

Zadatak 661 (Branimir, tehnička škola)

Vagon vlaka usporava se jednoliko te za 3 sekunde smanji brzinu 18 km/h na 6 km/h. Za koliko će se pritom iz vertikalnog položaja otkloniti kuglica koja sa stropa vagona visi na niti? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 661

$$t = 3 \text{ s}, \quad v_1 = 18 \text{ km/h} = [18 : 3.6] = 5 \text{ m/s}, \quad v_2 = 6 \text{ km/h} = [6 : 3.6] = 1.67 \text{ m/s}, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Ista formula vrijedi i kod jednoliko usporenog gibanja.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje. Isto tako vrijede i s obzirom na koordinatni sustav koji se giba po pravcu. Ti zakoni, međutim ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m , koje postavimo, primjerice, na pod vagona koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na vagon, nego će imati akceleraciju $-a$. U vagonu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila

$$-m \cdot a.$$

Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Jednoliko ubrzano gibanje po pravcu (jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje) je gibanje tijela stalnom akceleracijom. Srednja akceleracija je kvocijent razlike brzina Δv u nekom vremenskom intervalu Δt i toga vremenskog intervala:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Trenutna akceleracija a je omjer promjene brzine Δv u neizmjerljivo malom vremenskom intervalu (trenutku) Δt i toga trenutka. Kada razmatramo slučajeve gibanja pri kojima se vrijednost akceleracije neće mijenjati, onda je:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Umnožak

$$I = F \cdot t$$

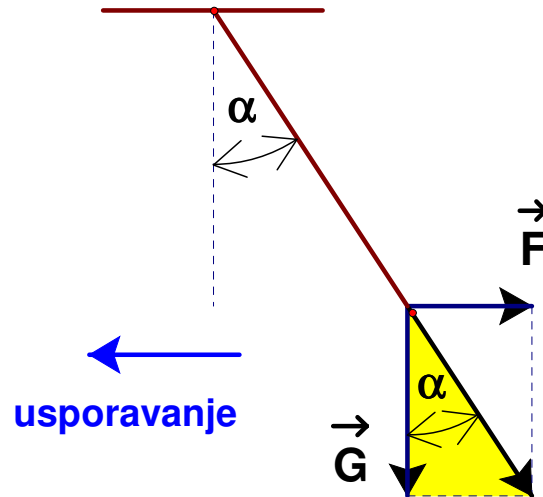
zovemo impulsom sile F , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase m .

Promjena količine gibanja tijela razmjerna je impulsu sile koji ga stvara.

$$F \cdot t = m \cdot (v_2 - v_1).$$



Kada vagon vlaka usporava kuglica će se otkloniti iz vertikalnog položaja prema naprijed za kut α . Uzrok takvom ponašanju kuglice u vagonu je sila koja se zove sila inercije.

1. inačica

Vagon vlaka usporava pa je akceleracija usporavanja (deceleracija) jednaka

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

Znak minus koji će se pojaviti u tom izrazu možemo izostaviti jer nas zanima samo veličina akceleracije, a ne i njezin smjer. Zato je:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{v_1 - v_2}{t} \\ F &= m \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}$$

Iz priložene slike vidi se da je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{F}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1 - v_2}{t \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v_1 - v_2}{t \cdot g} \right) \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{5 \frac{m}{s} - 1.67 \frac{m}{s}}{3 \text{ s} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} \right) \Rightarrow \alpha = 6^\circ 27' 20'' \end{aligned}$$

2. inačica

Iz priložene slike vidi se da je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G}$$

Silu F izračunamo iz izraza

$$F \cdot t = m \cdot (v_1 - v_2) \Rightarrow F \cdot t = m \cdot (v_1 - v_2) \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow F = \frac{m \cdot (v_1 - v_2)}{t} \Rightarrow \left[\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1 - v_2}{t \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v_1 - v_2}{t \cdot g} \right) \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ s} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) \Rightarrow \alpha = 6^\circ 27' 20''.$$

Vježba 661

Vagon vlaka ubrzava se jednoliko te za 3 sekunde poveća brzinu 6 km/h na 18 km/h. Za koliko će se pritom iz vertikalnog položaja otkloniti kuglica koja sa stropa vagona visi na niti? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $6^\circ 27' 20''$.

Zadatak 662 (Željko, srednja škola)

Dva automobila vozeći jedan drugom ususret brzinama 90 km/h i 108 km/h, na međusobnoj udaljenosti 110 m počinju istodobno kočiti s usporenjima 7 m/s^2 i 8 m/s^2 . Na kojoj međusobnoj udaljenosti će se zaustaviti?

Rješenje 662

$v_1 = 90 \text{ km/h} = [90 : 3.6] = 25 \text{ m/s}$, $v_2 = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}$,
 $d = 110 \text{ m}$, $a_1 = 7 \text{ m/s}^2$, $a_2 = 8 \text{ m/s}^2$, $x = ?$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

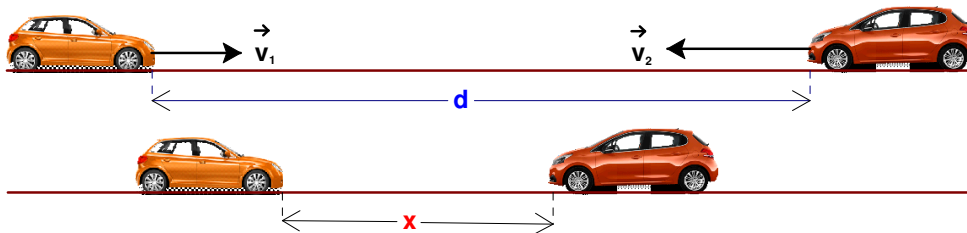
$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot a},$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Ista formula vrijedi i kod jednoliko usporenog gibanja.

Uočimo da automobil kada usporava i zaustavi se prijeđe jednak put kao da je iz mirovanja ubrzavao do jednake brzine.

