

Zadatak 681 (Jelena, srednja škola)

Tijelo A slobodno pada s visine od 800 m. U istom trenutku započinje padati i drugo tijelo B s visine od 1000 m. Kojom početnom brzinom mora padati tijelo B da bi istodobno kada i tijelo A udarilo u površinu zemlje? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 681

$$h_A = 800 \text{ m}, \quad h_B = 1000 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je h visina pada.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom v_0 i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina) h dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Vrijeme za koje tijelo A slobodno padne s visine h_A iznosi:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_A}{g}}.$$

Da bi za isto vrijeme tijelo B palo s visine h_B mora imati početnu brzinu v_0 .

$$\begin{aligned} h_B = v_0 \cdot t + h_A &\Rightarrow v_0 \cdot t + h_A = h_B \Rightarrow v_0 \cdot t = h_B - h_A \Rightarrow v_0 \cdot t = h_B - h_A \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow v_0 = \frac{h_B - h_A}{t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_A}{g}} \right] \Rightarrow v_0 = \frac{h_B - h_A}{\sqrt{\frac{2 \cdot h_A}{g}}} = \frac{1000 \text{ m} - 800 \text{ m}}{\sqrt{\frac{2 \cdot 800 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}} = 15.66 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$



Vježba 681

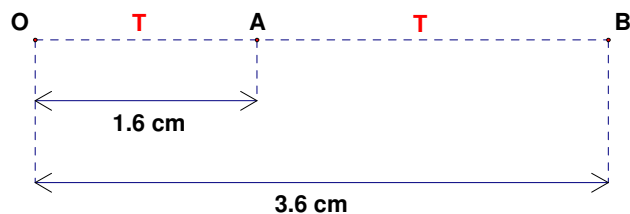
Tijelo A slobodno pada s visine od 0.8 km. U istom trenutku započinje padati i drugo tijelo B s visine od 1 km. Kojom početnom brzinom mora padati tijelo B da bi istodobno kada i tijelo A udarilo u površinu zemlje? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 15.66 m/s.

Zadatak 682 (Božidar, srednja škola)

Na slici vidite dio papirnate trake koja se gibala stalnom akceleracijom, dok je batić vibratora ostavljao na njoj tragove u jednakim vremenskim razmacima. Frekvencija batića je 50 Hz. Kolikom se

akceleracijom gibala traka na putu \overline{OB} ?



Rješenje 682

$$s_A = 1.6 \text{ cm} = 0.016 \text{ m}, \quad s_B = 3.6 \text{ cm} = 0.036 \text{ m}, \quad \nu = 50 \text{ Hz}, \quad a_B = ?$$

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije ν i periode T postoji veza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2},$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Vrijeme za koje se traka gibala na putu \overline{OB} iznosi

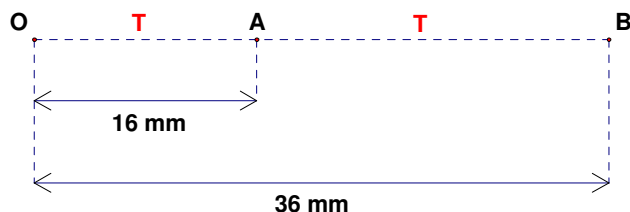
$$t = 2 \cdot T \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{1}{\nu} = 2 \cdot \frac{1}{50 \frac{1}{s}} = 0.04 \text{ s}.$$

Akceleracija na tom putu je

$$a_B = \frac{2 \cdot s_B}{t^2} = \frac{2 \cdot 0.036 \text{ m}}{(0.04 \text{ s})^2} = 45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 682

Na slici vidite dio papirnate trake koja se gibala stalnom akceleracijom, dok je batić vibratora ostavljao na njoj tragove u jednakim vremenskim razmacima. Frekvencija batića je 50 Hz. Kolikom se akceleracijom gibala traka na putu \overline{OB} ?



Rezultat: $45 \text{ m} / \text{s}^2$.

Zadatak 683 (Matija, tehnička škola)

Na tijelo mase 1 kg, koje miruje, počinje djelovati sila od 1 N. Nakon vremena od 1 s sila se poveća na 2 N. Koliki put tijelo prijeđe za vrijeme od 2 sekunde nakon početka gibanja?

