuta}, \quad t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad t_2 = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}, \quad s = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu

v:

$$v = v_0 - a \cdot t.$$

1. inačica

Traženi put s jednak je razlici putova s_2 i s_1 .

Put s_2 je put koji prijeđe vlak za vrijeme prve dvije minute kočenja.

Put s_1 je put koji prijeđe vlak za vrijeme prve minute kočenja.

$$\begin{aligned} s &= s_2 - s_1 \Rightarrow s = v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 - \left(v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow s &= v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 - v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Rightarrow s = v_0 \cdot (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_2^2 - t_1^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[a = \frac{F}{m} \right] \Rightarrow s = v_0 \cdot (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot (t_2^2 - t_1^2) = \\ &= 10 \frac{m}{s} \cdot (120 s - 60 s) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^5 N}{4 \cdot 10^6 kg} \cdot \left((120 s)^2 - (60 s)^2 \right) = 330 m. \end{aligned}$$

2. inačica

Odredimo brzinu vlaka na kraju prve minute kočenja.

$$v_1 = v_0 - a \cdot t_1 \Rightarrow \left[a = \frac{F}{m} \right] \Rightarrow v_1 = v_0 - \frac{F}{m} \cdot t_1 = 10 \frac{m}{s} - \frac{2 \cdot 10^5 N}{4 \cdot 10^6 kg} \cdot 60 s = 7 \frac{m}{s}.$$

To je sada početna brzina u sljedećih 60 s pa put iznosi:

$$\begin{aligned} s &= v_1 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \left[a = \frac{F}{m} \right] \Rightarrow s = v_1 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot (\Delta t)^2 = \\ &= 7 \frac{m}{s} \cdot 60 s - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^5 N}{4 \cdot 10^6 kg} \cdot (60 s)^2 = 330 m. \end{aligned}$$

Vježba 783

Vlak mase 8000 t vozi brzinom 36 km/h. Prije stanice započinje jednoliko kočiti. Sila kočenja je $4 \cdot 10^5$ N. Koliki put prijeđe vlak u drugoj minuti kočenja?

Rezultat: 330 m.

Zadatak 784 (Luka, srednja škola)

Sa zgrade visoke 19.62 m bačen je vertikalno prema dolje kamen početnom brzinom 9.81 m/s. Vrijeme padanja je:

- A. 5 s B. 1.24 s C. 2 s D. 3.24 s

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m/s²)

Rješenje 784

$$h = 19.62 \text{ m}, \quad v_0 = 9.81 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom v_0 i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina) h dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

$$\begin{aligned} h &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - h = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t - h = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 + 9.81 \cdot t - 19.62 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 + 9.81 \cdot t - 19.62 = 0 \quad / \cdot \frac{2}{9.81} &\Rightarrow t^2 + 2 \cdot t - 4 = 0 \Rightarrow t^2 + 2 \cdot t - 4 = 0 \\ &a = 1, b = 2, c = -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a = 1, b = 2, c = -4 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t_1 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} \\ t_2 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t_1 = 1.24 \text{ s} \\ t_2 = -3.24 \text{ s} \text{ nema fizikalnog smisla} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t = 1.24 \text{ s.}$$

Odgovor je pod B.

Vježba 784

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 785 (Hary, tehnička škola)

Jedno tijelo pada s visine h_1 , a drugo s visine h_2 .

- U kojem omjeru stoje njihova vremena padanja?
- U kojem omjeru stoje njihove brzine u trenutku pada na tlo?

Rješenje 785

$$h_1, \quad h_2, \quad t_1 : t_2 = ?, \quad v_1 : v_2 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}, \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

gdje je h visina pada.

a)

$$\left. \begin{aligned} t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} \\ t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot h_1}{g}}{\frac{2 \cdot h_2}{g}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{2 \cdot h_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}} \Rightarrow t_1 : t_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}.$$

b)

$$\left. \begin{aligned} v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \\ v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_1}{2 \cdot g \cdot h_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_1}{2 \cdot g \cdot h_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}} \Rightarrow v_1 : v_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}.$$

Vježba 785

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 786 (Hary, tehnička škola)

Tijelo je bačeno vertikalno uvis početnom brzinom v_0 i poslije prijednog puta od 300 m brzina mu iznosi 200 m / s.

- Odredite mu početnu brzinu.
- Do koje će visine tijelo dospjeti?
- Poslije koliko će vremena tijelo pasti na tlo?
(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 786

$$h = 300 \text{ m}, \quad v = 200 \text{ m / s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad v_0 = ?, \quad h_m = ?, \quad t_u = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore (uvis) sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato je brzina v u času kad je prošlo vrijeme t dana ovim izrazom:

$$v = v_0 - g \cdot t.$$

Za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku. Dakle, let do najviše točke traje koliko i pad s te točke.