Izračunamo putove s_1 i s_2 koje automobili prijeđu do zaustavljanja i zbroj tih putova oduzmemo od početne međusobne udaljenosti d .

$$x = d - (s_1 + s_2) \Rightarrow x = d - \left(\frac{v_1^2}{2 \cdot a_1} + \frac{v_2^2}{2 \cdot a_2} \right) = 110 \text{ m} - \left(\frac{\left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + \frac{\left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) = 9.11 \text{ m}.$$



Vježba 662

Dva automobila vozeći jedan drugom ususret brzinama 90 km/h i 108 km/h, na međusobnoj udaljenosti 0.11 km počinju istodobno kočiti s usporenjima 7 m/s^2 i 8 m/s^2 . Na kojoj međusobnoj udaljenosti će se zaustaviti?

Rezultat: 9.11 m.

Zadatak 663 (Ante, tehnička škola)

Iz oružja mase 450 kg izleti tane mase 5 kg u horizontalnom smjeru brzinom 450 m / s. Pri trzaju natrag oružje se pomaknulo 0.45 m. Kolika je srednja sila otpora koji je zaustavio oružje?

Rješenje 663

$$m_1 = 450 \text{ kg}, \quad m_2 = 5 \text{ kg}, \quad v_2 = 450 \text{ m / s}, \quad s = 0.45 \text{ m}, \quad F = ?$$

Treći Newtonov poučak (sila i protusila)

Ako jedno tijelo djeluje na drugo nekom silom, onda istodobno drugo djeluje na prvo silom jednake vrijednosti, ali suprotnog smjera.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Kada dva tijela, masa m_1 i m_2 , djeluju međusobno vrijedi III. Newtonov poučak. Iz toga zakona proizlazi zakon održanja količine gibanja, a taj glasi

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0,$$

ako su početne brzine obaju tijela bile jednake nuli. Brzine v_1 i v_2 brzine su tijela mase m_1 odnosno m_2 nakon njihova međusobnog djelovanja.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s},$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Računamo brzinu oružja unatrag, v_1 .

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 &\Rightarrow m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2 \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{1}{m_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 = -\frac{m_2 \cdot v_2}{m_1} = -\frac{5 \text{ kg} \cdot 450 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{450 \text{ kg}} = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Akceleracija oružja iznosi:

$$v_1^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_1^2 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_1^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot s} \Rightarrow a = \frac{v_1^2}{2 \cdot s}.$$

Srednja sila otpora ima vrijednost:

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{v_1^2}{2 \cdot s} \\ F = m_1 \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow F = m_1 \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot s} = 450 \text{ kg} \cdot \frac{\left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.45 \text{ m}} = 12500 \text{ N} = 12.5 \text{ kN} = 1.25 \cdot 10^4 \text{ N}.$$



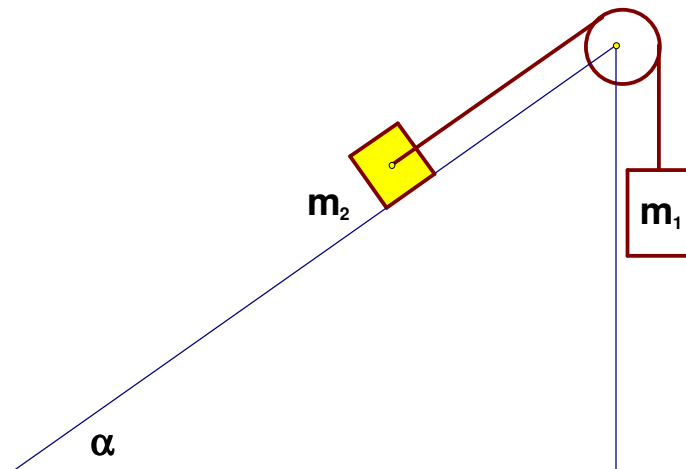
Vježba 663

Iz oružja mase 0.45 t izleti tane mase 5 kg u horizontalnom smjeru brzinom 450 m / s. Pri trzaju natrag oružje se pomaknulo 45 cm. Kolika je srednja sila otpora koji je zaustavio oružje?

Rezultat: $1.25 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Zadatak 664 (Mario, Bake, srednja škola)

Za sustav utega s kolotutom, prikazan na slici, poznate su sljedeće veličine: $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ i prikloni kut kosine $\alpha = 50^\circ$. Izračunajte vrijednost faktora trenja μ takvu da omogućuje gibanje utega jednolikom brzinom. (Trenje između kolotura i konca valja zanemariti.)



Rješenje 664

$$m_1 = 2 \text{ kg}, \quad m_2 = 1.2 \text{ kg}, \quad \alpha = 50^\circ, \quad \mu = ?$$

$$\frac{a}{n} = 0, \quad n \neq 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

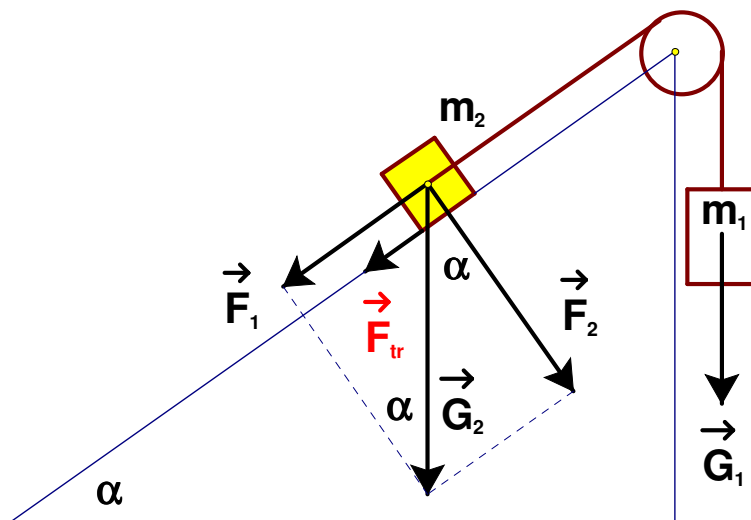
gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$



