

Zadatak 661 (Branimir, tehnička škola)

Vagon vlaka usporava se jednoliko te za 3 sekunde smanji brzinu 18 km/h na 6 km/h. Za koliko će se pritom iz vertikalnog položaja otkloniti kuglica koja sa stropa vagona visi na niti? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 661

$$t = 3 \text{ s}, \quad v_1 = 18 \text{ km/h} = [18 : 3.6] = 5 \text{ m/s}, \quad v_2 = 6 \text{ km/h} = [6 : 3.6] = 1.67 \text{ m/s}, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Ista formula vrijedi i kod jednoliko usporenog gibanja.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje. Isto tako vrijede i s obzirom na koordinatni sustav koji se giba po pravcu. Ti zakoni, međutim ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m , koje postavimo, primjerice, na pod vagona koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na vagon, nego će imati akceleraciju $-a$. U vagonu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila

$$-m \cdot a.$$

Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Jednoliko ubrzano gibanje po pravcu (jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje) je gibanje tijela stalnom akceleracijom. Srednja akceleracija je kvocijent razlike brzina Δv u nekom vremenskom intervalu Δt i toga vremenskog intervala:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Trenutna akceleracija a je omjer promjene brzine Δv u neizmjerljivo malom vremenskom intervalu (trenutku) Δt i toga trenutka. Kada razmatramo slučajeve gibanja pri kojima se vrijednost akceleracije neće mijenjati, onda je:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Umnožak

$$I = F \cdot t$$

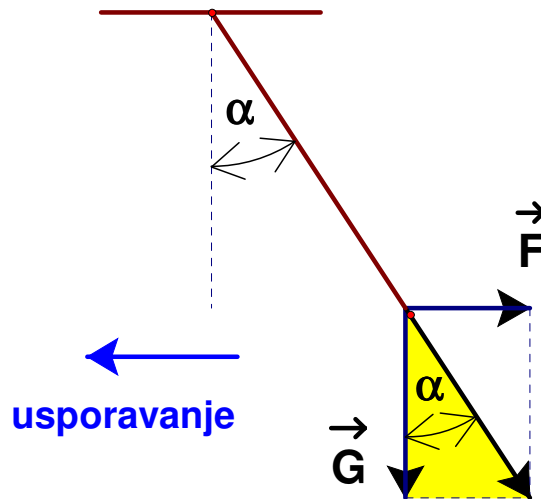
zovemo impulsom sile F , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase m .

Promjena količine gibanja tijela razmjerna je impulsu sile koji ga stvara.

$$F \cdot t = m \cdot (v_2 - v_1).$$



Kada vagon vlaka usporava kuglica će se otkloniti iz vertikalnog položaja prema naprijed za kut α . Uzrok takvom ponašanju kuglice u vagonu je sila koja se zove sila inercije.

1. inačica

Vagon vlaka usporava pa je akceleracija usporavanja (deceleracija) jednaka

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

Znak minus koji će se pojaviti u tom izrazu možemo izostaviti jer nas zanima samo veličina akceleracije, a ne i njezin smjer. Zato je:

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{v_1 - v_2}{t} \\ F = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}$$

Iz priložene slike vidi se da je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G} &\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1 - v_2}{t \cdot g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v_1 - v_2}{t \cdot g} \right) \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{5 \frac{m}{s} - 1.67 \frac{m}{s}}{3 \text{ s} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} \right) \Rightarrow \alpha = 6^\circ 27' 20'' \end{aligned}$$

2. inačica

Iz priložene slike vidi se da je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G}$$

Silu F izračunamo iz izraza

$$F \cdot t = m \cdot (v_1 - v_2) \Rightarrow F \cdot t = m \cdot (v_1 - v_2) \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow F = \frac{m \cdot (v_1 - v_2)}{t} \Rightarrow \left[\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1 - v_2}{t \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v_1 - v_2}{t \cdot g} \right) \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{5 \frac{m}{s} - 1.67 \frac{m}{s}}{3 \text{ s} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} \right) \Rightarrow \alpha = 6^\circ 27' 20''.$$

Vježba 661

Vagon vlaka ubrzava se jednoliko te za 3 sekunde poveća brzinu 6 km/h na 18 km/h. Za koliko će se pritom iz vertikalnog položaja otkloniti kuglica koja sa stropa vagona visi na niti? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $6^\circ 27' 20''$.