Vertikalni hitac prema gore (uvis) sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato je brzina v u času kad je tijelo prešlo put h dana ovim izrazom:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h.$$

Najviši domet što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest u času kad je $v = 0$. Onda je

$$v_0 = g \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}.$$

a)

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h = v^2 \Rightarrow v_0^2 = v^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v_0 = \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{\left(200 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 300 \text{ m}} = 214.21 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b)

$$h_m = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(214.21 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2338.7 \text{ m}.$$

Ili ovako:

$$h_m = h + \frac{v^2}{2 \cdot g} = 300 \text{ m} + \frac{\left(200 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2338.7 \text{ m}.$$

c)

Na maksimalnoj visini h_m brzina tijela je $v = 0 \text{ m / s}$.

$$v = v_0 - g \cdot t \Rightarrow 0 = v_0 - g \cdot t \Rightarrow g \cdot t = v_0 \Rightarrow g \cdot t = v_0 \cdot \frac{1}{g} \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}.$$

Koliko je vremena tijelu potrebno da prevali put h_m , toliko mu je potrebno da se vrati na tlo.

$$t_u = 2 \cdot t \Rightarrow t_u = 2 \cdot \frac{v_0}{g} = 2 \cdot \frac{214.21 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 43.67 \text{ s.}$$

Vježba 786

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 787 (Iva, gimnazija)

Ako se vlak giba brzinom 16 m / s, zaustavi se nakon 8 s.

- Koliko je usporenje vlaka?
- Kolika je duljina puta vlaka za to vrijeme?
- Nacrtajte dijagram brzine vlaka u funkciji vremena t.

Rješenje 787

$$v_0 = 16 \text{ m / s, } t = 8 \text{ s, } a = ?, s = ?, v - t \text{ graf}$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v:

$$v = v_0 - a \cdot t.$$

a)

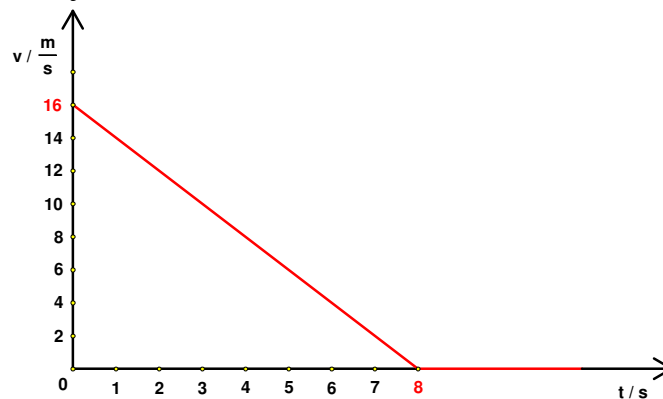
$$v = v_0 - a \cdot t \Rightarrow [v = 0] \Rightarrow 0 = v_0 - a \cdot t \Rightarrow a \cdot t = v_0 \Rightarrow a \cdot t = v_0 \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow a = \frac{v_0}{t} = \frac{16 \frac{m}{s}}{8 \text{ s}} = 2 \frac{m}{s^2}.$$

b)

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 16 \frac{m}{s} \cdot 8 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{m}{s^2} \cdot (8 \text{ s})^2 = 64 \text{ m.}$$

c)

U početnom trenutku, $t = 0 \text{ s}$, brzina je $v_0 = 16 \text{ m / s}$. Za vrijeme zaustavljanja opada s vremenom t. Poslije $t = 8 \text{ s}$ brzina vlaka je $v = 0 \text{ m / s}$.



Vježba 787

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 788 (Ted, gimnazija)

Tijelo je padalo u ponor i udar tijela o dno čuo se nakon vremena t . Odredite dubinu ponora zanemarujući otpor zraka i uzimajući u obzir da je brzina zvuka v . (ubrzanje slobodnog pada g)

Rješenje 788

$$t, \quad v, \quad g, \quad h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0$ m/s i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81$ m/s². Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je h visina pada.

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v},$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Tijelo slobodno pada i nakon vremena t_1 past će na dno ponora.