Silu težu \vec{G}_2 koja djeluje okomito prema Zemlji možemo rastaviti u dvije komponente: komponentu \vec{F}_2 okomitu na kosinu i komponentu \vec{F}_1 paralelnu s kosinom. Sa slike vidi se:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha = \frac{F_1}{G_2} &\Rightarrow \sin \alpha = \frac{F_1}{G_2} \cdot G_2 \Rightarrow F_1 = G_2 \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_1 = m_2 \cdot g \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha = \frac{F_2}{G_2} &\Rightarrow \cos \alpha = \frac{F_2}{G_2} \cdot G_2 \Rightarrow F_2 = G_2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

Tada sila trenja iznosi:

$$\left. \begin{aligned} F_{tr} &= \mu \cdot F_2 \\ F_2 &= m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Akceleraciju ćemo naći iz osnovnog zakona gibanja:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Sila F koja uzrokuje gibanje jednaka je razlici djelovanja sile teže G_1 na tijelo mase m_1 i zbroja sila F_1 i F_{tr} koje djeluju na tijelo mase m_2 .

$$F = G_1 - (F_1 + F_{tr}).$$

Kako sila F pokreće oba tijela to je masa $m = m_1 + m_2$. Tako je

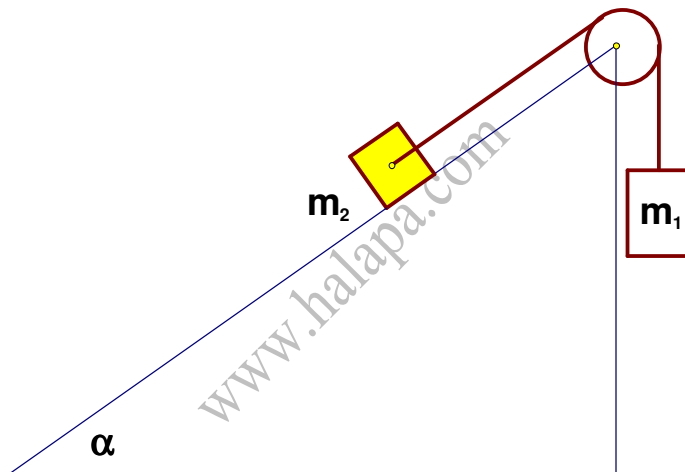
$$\begin{aligned} a = \frac{F}{m} &\Rightarrow a = \frac{G_1 - (F_1 + F_{tr})}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{m_1 \cdot g - (m_2 \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = \frac{m_1 - (m_2 \cdot \sin \alpha + \mu \cdot m_2 \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g \Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g. \end{aligned}$$

Da bi gibanje utega bilo jednoliko mora iščezavati ubrzanje $a = 0$ (prvi Newtonov poučak) koje daje jednadžbu

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{m_1 - m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g \Rightarrow [a = 0] \Rightarrow 0 = \frac{m_1 - m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g \Rightarrow \\
 &\Rightarrow m_1 - m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow m_1 = m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{1}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha &= \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \mu \cdot \cos \alpha = \frac{m_1}{m_2} - \sin \alpha \Rightarrow \mu \cdot \cos \alpha = \frac{m_1}{m_2} - \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \mu &= \frac{m_1}{m_2 \cdot \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \mu = \frac{m_1}{m_2 \cdot \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \text{ kg}}{1.2 \text{ kg} \cdot \cos 50^\circ} - \operatorname{tg} 50^\circ = 1.40.
 \end{aligned}$$

Vježba 664

Za sustav utega s koloturom, prikazan na slici, poznate su sljedeće veličine: $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 2.4 \text{ kg}$ i prikloni kut kosine $\alpha = 30^\circ$. Izračunajte vrijednost faktora trenja μ takvu da omogućuje gibanje utega jednolikom brzinom. (Trenje između kolotura i konca valja zanemariti.)



Rezultat: 1.35.

Zadatak 665 (Ante, srednja škola)

Pod kojim kutom treba baciti predmet da omjer dometa d i visine h bude n ?

Rješenje 665

$$\frac{d}{h} = n, \quad \alpha = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada.

Izrazi za domet d i visinu h glase:

$$\left. \begin{aligned}
 d &= \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \\
 h &= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \\ h &= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{\frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}}{\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \cdot \frac{2 \cdot g}{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{2 \cdot \cos \alpha}{\frac{1}{\sin \alpha}} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{4 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \left[\text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right] \Rightarrow \frac{d}{h} = 4 \cdot \text{ctg } \alpha \Rightarrow \left[\text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{4}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{4}{\text{tg } \alpha} \cdot \frac{h \cdot \text{tg } \alpha}{d} \Rightarrow \text{tg } \alpha = 4 \cdot \frac{h}{d} \Rightarrow \left[\frac{d}{h} = n \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{1}{n} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow \text{tg } \alpha = 4 \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{4}{n} \Rightarrow \alpha = \text{tg}^{-1} \left(\frac{4}{n} \right).$$

Vježba 665

Pod kojim kutom treba baciti predmet da omjer visine h i dometa d bude n?

Rezultat: $\alpha = \text{tg}^{-1}(4 \cdot n).$

Zadatak 666 (Davor, srednja škola)

Automobil mase 1500 kg giba se po horizontalnome putu stalnom brzinom. Kolika vučna sila djeluje na automobil? Koeficijent trenja između kotača i podloge iznosi 0.1. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 666

$$m = 1500 \text{ kg}, \quad \mu = 0.1, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, m masa tijela, g akceleracija slobodnog pada (ubrzanje sile teže). Budući da se automobil giba stalnom brzinom, vučna sila F jednaka je po iznosu sili trenja F_{tr} .

$$F = F_{tr} \Rightarrow F = \mu \cdot G \Rightarrow F = \mu \cdot m \cdot g = 0.1 \cdot 1500 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1500 \text{ N}.$$

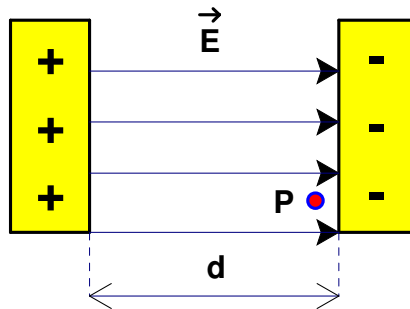
Vježba 666

Automobil mase 1.5 t giba se po horizontalnome putu stalnom brzinom. Kolika vučna sila djeluje na automobil? Koeficijent trenja između kotača i podloge iznosi 0.2. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 3000 N.