Rješenje 683

$$m = 1 \text{ kg}, \quad F_1 = 1 \text{ N}, \quad t_1 = 1 \text{ s}, \quad F_2 = 2 \text{ N}, \quad t_2 = 2 \text{ s} - 1 \text{ s} = 1 \text{ s}, \quad s = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

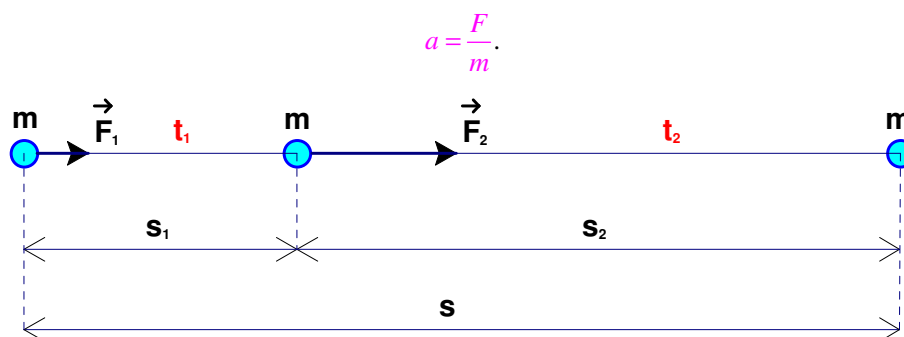
$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v = a \cdot t,$$

gdje su s i v put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.



Akceleracija na prvom i drugom dijelu puta iznosi:

$$a_1 = \frac{F_1}{m}, \quad a_2 = \frac{F_2}{m}.$$

Na kraju vremena t_1 tijelo ima brzinu

$$v_1 = a_1 \cdot t_1, \quad v_1 = \frac{F_1}{m} \cdot t_1.$$

Sada je:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2 \\ s_2 &= v_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{aligned} a_1 &= \frac{F_1}{m}, \quad a_2 = \frac{F_2}{m} \\ v_1 &= \frac{F_1}{m} \cdot t_1 \end{aligned} \right] \Rightarrow \left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1}{m} \cdot t_1^2 \\ s_2 &= \frac{F_1}{m} \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_2}{m} \cdot t_2^2 \end{aligned} \right\}.$$

Ukupan put iznosi:

$$\begin{aligned} s = s_1 + s_2 &\Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1}{m} \cdot t_1^2 + \frac{F_1}{m} \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_2}{m} \cdot t_2^2 \Rightarrow s = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot t_1^2 + F_1 \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot t_2^2 \right) = \\ &= \frac{1}{1 \text{ kg}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \text{ N} \cdot (1 \text{ s})^2 + 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ s} \cdot 1 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ N} \cdot (1 \text{ s})^2 \right) = 2.5 \text{ m}. \end{aligned}$$

Vježba 683

Na tijelo mase 100 dag, koje miruje, počinje djelovati sila od 1 N. Nakon vremena od 1 s sila se poveća na 2 N. Koliki put tijelo prijeđe za vrijeme od 2 sekunde nakon početka gibanja?

Rezultat: 2.5 m.

Zadatak 684 (Marko, tehnička škola)

Zrakoplov, mase 10 t, treba pri uzlijetanju razviti najmanju brzinu 80 km/h. Duljina uzletne staze je 100 m, a koeficijent trenja 0.2. Ako je gibanje zrakoplova prije uzlijetanja jednoliko ubrzano kolika treba biti najmanja snaga motora da zrakoplov uzleti? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 684

$m = 10 \text{ t} = 10^4 \text{ kg}$, $v = 80 \text{ km/h} = [80 : 3.6] = 22.22 \text{ m/s}$, $s = 100 \text{ m}$, $\mu = 0.2$,
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $P = ?$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$$

gdje su s i v put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga se može izračunati izrazom

$$P = F \cdot v,$$

gdje je F sila u smjeru gibanja tijela, a v brzina tijela.



Minimalna snaga motora jednaka je snazi koju zrakoplov razvije u trenutku odvajanja od staze:

$$P = F \cdot v,$$

gdje je F iznos vučne sile zrakoplova, v brzina zrakoplova. Rezultantna sila F_r koja uzrokuje gibanje zrakoplova jednaka je razlici vučne sile F i sile trenja F_{tr} .

$$F_r = F - F_{tr} \Rightarrow F_r = F - \mu \cdot m \cdot g.$$

Prema drugom Newtonovu poučku rezultantna sila F_r jednaka je umnošku mase zrakoplova m i njegove akceleracije a.

$$F_r = m \cdot a.$$

Sada je:

$$\left. \begin{array}{l} F_r = F - \mu \cdot m \cdot g \\ F_r = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot a + \mu \cdot m \cdot g.$$

Budući da je vučna sila F stalna, akceleracija a je stalna i vrijedi:

$$a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$$

Vučna sila F iznosi:

$$F = m \cdot a + \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow \left[a = \frac{v^2}{2 \cdot s} \right] \Rightarrow F = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot s} + \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow F = m \cdot \left(\frac{v^2}{2 \cdot s} + \mu \cdot g \right)$$

Minimalna snaga zrakoplova je:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot \left(\frac{v^2}{2 \cdot s} + \mu \cdot g \right) \\ P = F \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow P = m \cdot \left(\frac{v^2}{2 \cdot s} + \mu \cdot g \right) \cdot v \Rightarrow P = m \cdot v \cdot \left(\frac{v^2}{2 \cdot s} + \mu \cdot g \right) =$$

$$= 10^4 \text{ kg} \cdot 22.22 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{\left(22.22 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 100 \text{ m}} + 0.2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 984488.65 \text{ W} \approx 984 \text{ kW}$$

Vježba 684

Zrakoplov, mase 10 t, treba pri uzlijetanju razviti najmanju brzinu 80 km/h. Duljina uzletne staze je 0.1 km, a koeficijent trenja 0.2. Ako je gibanje zrakoplova prije uzlijetanja jednoliko ubrzano kolika treba biti najmanja snaga motora da zrakoplov uzleti? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 984 kW.