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}.$$

Vrijeme potrebno da zvuk, gibajući se jednoliko, stigne do promatrača iznosi:

$$t_2 = \frac{h}{v}.$$

Ukupno vrijeme je:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + \frac{h}{v} \Rightarrow t - \frac{h}{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \Rightarrow t - \frac{h}{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad / 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(t - \frac{h}{v}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\right)^2 \Rightarrow t^2 - 2 \cdot \frac{t}{v} \cdot h + \frac{h^2}{v^2} = \frac{2 \cdot h}{g} \Rightarrow t^2 - 2 \cdot \frac{t}{v} \cdot h + \frac{h^2}{v^2} - \frac{2 \cdot h}{g} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t^2 - 2 \cdot \frac{t}{v} \cdot h + \frac{h^2}{v^2} - \frac{2 \cdot h}{g} &= 0 \quad / \cdot v^2 \Rightarrow v^2 \cdot t^2 - 2 \cdot t \cdot v \cdot h + h^2 - 2 \cdot \frac{h}{g} \cdot v^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow h^2 - \left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right) \cdot h + v^2 \cdot t^2 &= 0 \Rightarrow h^2 - \left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right) \cdot h + (v \cdot t)^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} h^2 - \left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right) \cdot h + (v \cdot t)^2 &= 0 \\ a = 1, \quad b = -\left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right), \quad c &= (v \cdot t)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} a = 1, \quad b = -\left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right), \quad c &= (v \cdot t)^2 \\ h_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow h_{1,2} &= \frac{-\left(-\left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right)\right) \pm \sqrt{\left(-\left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (v \cdot t)^2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_{1,2} = \frac{2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v \pm \sqrt{\left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right)^2 - 4 \cdot (v \cdot t)^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v + \sqrt{\left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right)^2 - 4 \cdot (v \cdot t)^2}}{2} \\ h_2 &= \frac{2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v - \sqrt{\left(2 \cdot \frac{v^2}{g} + 2 \cdot t \cdot v\right)^2 - 4 \cdot (v \cdot t)^2}}{2} \end{aligned} \right\}$$

Vježba 788

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 789 (Petar, strukovna škola)

Dizalo mase 10 t spušta se jednoliko ubrzano u rudnik. Ako je napetost užeta 90 kN, ubrzanje dizala je

A. $10 \frac{m}{s^2}$ B. $100 \frac{m}{s^2}$ C. $0.81 \frac{m}{s^2}$ D. $98 \frac{m}{s^2}$

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 789

$$m = 10 \text{ t} = 1 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad F = 90 \text{ kN} = 9 \cdot 10^4 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Inercijske sile su prividne sile koje se pojavljuju u akceleriranim sustavima i nisu posljedica međudjelovanja tijela. Njihov smjer je uvijek suprotan smjeru akceleracije sustava.

Kada se tijelo spušta ubrzanjem a njegova težina je

$$G = m \cdot (g - a).$$

Napetost užeta po iznosu je jednaka težini.

$$F = G \Rightarrow F = m \cdot (g - a) \Rightarrow F = m \cdot (g - a) \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{F}{m} = g - a \Rightarrow a = g - \frac{F}{m}$$

$$= 9.81 \frac{m}{s^2} - \frac{9 \cdot 10^4 N}{1 \cdot 10^4 kg} = 0.81 \frac{m}{s^2}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 789

Dizalo mase 20 t spušta se jednoliko ubrzano u rudnik. Ako je napetost užeta 180 kN, ubrzanje dizala je

$$A. 10 \frac{m}{s^2} \quad B. 100 \frac{m}{s^2} \quad C. 0.81 \frac{m}{s^2} \quad D. 98 \frac{m}{s^2}$$

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: C.

Zadatak 790 (Goga, maturantica)

Iz topa koji se nalazi na visini 100 m iznad morske obale ispaljena je granata u horizontalnom smjeru početnom brzinom 1000 m/s.

- U kojem se položaju nalazi granata 2 s nakon ispaljivanja?
- Kolika je brzina granate u tom trenutku?
- Kolika je brzina granate pri padu u vodu?
- Pod kojim kutom granata padne na vodu?
- Odredite vrijeme tempiranja eksplozije ako želimo da granata eksplodira na visini 30 m iznad površine vode.

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 790

$$h = 100 \text{ m}, \quad v_0 = 1000 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v = g \cdot t, \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}, \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

gdje je h visina pada.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Brzine nakon vremena t jesu v_0 i $g \cdot t$, a rezultatnu brzinu možemo izračunati iz Pitagorina poučka jer su komponente međusobno okomite.