Zadatak 667 (Ljiljana, srednja škola)

Dvije nabijene metalne ploče razmaknute 10 cm nalaze se u vakuumu kao što je prikazano na slici. Homogeno električno polje između ploča ima jakost 2500 N/C. Elektron je pušten iz mirovanja u točki P koja je neposredno u blizini negativno nabijene ploče. Koliko je vremena potrebno elektronu da stigne do pozitivno nabijene ploče? (masa elektrona $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, naboj elektrona $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)



Rješenje 667

$d = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$, $E = 2500 \text{ N/C}$, $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $Q = e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$,
 $t = ?$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Ako se u polju jakosti E nalazi naboj Q, silu kojom polje djeluje na naboj možemo izračunati iz izraza

$$F = Q \cdot E.$$

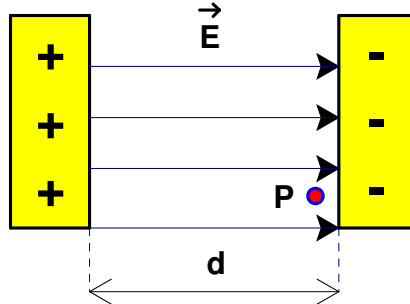
$$\left. \begin{array}{l} d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ F = Q \cdot E \\ F = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = d \\ Q \cdot E = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = d \cdot \frac{2}{t^2} \\ Q \cdot E = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{2 \cdot d}{t^2} \\ Q \cdot E = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q \cdot E = m \cdot \frac{2 \cdot d}{t^2} \Rightarrow Q \cdot E = m \cdot \frac{2 \cdot d}{t^2} \cdot \frac{t^2}{Q \cdot E} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot m \cdot d}{Q \cdot E} \Rightarrow [Q = e] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot m \cdot d}{e \cdot E} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot m \cdot d}{e \cdot E} \cdot \sqrt{} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot d}{e \cdot E}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0.1 \text{ m}}{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2500 \frac{\text{N}}{\text{C}}}} = 2.13 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Vježba 667

Dvije nabijene metalne ploče razmaknute 1 dm nalaze se u vakuumu kao što je prikazano na slici. Homogeno električno polje između ploča ima jakost 2.5 kN / C . Elektron je pušten iz mirovanja u točki P koja je neposredno u blizini negativno nabijene ploče. Koliko je vremena potrebno elektronu da stigne do pozitivno nabijene ploče? (masa elektrona $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, naboj elektrona $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)



Rezultat: $2.13 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

Zadatak 668 (Antonija, srednja škola)

Čestica mase 0.11 g nalazi se u epruveti duljine 15 cm koja je ispunjena tekućinom. Sila otpora kojom se tekućina suprotstavlja iznosi 1.079 mN . Izračunaj vrijeme potrebno da čestica sedimentacijom padne na dno epruvete. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 668

$$m = 0.11 \text{ g} = 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ kg}, \quad s = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \quad F_{ot} = 1.079 \text{ mN} = 1.079 \cdot 10^{-3} \text{ N}, \\ g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad t = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2},$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

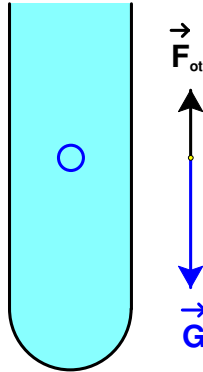
$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Rezultantna sila F koja djeluje na česticu da padne na dno epruvete jednaka je razlici sile teže G i otpora tekućine F_{ot} .

$$F = G - F_{ot} \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g - F_{ot} \Rightarrow \left[a = \frac{2 \cdot s}{t^2} \right] \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2} = m \cdot g - F_{ot} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m \cdot g - F_{ot} &= m \cdot \frac{2 \cdot s}{t} \Rightarrow m \cdot g - F_{ot} = m \cdot \frac{2 \cdot s}{t} \cdot \frac{t^2}{m \cdot g - F_{ot}} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot m \cdot s}{m \cdot g - F_{ot}} \Rightarrow \\ \Rightarrow t^2 &= \frac{2 \cdot m \cdot s}{m \cdot g - F_{ot}} \quad | \sqrt{} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot s}{m \cdot g - F_{ot}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot 0.15 \text{ m}}{1.1 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1.079 \cdot 10^{-3} \text{ N}}} = 18.17 \text{ s.} \end{aligned}$$



Vježba 668

Čestica mase 0.11 g nalazi se u epruveti duljine 1.5 dm koja je ispunjena tekućinom. Sila otpora kojom se tekućina suprotstavlja iznosi 1.079 mN. Izračunaj vrijeme potrebno da čestica sedimentacijom padne na dno epruvete. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 18.17 s.

