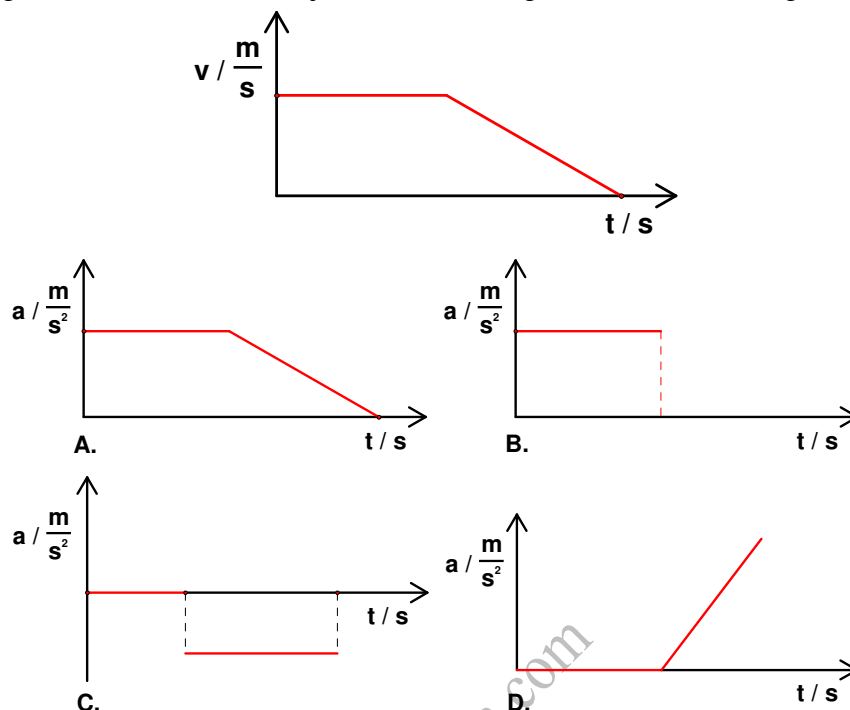


Zadatak 701 (Mirna, srednja škola)

Crtež prikazuje promjenu brzine v tijela pri pravocrtном gibanju tijekom vremena t . Koji od predloženih grafova ovisnosti akceleracije a o vremenu t odgovara nacrtanom $v - t$ grafu?

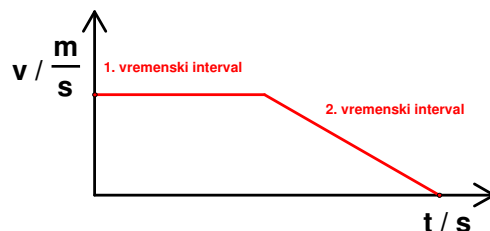


Rješenje 701

x, y

Jednoliko ubrzano pravocrtно gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem je akceleracija a stalna, konstantna, tj. akceleracija u svakom trenutku ima jednaku vrijednost. Zato će grafički prikaz akceleracije kao funkcije vremena biti pravac usporedan (paralelan) s osi t jer je akceleracija a za svako vremensko razdoblje t jednaka. Linija koja u $a - t$ koordinatnom sustavu prikazuje akceleraciju a tijela u ovisnosti o vremenu t naziva se $a - t$ graf. U pravokutnom koordinatnom sustavu tada se na os apscisa nanose vrijednosti vremena t , a na os ordinata pripadajuće vrijednosti akceleracije a . Po dvije vrijednosti a i t , koje pripadaju jedna drugoj, određuju jednu točku u ravnini $a - t$ koordinatnog sustava. Kod jednolikog ubranog pravocrtноg gibanja $v - t$ graf koji pokazuje takvo gibanje je pravac. Što je pravac više nagnut prema osi apscisa (vremenskoj osi) iznos akceleracije je veći. Zapamtimo:

- gibanje je jednoliko ubrzano (brzina se povećava), ako je akceleracija pozitivna, $a > 0$
- gibanje je jednoliko usporeno (brzina se smanjuje), ako je akceleracija negativna, $a < 0$
- gibanje je jednoliko pravocrtно (brzina je stalna), ako je akceleracija jednaka nuli, $a = 0$.



U prvom vremenskom intervalu brzina je stalna (pravac je usporedan sa t osi) pa je akceleracija jednaka nuli, $a = 0$.

U drugom vremenskom intervalu brzina se smanjuje (pravac je nagnut prema t osi) pa je akceleracija negativna, $a < 0$.

Odgovor je pod C.

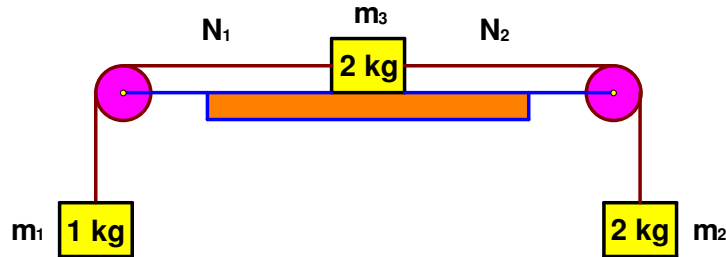
Vježba 701

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 702 (Adna, gimnazija)

Crtež prikazuje sustav sastavljen od tri tijela. Zanemarite trenje s koloturima i rastezanje niti, a za akceleraciju sile teže uzmite vrijednost $g = 10 \text{ m/s}^2$. Kolika je akceleracija sustava i kolike su sile napetosti niti N_1 i N_2 . Trenje zanemarite.



Rješenje 702

$$g = 10 \text{ m/s}^2, \quad m_1 = 1 \text{ kg}, \quad m_2 = 2 \text{ kg}, \quad m_3 = 2 \text{ kg}, \quad a = ?, \quad N_1 = ?, \quad N_2 = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}$$

Treći Newtonov poučak

Ako neko tijelo mase m_1 djeluje na drugo tijelo mase m_2 nekom silom F_{21} , onda drugo tijelo djeluje na prvo silom F_{12} koja je jednaka sili F_{21} , ali je suprotnog smjera.

$$F_{12} = F_{21} \Rightarrow m_2 \cdot a_2 = m_1 \cdot a_1 \text{ ili vektorski } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Akceleraciju naći ćemo iz osnovnog zakona gibanja:

$$a = \frac{F}{m}$$

Sila F koja uzrokuje gibanje sustava (sustav tri tijela) jednaka je razlici djelovanja sile teže na tijelo mase m_2 i tijelo mase m_1 .