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}, \quad v = \sqrt{v_0^2 + (g \cdot t)^2}.$$

Brzina v_0 je brzina u horizontalnom (vodoravnom) smjeru. Ona se s vremenom ne povećava, niti smanjuje. Tijelo se složeno giba kad istodobno obavlja dva ili više gibanja. Pri takvom gibanju vrijedi načelo **neovisnosti gibanja** koje glasi: Kad tijelo istodobno obavlja dva gibanja, giba se tako da se u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi stiglo kad bi obavilo samo jedno gibanje u određenom vremenskom razmaku, a neovisno o tom gibanju istodobno i drugo gibanje u istome vremenskom razmaku.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

- U kojem se položaju nalazi granata 2 s nakon ispaljivanja?

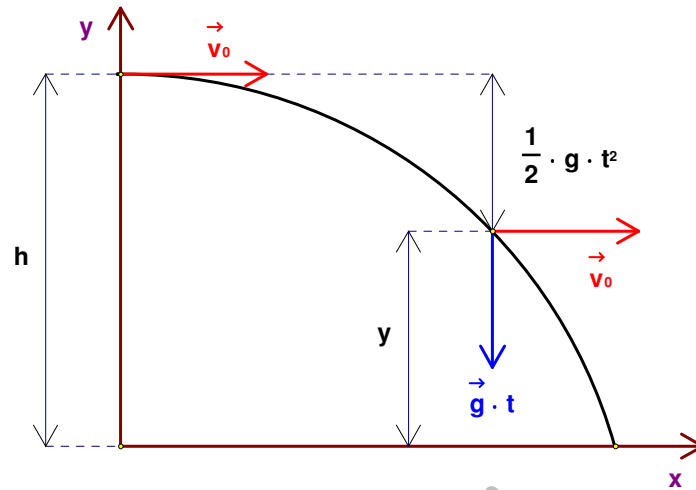
$$h = 100 \text{ m}, \quad v_0 = 1000 \text{ m/s}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad P(x, y) = ?$$

Uvedemo koordinatni sustav. Pretpostavimo da se nakon vremena t granata našla u položaju P(x, y). Za koordinate x i y vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} x = v_0 \cdot t \\ y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1000 \frac{m}{s} \cdot 2 s \\ y = 1000 m - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (2 s)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2000 m \\ y = 80.38 m \end{array} \right\}$$

Dakle,

$$P(x, y) = P(2000 m, 80.38 m).$$



b) Kolika je brzina granate u tom trenutku?

$$v_0 = 1000 m/s, \quad t = 2 s, \quad g = 9.81 m/s^2, \quad v_1 = ?$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + (g \cdot t)^2} = \sqrt{\left(1000 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 2 s\right)^2} = 1000.19 \frac{m}{s}$$

c) Kolika je brzina granate pri padu u vodu?

$$v_0 = 1000 m/s, \quad h = 100 m, \quad g = 9.81 m/s^2, \quad v_2 = ?$$

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{\left(1000 \frac{m}{s}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 100 m} = 1000.98 \frac{m}{s}$$

d) Pod kojim kutom granata padne na vodu?

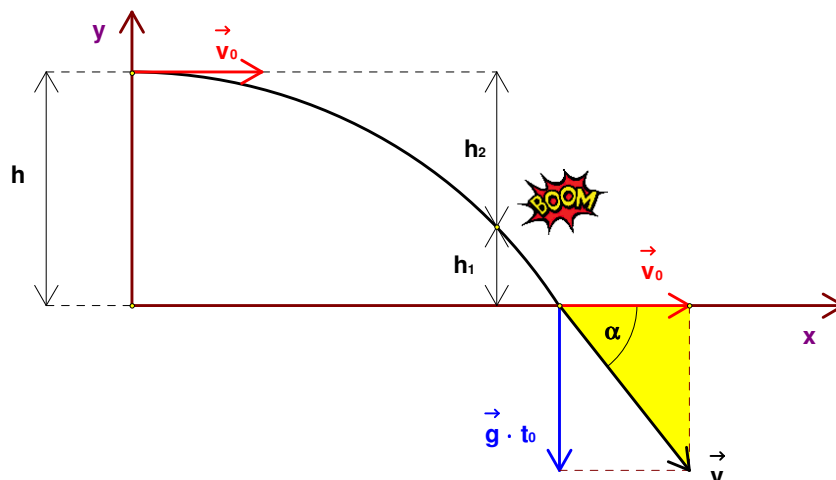
$$v_0 = 1000 m/s, \quad h = 100 m, \quad g = 9.81 m/s^2, \quad \alpha = ?$$

Vrijeme za koje granata sa visine h padne na površinu vode je

$$t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Pomoću funkcije tangens odredi se kut upada α .