Zadatak 669 (Rada, gimnazija)

Skijašica mase 65 kg jednoliko ubrzava po snijegu faktora trenja 0.1 tako da u četvrtoj sekundi prijeđe 8 m. Kolikom silom štapova djeluje na snijeg? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 669

$$m = 65 \text{ kg}, \quad \mu = 0.1, \quad \Delta s_4 = 8 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu

na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

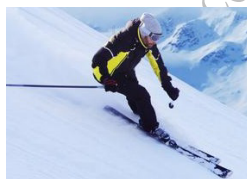
Budući da skijašica u **četvrtoj** sekundi prijeđe put duljine 8 m, njezino ubrzanje izračunat ćemo da od duljine puta prevaljenog za prve četiri sekunde oduzmemo duljinu puta prijeđenog za prve tri sekunde.

$$s_4 - s_3 = \Delta s_4 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3^2 = 8 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 9 = 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 9 = 8 \quad / \cdot 2 \Rightarrow 16 \cdot a - 9 \cdot a = 16 \Rightarrow 7 \cdot a = 16 \Rightarrow 7 \cdot a = 16 \quad / : 7 \Rightarrow a = 2.29 \frac{m}{s^2}.$$

Sila $m \cdot a$ koja ubrzava skijašicu jednaka je razlici sile štapova F kojom ona djeluje na snijeg i sile trenja F_{tr} .

$$m \cdot a = F - F_{tr} \Rightarrow F - F_{tr} = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot a + F_{tr} \Rightarrow F = m \cdot a + \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m \cdot (a + \mu \cdot g) = 65 \text{ kg} \cdot \left(2.29 \frac{m}{s^2} + 0.1 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \right) = 212.62 \text{ N}.$$



Vježba 669

Skijašica mase 65 kg jednoliko ubrzava po snijegu faktora trenja 0.1 tako da u četvrtoj sekundi prijeđe 80 dm. Kolikom silom štapova djeluje na snijeg? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 212.62 N.

Zadatak 670 (Lucy, gimnazija)

Prvo tijelo mase m bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom v_0 i postiglo je maksimalnu visinu H_1 . Drugo tijelo mase $2 \cdot m$ bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom $3 \cdot v_0$ i postiglo je maksimalnu visinu H_2 . Koliki je omjer tih visina?

A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 9

Rješenje 670

$$m, \quad v_0, \quad H_1, \quad 2 \cdot m, \quad 3 \cdot v_0, \quad H_2, \quad \frac{H_2}{H_1} = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Maksimalna visina dana je formulom

$$H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \\ H_2 &= \frac{(3 \cdot v_0)^2}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{\frac{(3 \cdot v_0)^2}{2 \cdot g}}{\frac{v_0^2}{2 \cdot g}} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{(3 \cdot v_0)^2}{v_0^2} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{(3 \cdot v_0)^2}{v_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{9 \cdot v_0^2}{v_0^2} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{9 \cdot v_0^2}{v_0^2} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = 9.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 670

Prvo tijelo mase m bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom v_0 i postiglo je maksimalnu visinu H_1 . Drugo tijelo mase $3 \cdot m$ bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom $3 \cdot v_0$ i postiglo je maksimalnu visinu H_2 . Koliki je omjer tih visina?

A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 9

Rezultat: D.

Zadatak 671 (Ema, gimnazija)

Tijelo smo bacili početnom brzinom v_0 pod kutom α prema horizontalnoj ravnini. Tijelo se vratilo na tlo za 3 sekunde? Koju je najveću visinu postiglo? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 671

$$v_0, \quad \alpha, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad H = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada.

To je složeno gibanje. Tijelo se složeno giba kad istodobno obavlja dva ili više gibanja. Pri takvom gibanju vrijedi načelo neovisnosti gibanja koje glasi:

Kad tijelo istodobno obavlja dva gibanja, giba se tako da se u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi stiglo kad bi obavilo samo jedno gibanje u određenom vremenskom razmaku, a neovisno o tom gibanju istodobno i drugo gibanje u istom vremenskom razmaku.

Izraz za najveću visinu H glasi:

$$H = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g},$$

gdje je v_0 početna brzina, α kut elevacije, g ubrzanje slobodnog pada.

Vrijeme za koje tijelo postigne najveći domet je

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \sin \alpha}{g},$$

gdje je v_0 početna brzina, α kut elevacije, g ubrzanje slobodnog pada.

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

1. inačica

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} t &= \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \\ H &= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g} &= t \\ H &= \frac{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g} &= t \cdot \frac{g}{2} \\ H &= \frac{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 \cdot \sin \alpha &= \frac{t \cdot g}{2} \\ H &= \frac{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow H = \frac{\left(\frac{t \cdot g}{2}\right)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow H = \frac{t^2 \cdot g^2}{4 \cdot 2 \cdot g} \Rightarrow \\
& \Rightarrow H = \frac{t^2 \cdot g}{4 \cdot 2} \Rightarrow H = \frac{t^2 \cdot g}{8} = \frac{(3 \text{ s})^2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{8} = 11.04 \text{ m}.
\end{aligned}$$

2. inačica

Prema načelu neovisnosti gibanja za vrijeme $\frac{t}{2}$ tijelo stigne do najviše točke pa je

$$H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{3 \text{ s}}{2}\right)^2 = 11.04 \text{ m}.$$

Vježba 671

Tijelo smo bacili početnom brzinom v_0 pod kutom α prema horizontalnoj ravni. Tijelo se vratilo na tlo za 4 sekunde? Koju je najveću visinu postiglo? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 19.62 m.

Zadatak 672 (Mislav, srednja škola)

Tijelo 1 ima dva puta veću masu od tijela 2. Na tijelo 1 djeluje sila koja je dva puta manja od one koja djeluje na tijelo 2. Koja od navedenih tvrdnji je ispravna?

- A. Akceleracija tijela 1 je dva puta veća od akceleracije tijela 2.
- B. Akceleracija tijela 1 je dva puta manja od akceleracije tijela 2.
- C. Akceleracija tijela 1 je četiri puta veća od akceleracije tijela 2.
- D. Akceleracija tijela 1 je četiri puta manja od akceleracije tijela 2.

Rješenje 672

$$m_1 = 2 \cdot m, \quad m_2 = m, \quad F_1 = \frac{1}{2} \cdot F, \quad F_2 = F$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$\begin{aligned}
& a = \frac{F}{m} \\
& \left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{F_1}{m_1} \\ a_2 &= \frac{F_2}{m_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{F_1}{m_1}}{\frac{F_2}{m_2}} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{F_1 \cdot m_2}{F_2 \cdot m_1} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot F \cdot m}{F \cdot 2 \cdot m} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot F \cdot m}{F \cdot 2 \cdot m} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{4} \cdot a_2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4} \cdot a_2.$$

Akceleracija tijela 1 je četiri puta manja od akceleracije tijela 2.