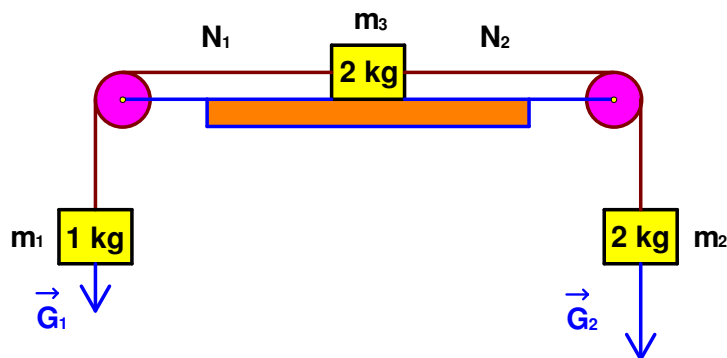
$$F = G_2 - G_1 \Rightarrow F = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \Rightarrow F = (m_2 - m_1) \cdot g$$

Budući da sila F pokreće sva tri tijela, to je masa

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

pa akceleracija iznosi:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1) \cdot g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(2 \text{ kg} - 1 \text{ kg}) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 2 \text{ kg}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Sila napetosti niti N_1 je

$$N_1 = G_1 + m_1 \cdot a \Rightarrow N_1 = m_1 \cdot g + m_1 \cdot a \Rightarrow N_1 = m_1 \cdot (g + a) = 1 \text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 12 \text{ N}.$$

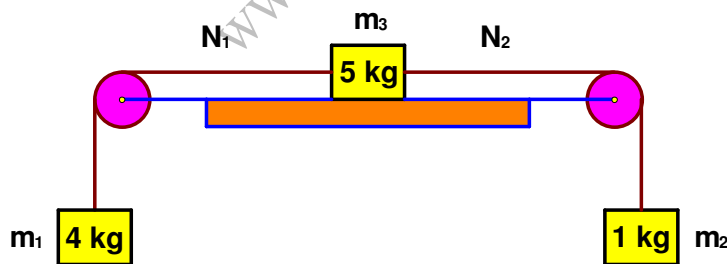
Sila napetosti niti N_2 je

$$N_2 = G_1 + m_1 \cdot a + m_3 \cdot a \Rightarrow N_2 = m_1 \cdot g + m_1 \cdot a + m_3 \cdot a \Rightarrow N_2 = m_1 \cdot g + (m_1 + m_3) \cdot a =$$

$$= 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + (1 \text{ kg} + 2 \text{ kg}) \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 16 \text{ N}.$$

Vježba 702

Crtež prikazuje sustav sastavljen od tri tijela. Zanimarite trenje s koloturima i rastezanje niti, a za akceleraciju sile teže uzmite vrijednost $g = 10 \text{ m/s}^2$. Kolika je akceleracija sustava i kolike su sile napetosti niti N_1 i N_2 . Trenje zanemarite.



Rezultat: $a = 3 \text{ m/s}^2$, $N_1 = 28 \text{ N}$, $N_2 = 13 \text{ N}$.

Zadatak 703 (Josipa, gimnazija)

Tijelo A bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom v_0 . Tijelo B pada po istom pravcu s visine d početnom brzinom 0. Nađi funkciju koja prikazuje ovisnost udaljenosti y između tijela A i B u ovisnosti o vremenu t ako pretpostavimo da su se tijela počela gibati istodobno.

Rješenje 703

$$v_0, \quad g, \quad y = ?$$

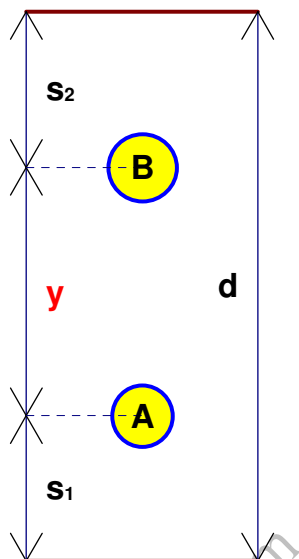
Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato je put h u času kad je prošlo vrijeme t dan ovim izrazom:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0$ m/s i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81$ m/s². Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je h visina pada.



Za vrijeme t:

- tijelo A, koje je bačeno vertikalno uvis početnom brzinom v_0 , prijeđe put

$$s_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

- tijelo B, koje slobodno pada s visine d, prijeđe put

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Udaljenost između oba tijela jest y:

$$\begin{aligned} s_1 + y + s_2 = d &\Rightarrow y = d - s_1 - s_2 \Rightarrow y = d - \left(v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \right) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = d - v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 &\Rightarrow y = d - v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow y = d - v_0 \cdot t. \end{aligned}$$

Vježba 703

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 704 (Nynns, gimnazija)

Dva automobila međusobno su udaljena 300 m i istodobno krenu jedan drugom u susret. Prvi automobil ima početnu brzinu 72 km/h i giba se jednoliko usporeno akceleracijom 2 m/s². Drugi ima početnu brzinu 36 km/h i giba se stalnom akceleracijom 2 m/s². Za koje će se vrijeme automobili mimoići?

Rješenje 704

$$s = 300 \text{ m}, \quad v_1 = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad a = 2 \text{ m/s}^2, \quad v_2 = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}, \quad a = 2 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Za jednoliko **ubrzano** pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko **usporeno** pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za vrijeme t :

- prvi automobil koji usporava akceleracijom a prijeći će put

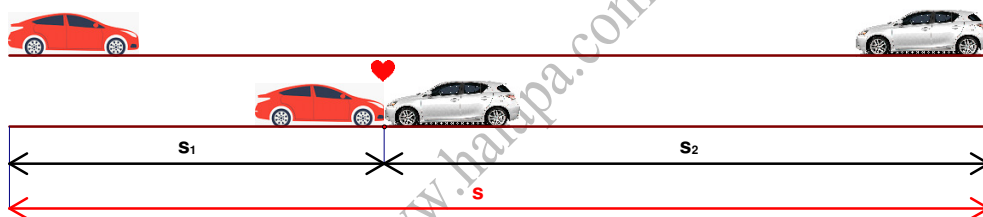
$$s_1 = v_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

- drugi automobil koji ubrzava akceleracijom a prijeći će put

$$s_2 = v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Trenutak susreta određen je uvjetom.

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 = s &\Rightarrow v_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = s \Rightarrow v_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = s \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = s \Rightarrow (v_1 + v_2) \cdot t = s \Rightarrow (v_1 + v_2) \cdot t = s \cdot \frac{1}{v_1 + v_2} \Rightarrow t = \frac{s}{v_1 + v_2} = \\ &= \frac{300 \text{ m}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 10 \text{ s.} \end{aligned}$$



Vježba 704

Dva automobila međusobno su udaljena 600 m i istodobno krenu jedan drugom u susret. Prvi automobil ima početnu brzinu 144 km/h i giba se jednoliko usporeno akceleracijom 5 m/s^2 . Drugi ima početnu brzinu 72 km/h i giba se stalnom akceleracijom 5 m/s^2 . Za koje će se vrijeme automobili mimoići?

Rezultat: 10 s.

Zadatak 705 (MaturantPN, gimnazija)

Pustimo li tijelo da slobodno pada, ono će pri udaru o tlo imati neku brzinu v . Koliko puta treba povećati visinu s koje tijelo slobodno pada da bi brzina pri udaru o tlo bila tri puta veća?