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{g \cdot t_0}{v_0} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}}{v_0} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{g \cdot 2 \cdot \frac{2 \cdot h}{g}}}{v_0} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{g \cdot 2 \cdot \frac{2 \cdot h}{g}}}{v_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{v_0} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{v_0} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 100 m}}{1000 \frac{m}{s}} \right) = 2^\circ 32' \end{aligned}$$



e) Odredite vrijeme tempiranja eksplozije ako želimo da granata eksplodira na visini 30 m iznad površine vode.

$$h = 100 \text{ m}, \quad h_1 = 30 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t_1 = ?$$

Vrijeme tempiranja eksplozije dogodit će se kada je granata prešla put h_2 .

$$h_2 = h - h_1 \Rightarrow h_2 = 100 \text{ m} - 30 \text{ m} \Rightarrow h_2 = 70 \text{ m}.$$

Vrijeme t_1 iznosit će

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 3.78 \text{ s}.$$

Vježba 790

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 791 (Miroslav, maturant)

Površinom brze rijeke velikog pada slobodno pluta čamac vrlo glatkog dna tako da je trenje zanemarivo. Brzina gibanja čamca niz rijeku je:

A. veća od brzine toka rijeke B. jednaka brzini toka rijeke

C. manja od brzine toka rijeke D. jednaka brzini kojom je čamac pušten niz rijeku

Rješenje 791

$v = ?$



Čamac se, površinom brze rijeke velikog pada, giba kao tijelo na kosini bez trenja. Budući da se dio energije riječnog toka troši na vrtloženje, brzina čamca veća je od brzine toka rijeke.

Odgovor je pod A.

Vježba 791

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 792 (Božica, srednja škola)

Pod utjecajem stalne sile motora automobil se pokrene iz mirovanja i po horizontalnoj ravnoj cesti u prvih 5 s prijeđe put 25 m. Ako se nakon prvih 5 s motor automobila isključi i sila prestane djelovati koliki će put automobila prevaliti u sljedećih 5 s uz pretpostavku da su gubici zanemarivi?

- A. 35 m B. 40 m C. 45 m D. 50 m

Rješenje 792

$$t_1 = 5 \text{ s}, \quad s_1 = 25 \text{ m}, \quad t_2 = 5 \text{ s}, \quad s_2 = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba, t vrijeme gibanja.

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje bez početne brzine vrijedi formula za put s :

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow v = \frac{2 \cdot s}{t},$$

gdje je v konačna brzina.

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu.

Pod djelovanjem stalne sile automobil se giba jednoliko ubrzano i na kraju vremenskog intervala t_1 ima brzinu

$$v = \frac{2 \cdot s_1}{t_1}.$$

Prestankom djelovanja sile automobil se nastavlja gibati jednoliko po pravcu brzinom koju je imao u trenutku prestanka djelovanja sile (prvi Newtonov poučak).

Prevaljeni put u vremenskom intervalu t_2 iznosi:

$$s_2 = v \cdot t_2 \Rightarrow s_2 = \frac{2 \cdot s_1}{t_1} \cdot t_2 = \frac{2 \cdot 25 \text{ m}}{5 \text{ s}} \cdot 5 \text{ s} = 50 \text{ m}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 792

Pod utjecajem stalne sile motora automobil se pokrene iz mirovanja i po horizontalnoj ravnoj cesti u prvih 8 s prijeđe put 25 m. Ako se nakon prvih 8 s motor automobila isključi i sila prestane djelovati koliki će put automobila prevaliti u sljedećih 8 s uz pretpostavku da su gubici zanemarivi?

- A. 35 m B. 40 m C. 45 m D. 50 m

Rezultat: D.

Zadatak 793 (Vlado, srednja škola)

Automobil, mase 800 kg, jednoliko usporava i zaustavi se na putu od 7 m u 2 s. Kolika se energija pretvori u toplinu? (Trenjem pri kočenju sva se kinetička energija automobila pretvori u toplinu.)

- A. 19.6 kJ B. 18.4 kJ C. 20.8 kJ D. 14.6 kJ

Rješenje 793

$$m = 800 \text{ kg}, \quad s = 7 \text{ m}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad E_k = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v vrijedi formula za put s :

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow v = \frac{2 \cdot s}{t}.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \left[v = \frac{2 \cdot s}{t} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2 \cdot s}{t} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 800 \text{ kg} \cdot \left(\frac{2 \cdot 7 \text{ m}}{2 \text{ s}} \right)^2 = 19600 \text{ J} = 19.6 \text{ kJ}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 793

Automobil, mase 400 kg, jednoliko usporava i zaustavi se na putu od 7 m u 2 s. Kolika se energija pretvori u toplinu? (Trenjem pri kočenju sva se kinetička energija automobila pretvori u toplinu.)