Odgovor je pod D.

Vježba 672

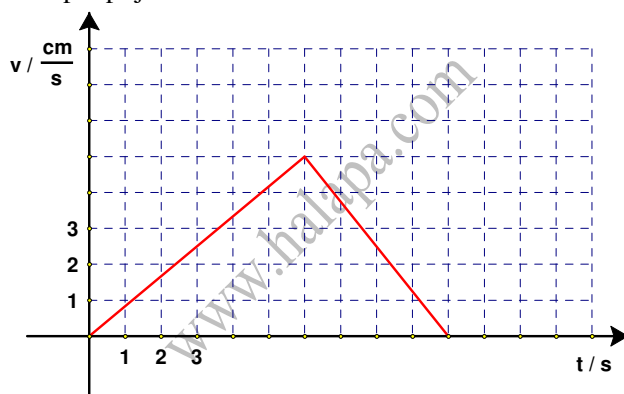
Tijelo 1 ima dva puta manju masu od tijela 2. Na tijelo 1 djeluje sila koja je četiri puta manja od one koja djeluje na tijelo 2. Koja od navedenih tvrdnji je ispravna?

- A. Akceleracija tijela 1 je dva puta veća od akceleracije tijela 2.
- B. Akceleracija tijela 1 je dva puta manja od akceleracije tijela 2.
- C. Akceleracija tijela 1 je četiri puta veća od akceleracije tijela 2.
- D. Akceleracija tijela 1 je četiri puta manja od akceleracije tijela 2.

Rezultat: B.

Zadatak 673 (Marijana, maturantica)

Na $v - t$ dijagramu je prikazana vremenska ovisnost brzine tijela mase 5 kg. Odredite oblik gibanja u prvih 6 sekundi te put prijeđen nakon 6 i nakon 10 s.



- A. jednoliko gibanje, 15 cm, 25 cm
- B. jednoliko ubrzano gibanje, 15 cm, 25 cm
- C. jednoliko gibanje, 15 cm, 5 cm
- D. jednoliko ubrzano gibanje, 30 cm, 50 cm
- E. jednoliko gibanje, 30 cm, 50 cm

Rješenje 673

$$m = 5 \text{ kg}, \quad t_1 = 6 \text{ s}, \quad t_2 = 10 \text{ s}$$

Neka je a realan broj. Funkcija $f : R \rightarrow R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x$ naziva se linearna funkcija.

Graf linearne funkcije je pravac koji prolazi ishodištem. Linearna funkcija raste ako je $a > 0$.

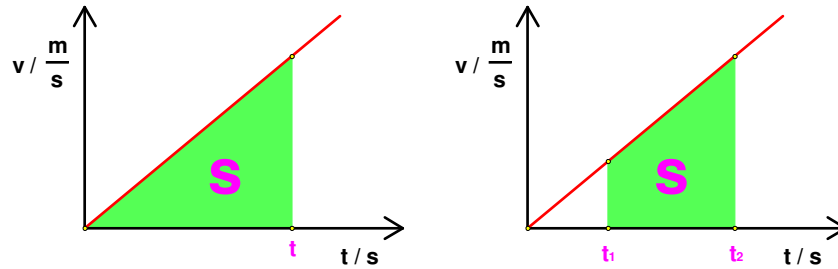
Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Jednoliko ubrzano gibanje je gibanje kod kojeg je brzina u svakom času upravo razmjerna vremenu, a faktor razmjernosti je akceleracija a . Brzina je linearna funkcija vremena pa će grafički prikaz biti pravac kroz ishodište čiji će nagib ovisiti o veličini akceleracije.

Na $v - t$ grafu možemo uočiti i koliki je prijeđeni put u nekom vremenskom intervalu. Na grafu to je ploština osjenčanog pravokutnog trokuta ili trapeza.



Površina ispod krivulje u $v - t$ grafu je prijeđeni put s u vremenu od t_1 do t_2 .

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

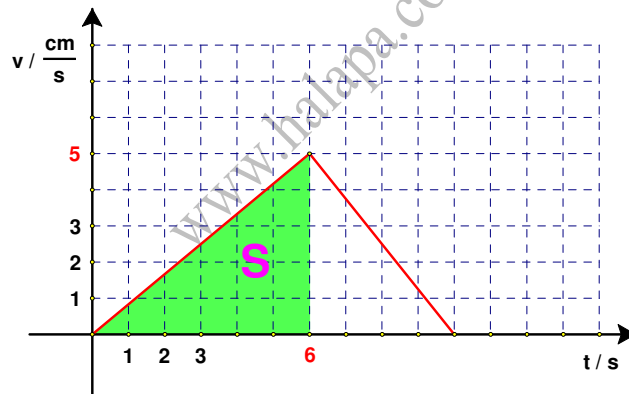
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}, \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2}, \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

U prvih 6 sekundi brzina (linearna funkcija vremena) raste pa je riječ o jednoliko ubrzanom gibanju.

Na grafu put je jednak ploštini osjenčanog geometrijskih lika: pravokutnog trokuta.

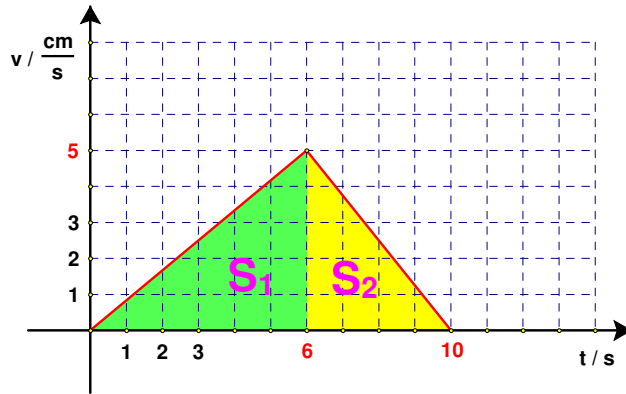


$$s = \frac{6 \text{ s} \cdot 5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2} \Rightarrow s = 15 \text{ cm}.$$

Put prijeđen nakon 10 sekundi možemo izračunati na dva načina.