- A. 3 puta B. 6 puta C. 9 puta D. 2 puta

Rješenje 705

$$h_1, \quad v_1, \quad v_2 = 3 \cdot v_1, \quad h_2 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je h visina pada.

$$\left. \begin{aligned} v_1^2 &= 2 \cdot g \cdot h_1 \\ v_2^2 &= 2 \cdot g \cdot h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot g \cdot h_1 &= v_1^2 \\ 2 \cdot g \cdot h_2 &= v_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot g \cdot h_2}{2 \cdot g \cdot h_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow \frac{2 \cdot g \cdot h_2}{2 \cdot g \cdot h_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow h_2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow h_2 = \left(\frac{3 \cdot v_1}{v_1}\right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \left(\frac{3 \cdot v_1}{v_1}\right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow h_2 = 3^2 \cdot h_1 \Rightarrow h_2 = 9 \cdot h_1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 705

Pustimo li tijelo da slobodno pada, ono će pri udaru o tlo imati neku brzinu v . Koliko puta treba povećati visinu s koje tijelo slobodno pada da bi brzina pri udaru o tlo bila dva puta veća?

- A. 4 puta B. 8 puta C. 3 puta D. 2 puta

Rezultat: A.

Zadatak 706 (Ivan, srednja škola)

Tijelo slobodno pada i prijeđe za vrijeme t put s . Za koje će vrijeme tijelo prijeći četiri puta veći put?

- A. $4 \cdot t$ B. $2 \cdot t$ C. $8 \cdot t$ D. $16 \cdot t$ E. $\frac{t}{2}$

Rješenje 706

$$t, \quad s, \quad s_1 = 4 \cdot s, \quad t_1 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0$ m/s i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81$ m/s². Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je h visina pada.

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ s_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = s \\ \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = s_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2} = \frac{s}{s} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2} = \frac{s_1}{s} \Rightarrow \frac{t_1^2}{t^2} = \frac{s_1}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{t_1}{t}\right)^2 = \frac{s_1}{s} \Rightarrow \left(\frac{t_1}{t}\right)^2 = \frac{s_1}{s} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{s_1}{s}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{s_1}{s}} \cdot t \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{s_1}{s}} \cdot t \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot s}{s}} \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot s}{s}} \cdot t \Rightarrow t_1 = \sqrt{4} \cdot t \Rightarrow t_1 = 2 \cdot t.$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ s_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = s \\ \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = s_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = s \cdot \frac{2}{g} \\ \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = s_1 \cdot \frac{2}{g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t^2 = \frac{2 \cdot s}{g} \\ t_1^2 = \frac{2 \cdot s_1}{g} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} t^2 &= \frac{2 \cdot s}{g} \quad / \sqrt{} \\ t_1^2 &= \frac{2 \cdot s_1}{g} \quad / \sqrt{} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} \\ t_1 &= \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{g}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot s_1}{g}}{\frac{2 \cdot s}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{2 \cdot s} \cdot \frac{g}{g}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{s_1}{s}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{4 \cdot s}{s}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{4 \cdot s}{s}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{4} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t} = 2 \quad / \cdot t \Rightarrow t_1 = 2 \cdot t.$$

Odgovor je pod B.

3. inačica

Primijetimo kada tijelo slobodno pada vrijeme pada razmjerno je (proporcionalno) s kvadratnim korijenom puta.

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = s \cdot \frac{2}{g} \Rightarrow t^2 = \frac{2}{g} \cdot s \Rightarrow t^2 = \frac{2}{g} \cdot s \quad / \sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot s} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \sim \sqrt{s}.$$

Za 4 puta veći put treba 2 puta više vremena, $\sqrt{4} = 2$.

Odgovor je pod B.

Vježba 706

Tijelo slobodno pada i prijeđe za vrijeme t put s . Za koje će vrijeme tijelo prijeći šesnaest puta veći put?

- A. $4 \cdot t$ B. $2 \cdot t$ C. $8 \cdot t$ D. $16 \cdot t$ E. $\frac{t}{2}$

Rezultat: A.

Zadatak 707 (Branimir, srednja škola)

Dva automobila istodobno krenu iz mjesta A međusobno okomitim pravcima. Kolika će biti njihova međusobna udaljenost nakon vremena t ako se:

- gibaju stalnim brzinama v_1 i v_2
- gibaju stalnim akceleracijama a_1 i a_2
- jedan automobil giba stalnom brzinom v , a drugi akceleracijom a ?

Rješenje 707

$$t, \quad v_1, \quad v_2, \quad a_1, \quad a_2, \quad v, \quad a, \quad d = ?$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

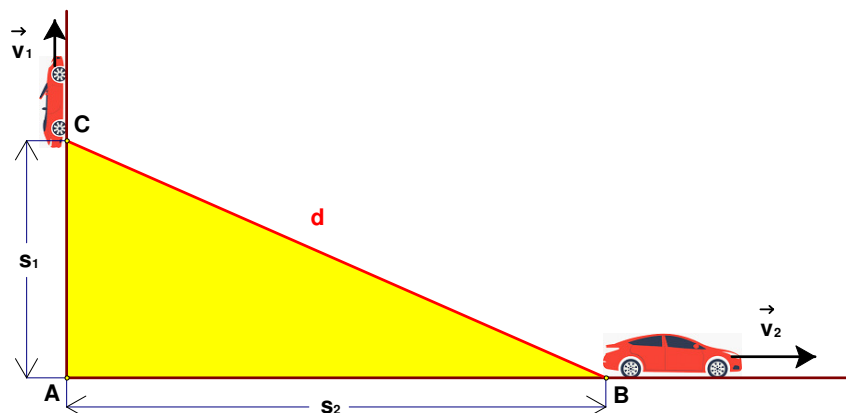
$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.



Uočimo pravokutan trokut ABC i uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$d^2 = s_1^2 + s_2^2 \Rightarrow d^2 = s_1^2 + s_2^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}.$$

Prvi slučaj

Nakon vremena t udaljenost d iznosi:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 = v_1 \cdot t \\ s_2 = v_2 \cdot t \end{bmatrix} \Rightarrow d = \sqrt{(v_1 \cdot t)^2 + (v_2 \cdot t)^2} \Rightarrow d = \sqrt{v_1^2 \cdot t^2 + v_2^2 \cdot t^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d = \sqrt{t^2 \cdot (v_1^2 + v_2^2)} \Rightarrow d = \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \Rightarrow d = t \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Drugi slučaj

Nakon vremena t udaljenost d iznosi:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \end{bmatrix} \Rightarrow d = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2\right)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot a_1^2 \cdot t^4 + \frac{1}{4} \cdot a_2^2 \cdot t^4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot t^4 \cdot (a_1^2 + a_2^2)} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot t^4} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \end{aligned}$$

Treći slučaj

Nakon vremena t udaljenost d iznosi:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 = v \cdot t \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{bmatrix} \Rightarrow d = \sqrt{(v \cdot t)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\right)^2} \Rightarrow d = \sqrt{v^2 \cdot t^2 + \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot t^4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d = \sqrt{t^2 \cdot \left(v^2 + \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot t^2\right)} \Rightarrow d = \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{v^2 + \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot t^2} \Rightarrow d = t \cdot \sqrt{v^2 + \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot t^2}. \end{aligned}$$

Vježba 707

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 708 (Antonia, gimnazija)

Sa žlijeba na krovu kuće svakih 0.2 s padne kap vode. Koliko će međusobno biti udaljene prve četiri kapi 2 s pošto je počela padati prva kap? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 708

$$\Delta t = 0.2 \text{ s}, \quad t_1 = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta s_1 = ?, \quad \Delta s_2 = ?, \quad \Delta s_3 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Najprije izračunamo putove koje će kapi prijeći.