Zadatak 662 (Željko, srednja škola)

Dva automobila vozeći jedan drugom ususret brzinama 90 km/h i 108 km/h, na međusobnoj udaljenosti 110 m počinju istodobno kočiti s usporenjima 7 m/s^2 i 8 m/s^2 . Na kojoj međusobnoj udaljenosti će se zaustaviti?

Rješenje 662

$v_1 = 90 \text{ km/h} = [90 : 3.6] = 25 \text{ m/s}$, $v_2 = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}$,
 $d = 110 \text{ m}$, $a_1 = 7 \text{ m/s}^2$, $a_2 = 8 \text{ m/s}^2$, $x = ?$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

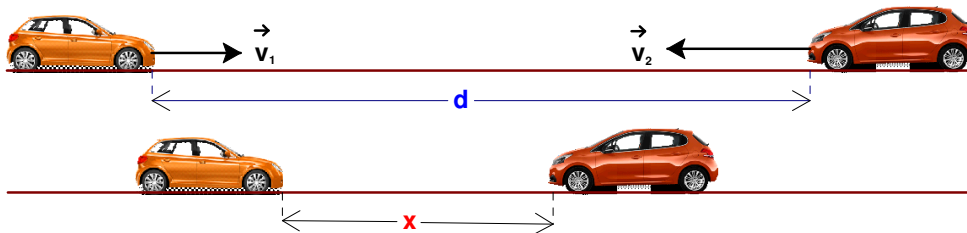
$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot a},$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Ista formula vrijedi i kod jednoliko usporenog gibanja.

Uočimo da automobil kada usporava i zaustavi se prijeđe jednak put kao da je iz mirovanja ubrzavao do jednake brzine.

Izračunamo putove s_1 i s_2 koje automobili prijeđu do zaustavljanja i zbroj tih putova oduzmemo od početne međusobne udaljenosti d .

$$x = d - (s_1 + s_2) \Rightarrow x = d - \left(\frac{v_1^2}{2 \cdot a_1} + \frac{v_2^2}{2 \cdot a_2} \right) = 110 \text{ m} - \left(\frac{\left(25 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 7 \frac{m}{s^2}} + \frac{\left(30 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 8 \frac{m}{s^2}} \right) = 9.11 \text{ m}.$$



Vježba 662

Dva automobila vozeći jedan drugom ususret brzinama 90 km/h i 108 km/h, na međusobnoj udaljenosti 0.11 km počinju istodobno kočiti s usporenjima 7 m/s^2 i 8 m/s^2 . Na kojoj međusobnoj udaljenosti će se zaustaviti?

Rezultat: 9.11 m.

Zadatak 663 (Ante, tehnička škola)

Iz oružja mase 450 kg izleti tane mase 5 kg u horizontalnom smjeru brzinom 450 m / s. Pri trzaju natrag oružje se pomaknulo 0.45 m. Kolika je srednja sila otpora koji je zaustavio oružje?

Rješenje 663

$$m_1 = 450 \text{ kg}, \quad m_2 = 5 \text{ kg}, \quad v_2 = 450 \text{ m / s}, \quad s = 0.45 \text{ m}, \quad F = ?$$

Treći Newtonov poučak (sila i protusila)

Ako jedno tijelo djeluje na drugo nekom silom, onda istodobno drugo djeluje na prvo silom jednake vrijednosti, ali suprotnog smjera.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Kada dva tijela, masa m_1 i m_2 , djeluju međusobno vrijedi III. Newtonov poučak. Iz toga zakona proizlazi zakon održanja količine gibanja, a taj glasi

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0,$$

ako su početne brzine obaju tijela bile jednake nuli. Brzine v_1 i v_2 brzine su tijela mase m_1 odnosno m_2 nakon njihova međusobnog djelovanja.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s},$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Računamo brzinu oružja unatrag, v_1 .