1. inačica

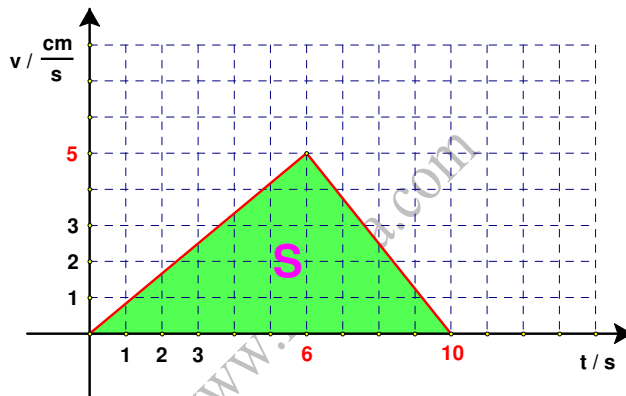
Na grafu je put jednak ploštini osjenčanih geometrijskih likova: dva pravokutna trokuta.



$$s = s_1 + s_2 \Rightarrow s = \frac{6 \text{ s} \cdot 5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2} + \frac{4 \text{ s} \cdot 5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2} \Rightarrow s = 15 \text{ cm} + 10 \text{ cm} \Rightarrow s = 25 \text{ cm}.$$

2. inačica

Na grafu je put jednak ploštini osjenčanog geometrijskog lika: trokuta.



$$s = \frac{10 \text{ s} \cdot 5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2} \Rightarrow s = 25 \text{ cm}.$$

Moj konačan odgovor je pod B. ☺

Vježba 673

Nema vježbe!

Rezultat: ...

Zadatak 674 (Ivica, gimnazija)

Tijelo, koje se giba jednoliko ubrzano, prijeđe dio puta dugačak 40 m za 24 s, pri čemu mu se brzina na tom dijelu puta poveća 4 puta.

- Kolika je početna brzina?
- Kolika je akceleracija kojom se giba tijelo?

Rješenje 674

$$s = 40 \text{ m}, \quad t = 24 \text{ s}, \quad v = 4 \cdot v_0, \quad v_0 = ?, \quad a = ?$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v = v_0 + a \cdot t.$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s.$$

a)

$$\left. \begin{array}{l} s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow [v = 4 \cdot v_0] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ 4 \cdot v_0 = v_0 + a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ 4 \cdot v_0 - v_0 = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ 3 \cdot v_0 = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t \cdot (a \cdot t) \\ 3 \cdot v_0 = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t \cdot 3 \cdot v_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = v_0 \cdot t + \frac{3}{2} \cdot v_0 \cdot t \Rightarrow s = \frac{5}{2} \cdot v_0 \cdot t \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot v_0 \cdot t = s \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot v_0 \cdot t = s \cdot \frac{2}{5 \cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot s}{5 \cdot t} = \frac{2 \cdot 40 \text{ m}}{5 \cdot 24 \text{ s}} = \frac{80 \text{ m}}{120 \text{ s}} = \frac{80 \text{ m}}{120 \text{ s}} = \frac{2 \text{ m}}{3 \text{ s}}.$$

b) Računamo akceleraciju a .

1. inačica

$$3 \cdot v_0 = a \cdot t \Rightarrow a \cdot t = 3 \cdot v_0 \Rightarrow a \cdot t = 3 \cdot v_0 \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot v_0}{t} = \left[\begin{array}{l} v_0 = \frac{2 \text{ m}}{3 \text{ s}} \\ t = 24 \text{ s} \end{array} \right] = \frac{3 \cdot \frac{2 \text{ m}}{3 \text{ s}}}{24 \text{ s}} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{2 \text{ m}}{3 \text{ s}}}{24 \text{ s}} = \frac{1 \text{ m}}{12 \text{ s}^2}.$$

2. inačica

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow [v = 4 \cdot v_0] \Rightarrow (4 \cdot v_0)^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 16 \cdot v_0^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot v_0^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 15 \cdot v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = 15 \cdot v_0^2 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = 15 \cdot v_0^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{15 \cdot v_0^2}{2 \cdot s} = \frac{15 \cdot \left(\frac{2 \text{ m}}{3 \text{ s}}\right)^2}{2 \cdot 40 \text{ m}} = \frac{15 \cdot \frac{4 \text{ m}^2}{9 \text{ s}^2}}{80 \text{ m}} = \frac{15 \cdot \frac{4 \text{ m}^2}{9 \text{ s}^2}}{80 \text{ m}} = \frac{1 \text{ m}}{12 \text{ s}^2}.$$

Vježba 674

Nema vježbe.

Rezultat: ...

Zadatak 675 (Manuela, srednja škola)

Automobil se uz konstantan "gas" giba po horizontalnoj cesti jednoliko brzinom 36 km/h. Dodamo li "gas" automobil za deset sekundi prijeđe put od 300 m. Kolika je tada brzina automobila?

Rješenje 675

$$v_0 = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}, \quad t = 10 \text{ s}, \quad s = 300 \text{ m}, \quad v = ?$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v = v_0 + a \cdot t.$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s.$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t,$$

gdje je v_0 početna brzina, v konačna brzina.

$$\begin{aligned} s &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = s \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = s / 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t + a \cdot t^2 = 2 \cdot s \Rightarrow a \cdot t^2 = 2 \cdot s - 2 \cdot v_0 \cdot t \Rightarrow a \cdot t^2 = 2 \cdot s - 2 \cdot v_0 \cdot t / \frac{1}{t^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = \frac{2 \cdot s - 2 \cdot v_0 \cdot t}{t^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot (s - v_0 \cdot t)}{t^2} = \frac{2 \cdot \left(300 \text{ m} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} \right)}{(10 \text{ s})^2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Računamo konačnu brzinu v.