Zadatak 685 (Tonka, gimnazija)

Autobus se giba iza kamiona na razmaku $d = 20 \text{ m}$. Oba vozila imaju jednaku brzinu $v_0 = 36 \text{ km/h}$. U trenutku kad autobus ubrza akceleracijom $a_1 = 0.8 \text{ m/s}^2$ da bi pretekao kamion, kamion ubrza akceleracijom $a_2 = 0.4 \text{ m/s}^2$.

1. Odredi kada će autobus dostići kamion.
2. Koliki će put autobus pritom prevaliti?

Rješenje 685

$$d = 20 \text{ m}, \quad v_0 = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}, \quad a_1 = 0.8 \text{ m/s}^2, \quad a_2 = 0.4 \text{ m/s}^2, \\ t = ?, \quad s = ?$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

1.

Kamion se giba brzinom v_0 i počinje ubrzavati akceleracijom a_2 . Za vrijeme t prijeći će put s_2 .

$$s_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2$$

Autobus se giba jednakom brzinom v_0 i počinje ubrzavati akceleracijom a_1 . Za isto vrijeme t prijeći će put s_1 .

$$s_1 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2$$

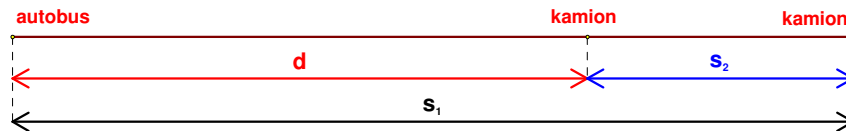
Da bi autobus za to vrijeme dostigao kamion mora prijeći razmak d i put kamiona s_2 .

$$\begin{aligned}
s_1 &= d + s_2 \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = d + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = d + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = d + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = d + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow a_1 \cdot t^2 = 2 \cdot d + a_2 \cdot t^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow a_1 \cdot t^2 - a_2 \cdot t^2 = 2 \cdot d \Rightarrow (a_1 - a_2) \cdot t^2 = 2 \cdot d \Rightarrow (a_1 - a_2) \cdot t^2 = 2 \cdot d \quad / \cdot \frac{1}{a_1 - a_2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot d}{a_1 - a_2} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot d}{a_1 - a_2} \quad / \sqrt{} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{a_1 - a_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 10 \text{ s.}
\end{aligned}$$

2.

Put koji prevali autobus iznosi:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10 \text{ s})^2 = 140 \text{ m.}$$



Vježba 685

Autobus se giba iza kamiona na razmaku $d = 0.02 \text{ km}$. Oba vozila imaju jednaku brzinu $v_0 = 36 \text{ km/h}$. U trenutku kad autobus ubrza akceleracijom $a_1 = 80 \text{ cm/s}^2$ da bi pretekao kamion, kamion ubrza akceleracijom $a_2 = 40 \text{ cm/s}^2$. Odredi kada će autobus dostići kamion.

Rezultat: 10 s.

Zadatak 686 (Tom, gimnazija)

S vrha zgrade ispušten je kamen da slobodno pada. Jednu sekundu kasnije bačena je kugla početnom brzinom v_0 koja je dostigla kamen 3 s nakon njegovog ispuštanja. Kolika je početna brzina kugle? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 686

$$\Delta t = 1 \text{ s}, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom v_0 i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina) h dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Neka je t vrijeme padanja kamena. Tada je $t - \Delta t$ vrijeme padanja kugle. Prijeđeni put:

- kamena je

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

- kugle je

$$h_2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2.$$

Budući da kugla dostigne kamen, prijeći će jednake putove.

$$\begin{aligned}
h_1 = h_2 &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) \Rightarrow \\
&\Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot t^2 - 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t + g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot t^2 - 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t + g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow 0 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) - 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t + g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) - 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t + g \cdot (\Delta t)^2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) = 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) = 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow v_0 = \frac{g \cdot \Delta t \cdot (2 \cdot t - \Delta t)}{2 \cdot (t - \Delta t)} = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1 s \cdot (2 \cdot 3 s - 1 s)}{2 \cdot (3 s - 1 s)} = 12.26 \frac{m}{s}.
\end{aligned}$$

Vježba 686

S vrha zgrade ispušten je kamen da slobodno pada. Jednu sekundu kasnije bačena je kugla početnom brzinom v_0 koja je dostigla kamen 4 s nakon njegovog ispuštanja. Kolika je početna brzina kugle? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 11.45 m/s.