- A. 9.8 kJ B. 8.4 kJ C. 2.8 kJ D. 4.6 kJ

Rezultat: A.

Zadatak 794 (Vlado, srednja škola)

Kamen bacimo vertikalno uvis početnom brzinom 80 m / s. Koliko će vremena biti potrebno kamenu da se digne 20 m visoko? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m / s}^2$)

- A. 0.25 s B. 0.5 s C. 0.65 s D. 1.2 s

Rješenje 794

$$v_0 = 80 \text{ m / s}, \quad h = 20 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m / s}^2, \quad t = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom v_0 i slobodnog pada u suprotnom smjeru, stoga je put (visina) h dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - v_0 \cdot t + h = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 - 80 \cdot t + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 - 80 \cdot t + 20 = 0 \Rightarrow 5 \cdot t^2 - 80 \cdot t + 20 = 0 \Rightarrow 5 \cdot t^2 - 80 \cdot t + 20 = 0 \quad / : 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 16 \cdot t + 4 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t^2 - 16 \cdot t + 4 = 0 \\ a = 1, b = -16, c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1, b = -16, c = 4 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 16}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{240}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{16 - \sqrt{240}}{2} \\ t_2 = \frac{16 + \sqrt{240}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 0.25 \text{ s} \\ t_2 = 15.75 \text{ s} \end{array} \right\}.$$

Kamen je dva puta došao na visinu h . Prvi puta nakon 0.25 s, drugi puta **prilikom padanja** nakon 15.75 s.

Odgovor je pod A.

Vježba 794

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 795 (Tony, gimnazija)

Tijelo slobodno pada u vakuumu s visine h . Tu visinu podijelite na n dijelova tako da vrijeme padanja bude jednako.

Rješenje 795

$$h, \quad t_1 = t_2 = t_3 = \dots = t_n = t, \quad h_i = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0$ m/s i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81$ m/s². Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Neka je t vrijeme padanja za svaki dio visine h . Tada za prevaljene putove vrijedi:

- $h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
- $h_1 + h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (2 \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 4 \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 4 \cdot t^2 = 2 \cdot g \cdot t^2$
- $h_1 + h_2 + h_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (3 \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 9 \cdot t^2 = \frac{9}{2} \cdot g \cdot t^2$
- $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (4 \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 16 \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 16 \cdot t^2 = 8 \cdot g \cdot t^2$ itd.

Za cijelu visinu h je

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + \dots + h_n = h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (n \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot n^2 \cdot t^2 = \frac{n^2}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Sada je

$$h = \frac{n^2}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \frac{n^2}{2} \cdot g \cdot t^2 = h \Rightarrow \frac{n^2}{2} \cdot g \cdot t^2 = h \cdot \frac{2}{n^2 \cdot g} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g}.$$

Odredimo pravilo za dio visine h_i .

Za dio visine h_1 je

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \left[t^2 = \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} \right] \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{n^2} \cdot h.$$

Za dio visine h_2 je

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 &= 2 \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h_2 = 2 \cdot g \cdot t^2 - h_1 \Rightarrow h_2 = 2 \cdot g \cdot t^2 - \frac{h}{n^2} \Rightarrow \left[t^2 = \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow h_2 &= 2 \cdot g \cdot \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} - \frac{h}{n^2} \Rightarrow h_2 = 2 \cdot g \cdot \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} - \frac{h}{n^2} \Rightarrow h_2 = \frac{4 \cdot h}{n^2} - \frac{h}{n^2} \Rightarrow h_2 = \frac{3}{n^2} \cdot h. \end{aligned}$$

Za dio visine h_3 je

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + h_3 &= \frac{9}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h_3 = \frac{9}{2} \cdot g \cdot t^2 - h_1 - h_2 \Rightarrow \left[t^2 = \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow h_3 &= \frac{9}{2} \cdot g \cdot \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} - \frac{h}{n^2} - \frac{3 \cdot h}{n^2} \Rightarrow h_3 = \frac{9}{2} \cdot g \cdot \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} - \frac{h}{n^2} - \frac{3 \cdot h}{n^2} \Rightarrow h_3 = \frac{9 \cdot h}{n^2} - \frac{h}{n^2} - \frac{3 \cdot h}{n^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow h_3 = \frac{5 \cdot h}{n^2}. \end{aligned}$$