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 &\Rightarrow m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2 \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{1}{m_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 = -\frac{m_2 \cdot v_2}{m_1} = -\frac{5 \text{ kg} \cdot 450 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{450 \text{ kg}} = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Akceleracija oružja iznosi:

$$v_1^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_1^2 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_1^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot s} \Rightarrow a = \frac{v_1^2}{2 \cdot s}.$$

Srednja sila otpora ima vrijednost:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{v_1^2}{2 \cdot s} \\ F &= m_1 \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = m_1 \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot s} = 450 \text{ kg} \cdot \frac{\left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.45 \text{ m}} = 12500 \text{ N} = 12.5 \text{ kN} = 1.25 \cdot 10^4 \text{ N}.$$



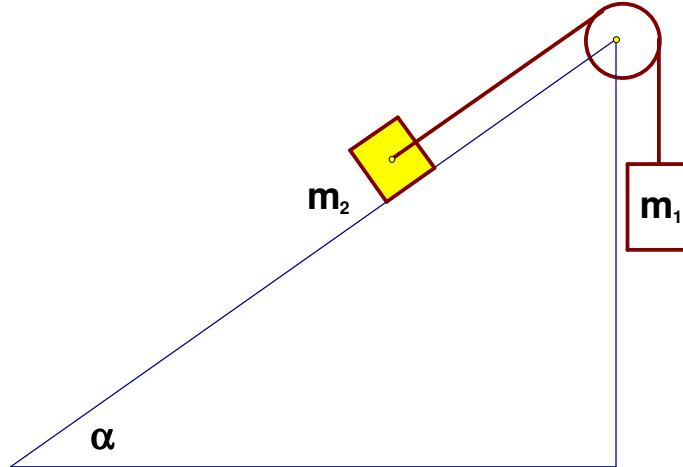
Vježba 663

Iz oružja mase 0.45 t izleti tane mase 5 kg u horizontalnom smjeru brzinom 450 m / s. Pri trzaju natrag oružje se pomaknulo 45 cm. Kolika je srednja sila otpora koji je zaustavio oružje?

Rezultat: $1.25 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Zadatak 664 (Mario, Bake, srednja škola)

Za sustav utega s kolotutom, prikazan na slici, poznate su sljedeće veličine: $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ i prikloni kut kosine $\alpha = 50^\circ$. Izračunajte vrijednost faktora trenja μ takvu da omogućuje gibanje utega jednolikom brzinom. (Trenje između kolotura i konca valja zanemariti.)



Rješenje 664

$$m_1 = 2 \text{ kg}, \quad m_2 = 1.2 \text{ kg}, \quad \alpha = 50^\circ, \quad \mu = ?$$

$$\frac{a}{n} = 0, \quad n \neq 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

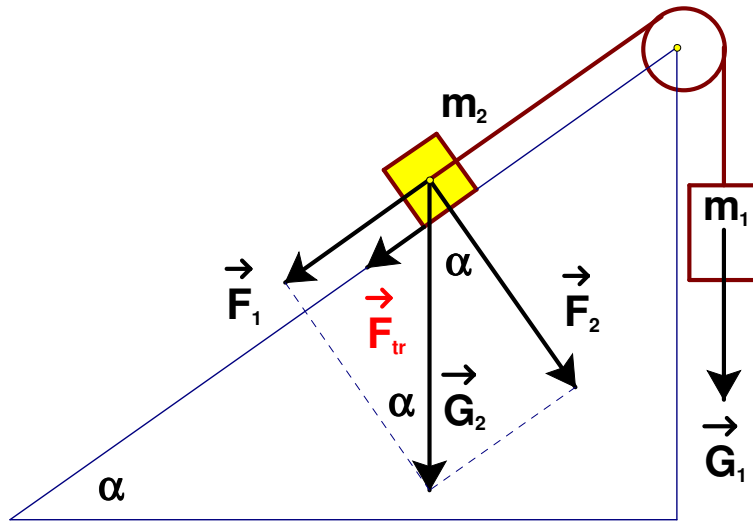
gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$



Silu težu \vec{G}_2 koja djeluje okomito prema Zemlji možemo rastaviti u dvije komponente: komponentu \vec{F}_2 okomitu na kosinu i komponentu \vec{F}_1 paralelnu s kosinom. Sa slike vidi se:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{F_1}{G_2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{F_1}{G_2} / \cdot G_2 \Rightarrow F_1 = G_2 \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_1 = m_2 \cdot g \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{F_2}{G_2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{F_2}{G_2} / \cdot G_2 \Rightarrow F_2 = G_2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