Prva kap

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 2 \text{ s} \\ s_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2 = 19.62 \text{ m}.$$

Druga kap

$$\left. \begin{array}{l} t_2 = t_1 - \Delta t \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 - \Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s} - 0.2 \text{ s})^2 = 15.89 \text{ m}.$$

Treća kap

$$\left. \begin{array}{l} t_3 = t_1 - 2 \cdot \Delta t \\ s_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 - 2 \cdot \Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s} - 2 \cdot 0.2 \text{ s})^2 = 12.56 \text{ m}.$$

Četvrta kap

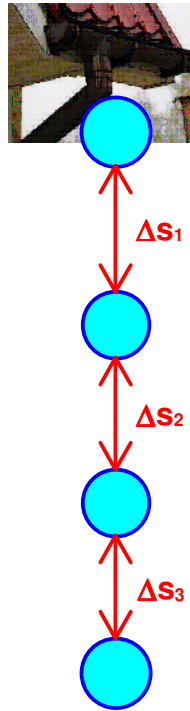
$$\left. \begin{array}{l} t_4 = t_1 - 3 \cdot \Delta t \\ s_4 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_4^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_4 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 - 3 \cdot \Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s} - 3 \cdot 0.2 \text{ s})^2 = 9.61 \text{ m}.$$

Međusobna udaljenost kapi redom iznosi:

$$\Delta s_1 = s_1 - s_2 = 19.62 \text{ m} - 15.89 \text{ m} = 3.73 \text{ m},$$

$$\Delta s_2 = s_2 - s_3 = 15.89 \text{ m} - 12.56 \text{ m} = 3.33 \text{ m},$$

$$\Delta s_3 = s_3 - s_4 = 12.56 \text{ m} - 9.61 \text{ m} = 2.95 \text{ m}.$$



Vježba 708

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 709 (Danijel, tehnička škola)

Sila djeluje na kolica mase M i ona se ubrzavaju. Na kolica se stavi teret mase m i akceleracija kolica se smanji na $\frac{1}{3}$ prijašnje vrijednosti. Pod pretpostavkom da se sila tijekom djelovanja ne mijenja omjer mase tereta i mase kolica iznosi:

A. $\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{m}{M} = \frac{1}{3}$ C. $\frac{m}{M} = 3$ D. $\frac{m}{M} = 2$

Rješenje 709

$M, \quad m, \quad a, \quad a_1 = \frac{1}{3} \cdot a, \quad \frac{m}{M} = ?$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Budući da se sila ne mijenja, vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} F = M \cdot a \\ F = (M + m) \cdot a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow M \cdot a = (M + m) \cdot a_1 \Rightarrow M \cdot a = (M + m) \cdot \frac{1}{3} \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \cdot a = (M + m) \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{3}{a} \Rightarrow 3 \cdot M = M + m \Rightarrow 3 \cdot M - M = m \Rightarrow 2 \cdot M = m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 2 \cdot M \Rightarrow m = 2 \cdot M \cdot \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{m}{M} = 2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 709

Sila djeluje na kolica mase M i ona se ubrzavaju. Na kolica se stavi teret mase m i akceleracija kolica se smanji na $\frac{1}{4}$ prijašnje vrijednosti. Pod pretpostavkom da se sila tijekom djelovanja ne mijenja omjer mase tereta i mase kolica iznosi:

$$A. \frac{m}{M} = \frac{1}{2} \quad B. \frac{m}{M} = \frac{1}{3} \quad C. \frac{m}{M} = 3 \quad D. \frac{m}{M} = 2$$

Rezultat: C.

Zadatak 710 (Bojana, prometna škola)

Tijelo pada sa visine 45 m. Nađite brzinu tijela na polovini od ukupne duljine puta. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 710

$$h = 45 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je v brzina u času kad je tijelo prešlo put h, h visina pada.

Na polovici puta $\frac{1}{2} \cdot h$ tijelo ima brzinu

$$\begin{aligned} v^2 &= 2 \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot h \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot h \Rightarrow v^2 = g \cdot h \Rightarrow v^2 = g \cdot h / \sqrt{} \Rightarrow v = \sqrt{g \cdot h} = \\ &= \sqrt{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 45 \text{ m}} = 21.21 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Vježba 710

Tijelo pada sa visine 180 m. Nađite brzinu tijela na polovini od ukupne duljine puta. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 42.43 m/s.

Zadatak 711 (Leon, gimnazija)

Skijaška žičara vuče skijašicu uzbrdo nagiba 30° . Masa skijašice sa skijama je 80 kg, a faktor trenja iznosi 0.02. Kolikom silom žičara vuče skijašicu ako se ona uzbrdo giba stalnom brzinom? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 711

$$\begin{aligned} \alpha &= 30^\circ, \quad m = 80 \text{ kg}, \quad \mu = 0.02, \quad a = 0, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad F = ? \\ h &= 45 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad v = ? \end{aligned}$$

Jednoliko pravocrtno gibanje ili jednoliko gibanje po pravcu je gibanje tijela bez ubrzanja ili akceleracije. Tijelo se giba uvijek istom brzinom.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju

jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

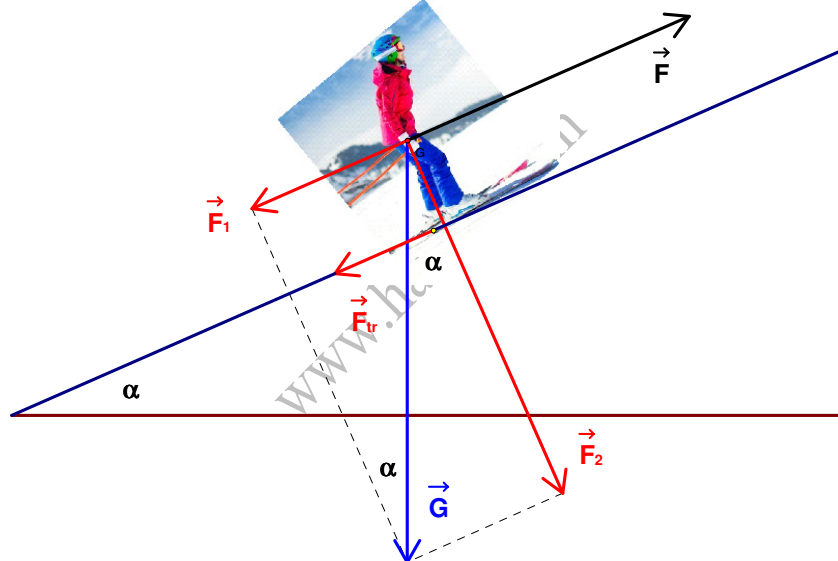
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.