1. inačica

$$v = v_0 + a \cdot t = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2. inačica

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s} = \\ &= \sqrt{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + 2 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 300 \text{ m}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} s &= \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \Rightarrow \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = s \Rightarrow \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = s / \frac{2}{t} \Rightarrow v_0 + v = \frac{2 \cdot s}{t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = \frac{2 \cdot s}{t} - v_0 = \frac{2 \cdot 300 \text{ m}}{10 \text{ s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Vježba 675

Automobil se uz konstantan "gas" giba po horizontalnoj cesti jednoliko brzinom 36 km / h. Dodamo li "gas" automobil za deset sekundi prijeđe put od 0.3 km. Kolika je tada brzina automobila?

Rezultat: 50 m / s.

Zadatak 676 (Robert, srednja škola)

Dva su automobila krenula iz istog mjesta jedan za drugim u vremenskom razmaku od 80 s, s jednakim ubrzanjem $0.5 \text{ m} / \text{s}^2$. Računajući od početka gibanja prvog automobila, razmak između njih iznositi će 5 km nakon:

- A. 200 s B. 40 s C. 165 s D. 405 s E. 185 s

Rješenje 676

$$\Delta t = 80 \text{ s}, \quad a = 0.5 \text{ m} / \text{s}^2, \quad \Delta s = 5 \text{ km} = 5000 \text{ m}, \quad t = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \text{ put prvog automobila} \\ s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - \Delta t)^2 \text{ put drugog automobila} \end{array} \right\} \Rightarrow [s_1 - s_2 = \Delta s] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - \Delta t)^2 = \Delta s \Rightarrow$$

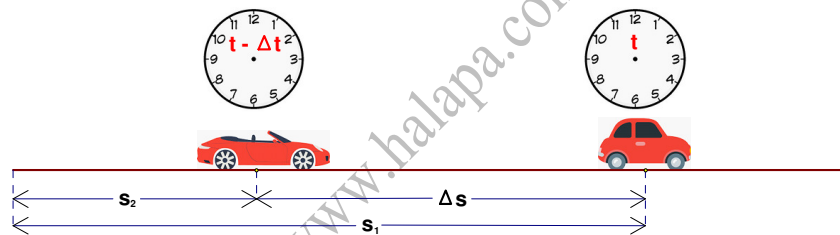
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - \Delta t)^2 = \Delta s \cdot 2 \Rightarrow a \cdot t^2 - a \cdot (t - \Delta t)^2 = 2 \cdot \Delta s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot t^2 - a \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) = 2 \cdot \Delta s \Rightarrow a \cdot t^2 - a \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot t \cdot \Delta t - a \cdot (\Delta t)^2 = 2 \cdot \Delta s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot t^2 - a \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot t \cdot \Delta t - a \cdot (\Delta t)^2 = 2 \cdot \Delta s \Rightarrow 2 \cdot a \cdot t \cdot \Delta t - a \cdot (\Delta t)^2 = 2 \cdot \Delta s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a \cdot t \cdot \Delta t = 2 \cdot \Delta s + a \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot t \cdot \Delta t = 2 \cdot \Delta s + a \cdot (\Delta t)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot a \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2 \cdot \Delta s + a \cdot (\Delta t)^2}{2 \cdot a \cdot \Delta t} = \frac{2 \cdot 5000 \text{ m} + 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (80 \text{ s})^2}{2 \cdot 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 80 \text{ s}} = 165 \text{ s.}$$



Odgovor je pod C.

Vježba 676

Dva su automobila krenula iz istog mjesta jedan za drugim u vremenskom razmaku od 1 min 20 s, s jednakim ubrzanjem $5 \text{ dm} / \text{s}^2$. Računajući od početka gibanja prvog automobila, razmak između njih iznositi će 5 km nakon:

- A. 200 s B. 40 s C. 165 s D. 405 s E. 185 s

Rezultat: C.

Zadatak 677 (Franka, gimnazija)

Napišite definicijsku jednadžbu za akceleraciju tijela.

- Je li smjer akceleracije tijela uvijek jednak smjeru brzine tijela?
- Može li se dogoditi da je brzina tijela jednaka nula, a da tijelo ima akceleraciju različitu od nule?

Rješenje 677

$$\Delta v, \quad \Delta t, \quad a = ?$$

Srednja akceleracija a je promjena brzine

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

u vremenskom intervalu

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

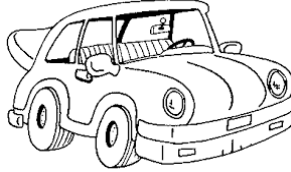
u kojem se ta promjena dogodila.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

1. Smjer akceleracije ne mora uvijek biti jednak smjeru brzine tijela.

Primjer

Jednoliko usporeno gibanje, vertikalni hitac uvis. Kada tijelo usporava njegova je akceleracija negativna.



2. Može se dogoditi da je brzina tijela jednaka nula, a tijelo ima akceleraciju različitu od nule.

Primjer

Bacamo tijelo vertikalno uvis. U najvišoj točki staze brzina tijela je nula, $v = 0$, a akceleracija je različita od nule, $a \neq 0$. Podsjetimo se $a = g$ ubrzanje slobodnog pada.

Također je važno naglasiti kada je tijelo bačeno vertikalno prema gore i vraća se. Tijekom leta vektori brzine i akceleracije tijela prvo su suprotne orijentacije, a zatim jednake orijentacije.

Dobro je znati kada je brzina tijela različita od nule i stalnog iznosa da akceleracija ne mora biti jednaka nula. Sjetimo se centripetalne akceleracije kod jednolikog gibanja po kružnici.

Vježba 677

Nema pitanja!

Rezultat: ...