Za dio visine h_4 je

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + h_3 + h_4 &= 8 \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h_4 = 8 \cdot g \cdot t^2 - h_1 - h_2 - h_3 \Rightarrow \left[t^2 = \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow h_4 &= 8 \cdot g \cdot \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} - \frac{h}{n^2} - \frac{3 \cdot h}{n^2} - \frac{5 \cdot h}{n^2} \Rightarrow h_4 = 8 \cdot g \cdot \frac{2 \cdot h}{n^2 \cdot g} - \frac{h}{n^2} - \frac{3 \cdot h}{n^2} - \frac{5 \cdot h}{n^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_4 = \frac{16 \cdot h}{n^2} - \frac{h}{n^2} - \frac{3 \cdot h}{n^2} - \frac{5 \cdot h}{n^2} \Rightarrow h_4 = \frac{7}{n^2} \cdot h.$$

Primijetimo da vrijedi:

$$h_i = \frac{2 \cdot i - 1}{n^2} \cdot h, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Vježba 795

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 796 (Petar, elektrotehnička škola)

Na tijelo mase 10 kg djelujemo vanjskom silom F čiji je iznos 5 N, no tijelo miruje. Koliki je iznos sile trenja između podloge i tijela?

Rješenje 796

$$m = 10 \text{ kg}, \quad F = 5 \text{ N}, \quad F_{tr} = ?$$

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja.

Budući da tijelo miruje, sila trenja (koja djeluje u suprotnom smjeru od sile F) jednaka je 5 N.

$$\left. \begin{array}{l} F_{tr} = F \\ F = 5 \text{ N} \end{array} \right\} \Rightarrow F_{tr} = 5 \text{ N}.$$

Vježba 796

Na tijelo mase 10 kg djelujemo vanjskom silom F čiji je iznos 50 N, no tijelo miruje. Koliki je iznos sile trenja između podloge i tijela?

Rezultat: 50 N.

Zadatak 797 (Marina, gimnazija)

Kolika je srednja brzina tijela koje pada s visine 10 m? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 797

$$h = 10 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad \bar{v} = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}, \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

gdje je h visina pada.

Srednja brzina tijela u vremenskom intervalu Δt jest kvocijent dijela puta Δs , što ga je tijelo prešlo za to vrijeme i vremenskog razmaka Δt :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Srednja (ili prosječna) brzina tijela (pri nejednolikom gibanju) definira se:

$$\bar{v} = \frac{\text{prijedeni dio puta}}{\text{pripadni dio vremena}}, \quad \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \bar{v} = \frac{\text{ukupni prijedeni put}}{\text{ukupno vrijeme gibanja}}, \quad \bar{v} = \frac{s}{t}.$$

1. inačica

$$\bar{v} = \frac{h}{t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{h}{\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}} = \frac{10 \text{ m}}{\sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 7.07 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2. inačica

Na početku tijelo je mirovalo, $v_0 = 0 \text{ m/s}$. Na kraju puta h njegova brzina je $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$. Srednja brzina iznosi:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{0 + \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}}}{2} = 7.07 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 797

Kolika je srednja brzina tijela koje pada s visine 40 m? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 14.14 m/s.

Zadatak 798 (Antun, maturant)

Koliku najmanju snagu mora imati dizalica da bi mogla teret mase 2 t dizati brzinom 1 m/s? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$).

Rješenje 798

$$m = 2 \text{ t} = 2000 \text{ kg}, \quad v = 1 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad P = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Promatra li se rad pojedine sile, brzina kojom ona obavlja rad naziva se snagom te sile. Snaga sile može se pisati kao

$$P = F \cdot v,$$

ako se hvatište sile giba u smjeru sile.

Dizalica mora teret težine G dizati brzinom v pa je njezina snaga jednaka

$$P = G \cdot v \Rightarrow P = m \cdot g \cdot v = 2000 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 19620 \text{ W} = 19.62 \text{ kW}.$$

Vježba 798

Koliku najmanju snagu mora imati dizalica da bi mogla teret mase 1 t dizati brzinom 1 m/s? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$).

Rezultat: 9.81 kW.

Zadatak 799 (Vedran2, gimnazija)

Lokomotiva po horizontalno postavljenoj pruzi vuče vagone ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$). Ukupna masa vagona i lokomotive je 2000 t. Ako je snaga lokomotive stalna i jednaka 1800 kW, a faktor trenja 0.005 izračunajte:

- akceleraciju vlaka u trenutku kada je brzina vlaka 4 m/s;
- akceleraciju vlaka u trenutku kada je brzina vlaka 12 m/s;
- maksimalnu brzinu vlaka.