Silu G rastavimo na dvije komponente: F_1 u smjeru kosine (brda) i F_2 okomito na kosinu (brdo).

Uočimo pravokutan trokut sa katetama F_1 , F_2 i hipotenuzom G .

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{F_1}{G} \\ \cos \alpha = \frac{F_2}{G} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{F_1}{G} = \sin \alpha \\ \frac{F_2}{G} = \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{F_1}{G} = \sin \alpha \cdot G \\ \frac{F_2}{G} = \cos \alpha \cdot G \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = G \cdot \sin \alpha \\ F_2 = G \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{array} \right\}.$$

Budući da žičara vuče skijašicu stalnom brzinom, vučna sila F žičare jednaka je zbroju sile F_1 i sile trenja F_{tr} . Skijašica se uzbrdo giba stalnom brzinom jer je rezultantna sila koja na nju djeluje jednaka nuli (Prvi Newtonov poučak!).

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_{tr} \Rightarrow F = F_1 + \mu \cdot F_2 \Rightarrow F = m \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= m \cdot g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) = 80 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (\sin 30^\circ + 0.02 \cdot \cos 30^\circ) = 413.86 \text{ N}. \end{aligned}$$

Vježba 711

Skijaška žičara vuče skijašicu uzbrdo nagiba 30° . Masa skijašice sa skijama je 100 kg, a faktor trenja iznosi 0.01. Kolikom silom žičara vuče skijašicu ako se ona uzbrdo giba stalnom brzinom? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 508.66 N.

Zadatak 712 (Mihael, gimnazija)

Remorker, brodić za vuču, tegli brod mase 25000 kg čeličnim užetom mase 200 kg. Ako remorker djeluje na početak užeta silom od 3000 N, kolika je napetost u užetu na njegovoj polovini?

Rješenje 712

$$m_1 = 25000 \text{ kg}, \quad m_2 = 200 \text{ kg}, \quad F = 3000 \text{ N}, \quad F_n = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Kako sila F remorkera pokreće oba tijela (brod mase m_1 i čelično uže mase m_2) to je masa sustava

$$m = m_1 + m_2.$$

Akceleraciju ćemo naći iz osnovnog zakona gibanja.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Napetost F_n u užetu (uvjetovana je masom broda i polovicom mase užeta) na njegovoj polovini iznosi:

$$\begin{aligned} F_n &= \left(m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \right) \cdot a \Rightarrow F_n = \left(m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \right) \cdot \frac{F}{m_1 + m_2} = \\ &= \left(25000 \text{ kg} + \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ kg} \right) \cdot \frac{3000 \text{ N}}{25000 \text{ kg} + 200 \text{ kg}} = 2988 \text{ N}. \end{aligned}$$

Ili

$$\begin{aligned} F_n &= F - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot a \Rightarrow F_n = F - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{F}{m_1 + m_2} = \\ &= 3000 \text{ N} - \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ kg} \cdot \frac{3000 \text{ N}}{25000 \text{ kg} + 200 \text{ kg}} = 2988 \text{ N}. \end{aligned}$$



Vježba 712

Remorker, brodić za vuču, tegli brod mase 25 t čeličnim užetom mase 0.2 t. Ako remorker djeluje na početak užeta silom od 3 kN, kolika je napetost u užetu na njegovoj polovini?

Rezultat: 2988 N.

Zadatak 713 (Lucy, gimnazija)

Pod utjecajem stalne sile motora automobil se pokrene iz mirovanja i po horizontalnoj ravnoj cesti u prvih 5 s prijeđe put 25 m. Zanimarite trenje. Ako se nakon prvih 5 s motor automobila isključi i tako sila prestane djelovati, koliki će put automobil prevaliti u sljedećih 5 s uz pretpostavku da su gubici zanemarivi?

Rješenje 713

$$t_1 = 5 \text{ s}, \quad s_1 = 25 \text{ m}, \quad t_2 = 5 \text{ s}, \quad s_2 = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba, t vrijeme gibanja.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t,$$

gdje su s i v put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

Pod utjecajem stalne sile automobil se ubrzava i za vrijeme t_1 prijeđe put s_1 .

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t_1 = s_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t_1 = s_1 \cdot \frac{2}{t_1} \Rightarrow v_1 = \frac{2 \cdot s_1}{t_1}.$$

Prestankom djelovanja sile automobil se nastavio gibati jednoliko brzinom v_1 (koju je imao u trenutku prestanka djelovanja sile, prvi Newtonov poučak). Prevaljeni put s_2 za vrijeme t_2 iznosi:

$$s_2 = v_1 \cdot t_2 \Rightarrow s_2 = \frac{2 \cdot s_1}{t_1} \cdot t_2 = \frac{2 \cdot 25 \text{ m}}{5 \text{ s}} \cdot 5 \text{ s} = 50 \text{ m}.$$

Vježba 713

Pod utjecajem stalne sile motora automobil se pokrene iz mirovanja i po horizontalnoj ravnoj cesti u prvih 6 s prijeđe put 25 m. Zanimarite trenje. Ako se nakon prvih 6 s motor automobila isključi i tako sila prestane djelovati, koliki će put automobil prevaliti u sljedećih 12 s uz pretpostavku da su gubici zanemarivi?

Rezultat: 100 m.

Zadatak 714 (Lucy, gimnazija)

Zrakoplov leti horizontalno brzinom 720 km/h na visini 2 km. Koliko prije nego što se nađe iznad cilja mora ispustiti teret? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 714

$$v_0 = 720 \text{ km/h}, \quad h = 2 \text{ km} = 2000 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz

$$v = g \cdot t,$$

gdje je v trenutačna brzina, t vrijeme pada.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Za vrijeme t tijelo je prešlo put u horizontalnom smjeru

$$x = v_0 \cdot t,$$

a u vertikalnom je smjeru palo za

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

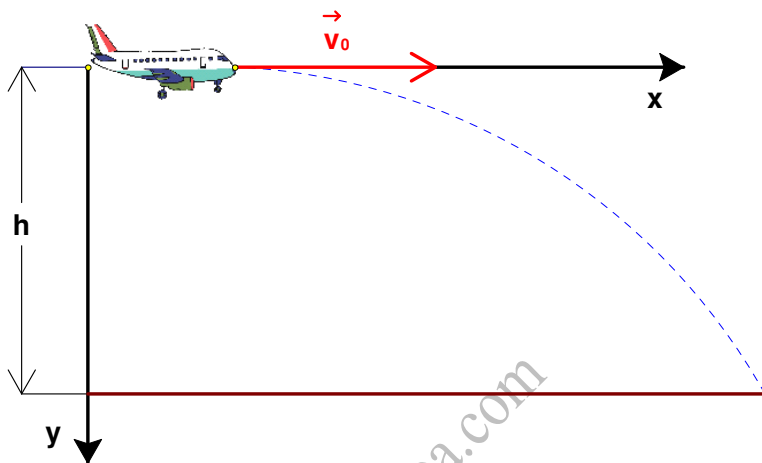
Brzina v_0 je brzina u horizontalnom (vodoravnom) smjeru. Ona se s vremenom ne povećava, niti smanjuje.