Tada sila trenja iznosi:

$$\left. \begin{aligned} F_{tr} &= \mu \cdot F_2 \\ F_2 &= m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Akceleraciju ćemo naći iz osnovnog zakona gibanja:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Sila F koja uzrokuje gibanje jednaka je razlici djelovanja sile teže G_1 na tijelo mase m_1 i zbroja sila F_1 i F_{tr} koje djeluju na tijelo mase m_2 .

$$F = G_1 - (F_1 + F_{tr}).$$

Kako sila F pokreće oba tijela to je masa $m = m_1 + m_2$. Tako je

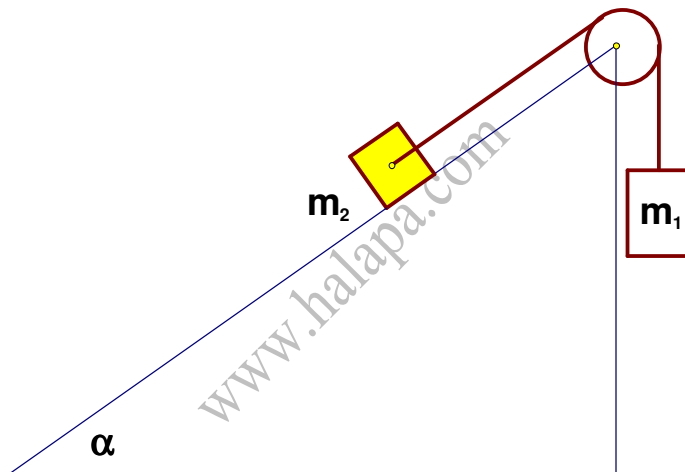
$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{G_1 - (F_1 + F_{tr})}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{m_1 \cdot g - (m_2 \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = \frac{m_1 - (m_2 \cdot \sin \alpha + \mu \cdot m_2 \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g \Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g. \end{aligned}$$

Da bi gibanje utega bilo jednoliko mora iščezavati ubrzanje $a = 0$ (prvi Newtonov poučak) koje daje jednadžbu

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{m_1 - m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g \Rightarrow [a=0] \Rightarrow 0 = \frac{m_1 - m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g \Rightarrow \\
 &\Rightarrow m_1 - m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow m_1 = m_2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) / \cdot \frac{1}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha &= \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \mu \cdot \cos \alpha = \frac{m_1}{m_2} - \sin \alpha \Rightarrow \mu \cdot \cos \alpha = \frac{m_1}{m_2} - \sin \alpha / \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \mu &= \frac{m_1}{m_2 \cdot \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \mu = \frac{m_1}{m_2 \cdot \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \text{ kg}}{1.2 \text{ kg} \cdot \cos 50^\circ} - \operatorname{tg} 50^\circ = 1.40.
 \end{aligned}$$

Vježba 664

Za sustav utega s koloturom, prikazan na slici, poznate su sljedeće veličine: $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 2.4 \text{ kg}$ i prikloni kut kosine $\alpha = 30^\circ$. Izračunajte vrijednost faktora trenja μ takvu da omogućuje gibanje utega jednolikom brzinom. (Trenje između kolotura i konca valja zanemariti.)



Rezultat: 1.35.

Zadatak 665 (Ante, srednja škola)

Pod kojim kutom treba baciti predmet da omjer dometa d i visine h bude n ?

Rješenje 665

$$\frac{d}{h} = n, \quad \alpha = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada.

Izrazi za domet d i visinu h glase:

$$\left. \begin{aligned}
 d &= \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \\
 h &= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \\ h &= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{\frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}}{\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{2 \cdot \cos \alpha}{\frac{1}{\sin \alpha}} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{4 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \left[\text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right] \Rightarrow \frac{d}{h} = 4 \cdot \text{ctg } \alpha \Rightarrow \left[\text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{4}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{4}{\text{tg } \alpha} \cdot \frac{h \cdot \text{tg } \alpha}{d} \Rightarrow \text{tg } \alpha = 4 \cdot \frac{h}{d} \Rightarrow \left[\frac{d}{h} = n \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{1}{n} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg } \alpha = 4 \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{4}{n} \Rightarrow \alpha = \text{tg}^{-1} \left(\frac{4}{n} \right).$$

Vježba 665

Pod kojim kutom treba baciti predmet da omjer visine h i dometa d bude n ?

Rezultat: $\alpha = \text{tg}^{-1}(4 \cdot n)$.

www.halapa.com