Rješenje 799

$$g \approx 10 \text{ m/s}^2, \quad m = 2000 \text{ t} = 2 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad P = 1800 \text{ kW} = 1.8 \cdot 10^6 \text{ W}, \quad \mu = 0.005,$$

$$v_1 = 4 \text{ m / s}, \quad v_2 = 12 \text{ m / s}, \quad a_1 = ?, \quad a_2 = ?, \quad v = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Snaga je količnik obavljenog rada i vremenskog intervala u kojem je rad obavljen.

$$P = \frac{W}{t}$$

Promatra li se rad pojedine sile, brzina kojom ona obavlja rad naziva se snagom te sile. Snaga sile može se pisati kao

$$P = F \cdot v,$$

ako se hvatište sile giba u smjeru sile.

Na primjer, vučna sila potječe od rada motora koji ima zadanu maksimalnu snagu. Ona ograničava maksimalni iznos umnoška sile i brzine. Ako je veća brzina bit će manja sila i ubrzanje koje ona daje vozilu. Iz formule $P = F \cdot v$ vidi se:

- veća brzina uvjetuje manju silu i akceleraciju
- manja brzina uvjetuje veću silu i akceleraciju.

a)

Vučna sila potječe od rada motora lokomotive koja ima stalnu snagu. Ta snaga ograničava maksimalni iznos umnoška sile i brzine. Pri brzini v_1 vučna sila iznositi će

$$F_1 = \frac{P}{v_1}.$$

Tada je rezultantna sila F koja ubrzava vlak jednaka razlici sile F_1 i sile trenja F_{tr} .

$$F = F_1 - F_{tr} \Rightarrow m \cdot a_1 = \frac{P}{v_1} - \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow m \cdot a_1 = \frac{P}{v_1} - \mu \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{P}{m \cdot v_1} - \mu \cdot g = \frac{1.8 \cdot 10^6 \text{ W}}{2 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} - 0.005 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.175 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b)

Slično!

$$\Rightarrow a_2 = \frac{P}{m \cdot v_2} - \mu \cdot g = \frac{1.8 \cdot 10^6 \text{ W}}{2 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}} - 0.005 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.025 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c)

Snaga lokomotive je stalna. Što je veća brzina bit će manja sila. Pri maksimalnoj brzini koju vlak može postići sila je po iznosu jednaka sili trenja.

$$F = F_{tr} \Rightarrow \frac{P}{v} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = \frac{P}{v} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = \frac{P}{v} / \cdot \frac{v}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{P}{\mu \cdot m \cdot g} = \frac{1.8 \cdot 10^6 \text{ W}}{0.005 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 799

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 800 (Tonka, gimnazija)

Tijelo mase 0.1 kg bačeno je vertikalno uvis kinetičkom energijom od 9.81 J. Zanimarite otpor zraka. Kolika je visina koju dostigne tijelo? (ubrzanje slobodnog pada $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$).

A. 8 m B. 10 m C. 11.8 m D. 12.5 m

Rješenje 800

$$m = 0.1 \text{ kg}, \quad E_k = 9.81 \text{ J}, \quad g \approx 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore (uvis) sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato je brzina v u času kad je tijelo prešlo put h dana ovim izrazom:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Mehanička energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije u mehaničkom sustavu, tj. energija koja ovisi o položaju i gibanju tijela zbog djelovanja sile.

U zatvorenome sustavu zbroj potencijalne i kinetičke energije je konstantan.

1. inačica

Iz kinetičke energije izračunamo početnu brzinu tijela bačenog uvis.

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 = E_k \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 = E_k \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v_o^2 = \frac{2 \cdot E_k}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_o^2 = \frac{2 \cdot E_k}{m} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \text{ J}}{0.1 \text{ kg}}} = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

U najvišoj točki staze je $v = 0$ pa slijedi:

$$v^2 = v_o^2 - 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow [v = 0] \Rightarrow 0 = v_o^2 - 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow 2 \cdot g \cdot h = v_o^2 \Rightarrow 2 \cdot g \cdot h = v_o^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_o^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(14 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10 \text{ m.}$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

Zbog zakona o očuvanju energije kinetička energija tijela, koju ono ima pri bacanju, bit će jednaka gravitacijskoj potencijalnoj energiji na maksimalnoj visini.

$$E_{gp} = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = E_k \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow h = \frac{E_k}{m \cdot g} = \frac{9.81 \text{ J}}{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10 \text{ m.}$$

Odgovor je pod B.

Vježba 800

Odmor!

Rezultat: ...