Tijelo se složeno giba kad istodobno obavlja dva ili više gibanja. Pri takvom gibanju vrijedi načelo **neovisnosti gibanja** koje glasi: Kad tijelo istodobno obavlja dva gibanja, giba se tako da se u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi stiglo kad bi obavilo samo jedno gibanje u određenom vremenskom

razmaku, a neovisno o tom gibanju istodobno i drugo gibanje u istome vremenskom razmaku. Teret se u smjeru osi x giba jednoliko brzinom v_0 , a u smjeru osi y slobodno pada. Vrijeme padanja tereta možemo odrediti promatrajući vertikalno gibanje tereta.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ y = h \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h \cdot \frac{2}{g} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot h}{g} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot h}{g} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 20.19 \text{ s.}$$



Vježba 714

Zrakoplov leti horizontalno brzinom 540 km/h na visini 1 km. Koliko prije nego što se nađe iznad cilja mora ispustiti teret? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 14.28 s.

Zadatak 715 (Lucy, gimnazija)

Zrakoplov leti horizontalno brzinom 720 km/h na visini 2 km i ispusti teret. Koliku je udaljenost u horizontalnom smjeru teret prešao do cilja? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 715

$$v_0 = 720 \text{ km/h} = [720 : 3.6] = 200 \text{ m/s}, \quad h = 2 \text{ km} = 2000 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad D = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

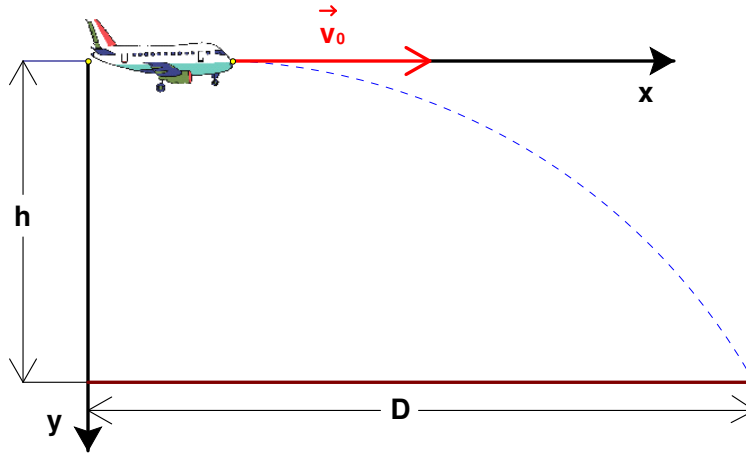
Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Domet hica D računa se po formuli

$$D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je g ubrzanje slobodnog pada, h visina s koje je tijelo izbačeno u horizontalnom smjeru brzinom v_0 .

Domet je put u horizontalnom smjeru prijeđen za vrijeme padanja tereta.

$$D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 4038.55 \text{ m.}$$



Vježba 715

Zrakoplov leti horizontalno brzinom 540 km / h na visini 2 km i ispusti teret. Koliku je udaljenost u horizontalnom smjeru teret prešao do cilja? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: 3028.91 m.

Zadatak 716 (Lucy, gimnazija)

Zrakoplov leti horizontalno brzinom 720 km / h na visini 2 km i ispusti teret. Kolika je brzina teret pri padu na zemlju? Zanimarite otpor zraka. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 716

$$v_0 = 720 \text{ km / h} = [720 : 3.6] = 200 \text{ m / s}, \quad h = 2 \text{ km} = 2000 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad v = ?$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz

$$v = g \cdot t,$$

gdje je v trenutačna brzina, t vrijeme pada.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

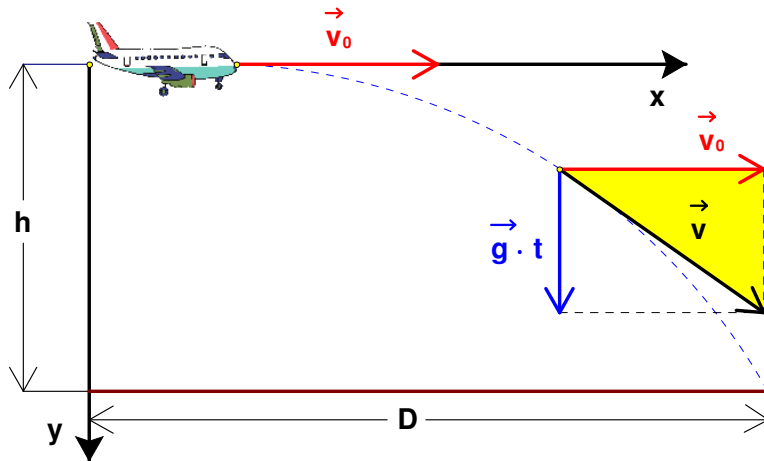
Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Konačna brzina v tijela jednaka je vektorskom zbroju komponenata brzine u smjeru osi x i y . U smjeru osi x brzina je konstantna i iznosi v_0 , a u smjeru osi y ona se mijenja po zakonu

$$v = g \cdot t.$$

Prema Pitagorinu poučku je

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}, \quad v = \sqrt{v_0^2 + (g \cdot t)^2}.$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{\left(200 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2000 \text{ m}} = 281.50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Vježba 716

Zrakoplov leti horizontalno brzinom 540 km / h na visini 2 km i ispusti teret. Kolika je brzina teret pri padu na zemlju? Zanemarite otpor zraka. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: 248.48 m / s.

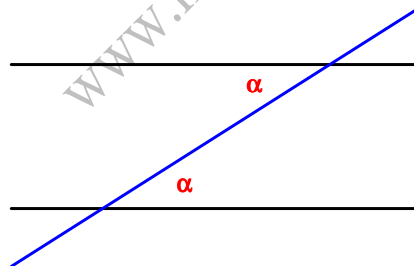
Zadatak 717 (Mihael, gimnazija)

Udaljenost između dva telefonska stupa je 50 m. Kad ptica mase 1 kg sleti na žicu koja povezuje stupove, i to točno na sredinu, žica se ulegne za 0.2 m. Izračunajte napetost žice. Zanemarite težinu žice. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 717

$$s = 50 \text{ m}, \quad d = 0.2 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad F = ?$$

Kutovi uz presječnicu usporednih pravaca



Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Četverkut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.

Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Dijagonale paralelograma raspolavljaju se.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

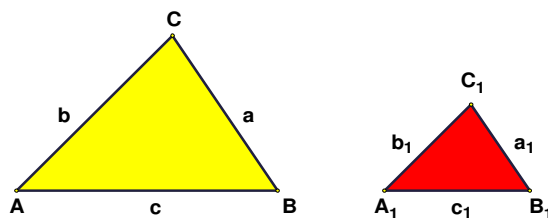
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1, \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \text{ ili } \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

- a – prvi član omjera,
- b – drugi član omjera,
- k – vrijednost (kvocijent) omjera.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

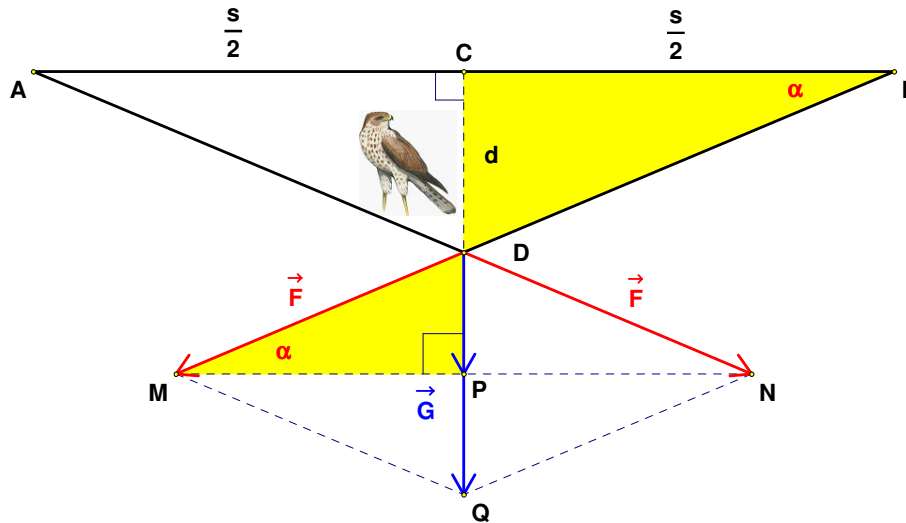
$$a : b = k, \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = s = 50 \text{ m} , |AC| = |CB| = \frac{s}{2} = 25 \text{ m} , |CD| = d = 0.2 \text{ m} , \angle DMP = \angle DBC = \alpha$$

$$|DM| = |DN| = F , |DQ| = m \cdot g , |DP| = \frac{1}{2} \cdot |DQ| = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g$$

Pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu hipotenuze $|DB|$ pravokutnog trokuta DBC.

$$\begin{aligned} |DB|^2 &= |CD|^2 + |CB|^2 \Rightarrow |DB|^2 = d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \Rightarrow |DB|^2 = d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad / \sqrt{} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |DB| = \sqrt{d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} . \end{aligned}$$

1. inačica

Zadatak ćemo riješiti pomoću trigonometrije. Na pravokutnim trokutima $\triangle DBC$ i $\triangle DMP$ uporabimo funkciju sinus za kutove α .

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|CD|}{|DB|} \\ \sin \alpha &= \frac{|DP|}{|DM|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|DP|}{|DM|} \Rightarrow \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot g}{F} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot g}{F} \quad / \cdot \frac{F \cdot \sqrt{d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}}{d} \Rightarrow F = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}}{d} \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= \frac{m \cdot g \cdot \sqrt{d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}}{2 \cdot d} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sqrt{(0.2 \text{ m})^2 + (25 \text{ m})^2}}{2 \cdot 0.2 \text{ m}} = 613.14 \text{ N} \approx 613 \text{ N} . \end{aligned}$$

2. inačica

Koristimo sličnost trokuta. Pravokutni trokuti $\triangle DBC$ i $\triangle DMP$ su slični jer se podudaraju u dva kuta (K – K) pa su im odgovarajuće stranice razmjerne.

$$\begin{aligned}
|CD| : |DB| &= |DP| : |DM| \Rightarrow |CD| \cdot |DM| = |DP| \cdot |DB| \Rightarrow \\
\Rightarrow d \cdot F &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \Rightarrow d \cdot F = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{d} \Rightarrow \\
\Rightarrow F &= \frac{m \cdot g \cdot \sqrt{d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}}{2 \cdot d} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sqrt{(0.2 \text{ m})^2 + (25 \text{ m})^2}}{2 \cdot 0.2 \text{ m}} = 613.14 \text{ N} \approx 613 \text{ N}.
\end{aligned}$$

Vježba 717

Odmor je jer ptica nije sletjela na žicu.

Rezultat: ...

Zadatak 718 (Mihael, gimnazija)

Tijelo se giba brzinom 10 m/s po glatkoj podlozi. U jednom trenutku naiđe na hrapavi dio podloge gdje je koeficijent trenja 0.2 . Koliko je dug taj hrapavi dio podloge ako tijelu brzina na kraju hrapavog dijela padne na polovinu početne vrijednosti? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$) (Našao sam taj zadatak već riješen na Vašoj stranici međutim u udžbeniku koji ja imam se nalazi prije nego se obrađuje gradivo o kinetičkoj energiji pa sam mislio ako biste mogli dodati inačicu kako riješiti na drugih način, bez kinetičke energije.)

Rješenje 718

$$v_1 = 10 \text{ m/s}, \quad \mu = 0.2, \quad v_2 = v_1 / 2 = 5 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s.$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Tijelo se na hrapavom dijelu podloge giba jednoliko usporeno zbog sile trenja. Prema drugom Newtonovu poučku možemo odrediti akceleraciju usporavanja (deceleraciju).

$$F = F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \quad /: m \Rightarrow a = \mu \cdot g.$$

Iz formule za jednoliko usporeno gibanje izračunamo put s.

$$v_2^2 = v_1^2 - 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow [a = \mu \cdot g] \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 - 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s \Rightarrow 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s = v_1^2 - v_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s = v_1^2 - v_2^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot g} \Rightarrow s = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(10 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(5 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0.2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 19.11 \text{ m.}$$

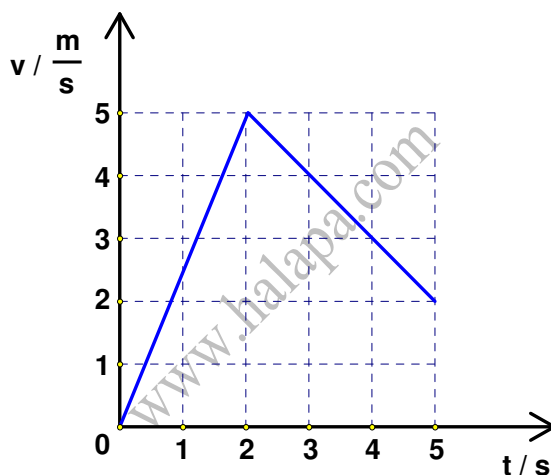
Vježba 718

Tijelo se giba brzinom 10 m/s po glatkoj podlozi. U jednom trenutku naide na hrapavi dio podloge gdje je koeficijent trenja 0.1. Koliko je dug taj hrapavi dio podloge ako tijelu brzina na kraju hrapavog dijela padne na polovinu početne vrijednosti? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 38.23 m.

Zadatak 719 (Micro, maturant)

Na crtežu je prikazan (v, t) graf gibanja nekoga tijela. Koliko iznosi srednja brzina tijela tijekom prvih 5 s gibanja?



Rješenje 719

$$t = 5 \text{ s}, \quad \bar{v} = ?$$

Srednja brzina tijela u vremenskom intervalu Δt jest količnik dijela puta Δs , što ga je tijelo prešlo za to vrijeme i vremenskog razmaka Δt :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Srednja (ili prosječna) brzina tijela (pri nejednolikom gibanju) definira se:

$$\bar{v} = \frac{\text{prijeđeni dio puta}}{\text{pripadni dio vremena}}, \quad \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \bar{v} = \frac{\text{ukupni prijeđeni put}}{\text{ukupno vrijeme gibanja}}, \quad \bar{v} = \frac{s}{t}.$$

Ploština pravokutnog trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot b}{2},$$

gdje su a i b duljine kateta.

Trapez je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice usporedne (paralelne). Usporedne stranice zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Ploština trapeza izračunava se po formuli

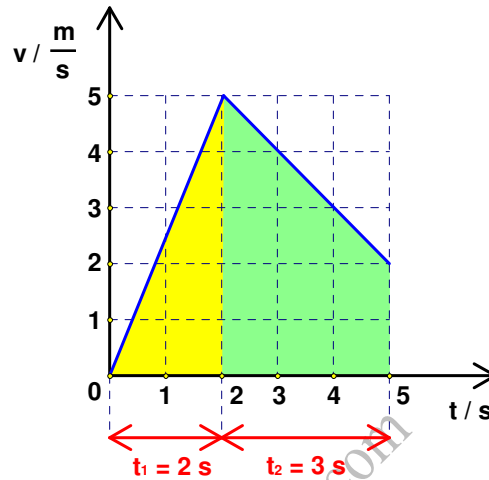
$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v,$$

gdje je a duljina donje osnovice, c duljina gornja osnovice, v visina trapeza.
Kod jednoliko ubrzanog (usporenog) gibanja po pravcu put prijeđen u vremenu t jednak je

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t,$$

gdje je v_1 početna brzina, v_2 konačna brzina.

1. inačica



Ako se brzina mijenja, put se može izračunati kao površina ispod krivulje koja pokazuje ovisnost brzine o vremenu. U našem slučaju to su:

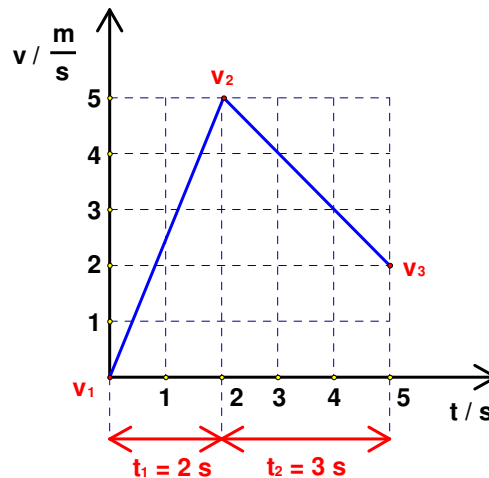
- pravokutni trokut (žuto) duljina kateta 2 i 5
- trapez (zeleno) duljina donje i gornje osnovice 5 i 2 te visine 3.

$$s = \frac{2 \text{ s} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} + \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 3 \text{ s} = 15.5 \text{ m}.$$

Srednja brzina:

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{15.5 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 3.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2. inačica



U vremenskom intervalu $t_1 = 2$ s tijelo se ubrzava iz mirovanja $v_1 = 0$ m / s do $v_2 = 5$ m / s. Prijedeni put iznosi:

$$s_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t_1 = \frac{0 \frac{m}{s} + 5 \frac{m}{s}}{2} \cdot 2 \text{ s} = 5 \text{ m}.$$

U vremenskom intervalu $t_2 = 3$ s tijelo je usporavalo od brzine $v_2 = 5$ m / s do $v_3 = 2$ m / s. Prijedeni put iznosi:

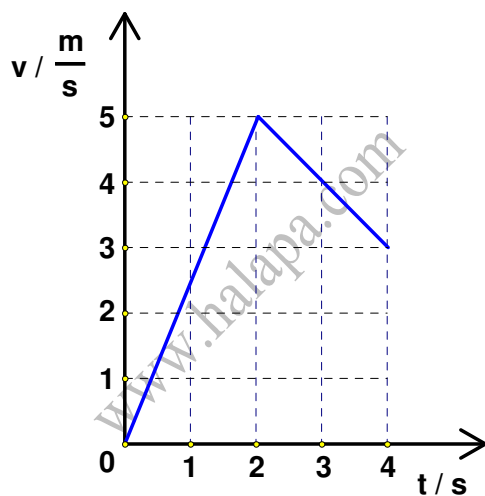
$$s_2 = \frac{v_2 + v_3}{2} \cdot t_2 = \frac{5 \frac{m}{s} + 2 \frac{m}{s}}{2} \cdot 3 \text{ s} = 10.5 \text{ m}.$$

Srednja brzina:

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{5 \text{ m} + 10.5 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 3.1 \frac{m}{s}.$$

Vježba 719

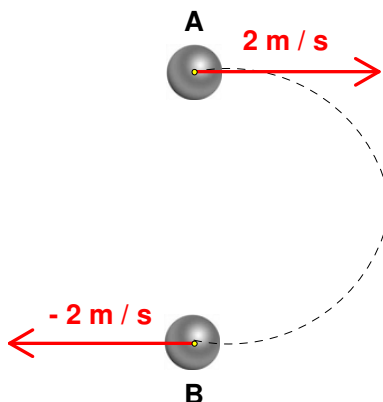
Na crtežu je prikazan (v, t) graf gibanja nekoga tijela. Koliko iznosi srednja brzina tijela tijekom prve 4 s gibanja?



Rezultat: 3.25 m / s.

Zadatak 720 (Micro, maturant)

Gibanje tijela prikazano je slikom. Kada se tijelo nalazi u točki A njegova brzina iznosi 2 m / s (udesno). Nakon što prođe 2 s tijelo se nalazi u točki B i ima brzinu od 2 m / s (ulijevo). Odredite srednju akceleraciju tijela tijekom gibanja.



Rješenje 720

$$v_1 = 2 \text{ m/s udesno}, \quad \Delta t = 2 \text{ s}, \quad v_2 = -2 \text{ m/s ulijevo}, \quad \bar{a} = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje po pravcu (jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje) je gibanje tijela stalnom akceleracijom. Srednja akceleracija je količnik razlike brzina Δv u nekom vremenskom intervalu Δt i toga vremenskog intervala:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-2 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ s}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 720

Gibanje tijela prikazano je slikom. Kada se tijelo nalazi u točki A njegova brzina iznosi 3 m/s (udesno). Nakon što prođe 3 s tijelo se nalazi u točki B i ima brzinu od 3 m/s (ulijevo). Odredite srednju akceleraciju tijela tijekom gibanja.

Rezultat: -2 m/s^2 .