

### Zadatak 621 (Ana, gimnazija)

Zadana je jednačba gibanja  $s = A \cdot t - B \cdot t^2$ , gdje je  $A = 2 \frac{m}{s}$  i  $B = 0.3 \frac{m}{s^2}$ .

- Kolika je početna brzina?
- Kolika je akceleracija?
- Kolika je brzina nakon 5 s od početka usporavanja?

#### Rješenje 621

$$A = 2 \text{ m/s}, \quad B = 0.3 \text{ m/s}^2, \quad t = 5 \text{ s}, \quad v_0 = ?, \quad a = ?, \quad v = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijede formule za put  $s$  i konačnu brzinu  $v$ :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v = v_0 - a \cdot t,$$

gdje su  $s$  i  $v$  put, odnosno brzina za tijelo pošto se počelo usporavati i gibati jednoliko usporeno akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

a) i b)

Usporedimo li zadanu jednačbu puta  $s = A \cdot t - B \cdot t^2$  sa jednačbom puta kod jednolikog usporenog gibanja dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ s = A \cdot t - B \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ s = A \cdot t - B \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = A \\ \frac{1}{2} \cdot a = B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = A \\ \frac{1}{2} \cdot a = B / 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = A \\ a = 2 \cdot B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = 2 \frac{m}{s} \\ a = 2 \cdot 0.3 \frac{m}{s^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = 2 \frac{m}{s} \\ a = 0.6 \frac{m}{s^2} \end{array} \right\}.$$

Brzina  $v$  iznosi:

$$v = v_0 - a \cdot t = 2 \frac{m}{s} - 0.6 \frac{m}{s^2} \cdot 5 \text{ s} = -1 \frac{m}{s}.$$

### Vježba 621

Zadana je jednačba gibanja  $s = A \cdot t - B \cdot t^2$ , gdje je  $A = 3 \frac{m}{s}$  i  $B = 0.2 \frac{m}{s^2}$ .

- Kolika je početna brzina?
- Kolika je akceleracija?

**Rezultat:**  $2 \text{ m/s}, 0.4 \text{ m/s}^2$ .

### Zadatak 622 (Antonio, gimnazija)

Dva tijela padaju s različitih visina i na tlo padnu istodobno. Pri tome prvo tijelo pada 1 s, a drugo tijelo pada 2 s. Na kojoj je udaljenosti od tla bilo drugo tijelo u trenutku kad je prvo počelo padati? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 622

$$t_1 = 1 \text{ s}, \quad t_2 = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje su  $h$  visina pada,  $t$  vrijeme,  $g$  ubrzanje sile teže.

U trenutku kada je prvo tijelo počelo padati drugo je tijelo bilo na udaljenosti  $\Delta h$  od tla.

$$\begin{aligned}\Delta h = h_2 - h_1 &\Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_2^2 - t_1^2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot ((2 s)^2 - (1 s)^2) = 14.72 m.\end{aligned}$$

### Vježba 622

Dva tijela padaju s različitih visina i na tlo padnu istodobno. Pri tome prvo tijelo pada 2 s, a drugo tijelo pada 3 s. Na kojoj je udaljenosti od tla bilo drugo tijelo u trenutku kad je prvo počelo padati? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 24.53 m.

### Zadatak 623 (Antonio, gimnazija)

Izračunati visinu sa koje je tijelo pušteno da slobodno pada, ako je posljednjih 15 m prešlo za 0.4 s. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 623

$$\Delta h = 15 \text{ m}, \quad \Delta t = 0.4 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad v = g \cdot t,$$

gdje je  $h$  visina pada,  $v$  trenutna brzina.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Neka je  $t$  vrijeme za koje tijelo prijeđe cijeli put  $h$ .

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Padajući, tijelo je za vrijeme  $t - \Delta t$  postiglo brzinu  $v_0$ :

$$v_0 = g \cdot (t - \Delta t)$$

pa je prewalkeni put  $\Delta h$  za vrijeme  $\Delta t$  sa početnom brzinom  $v_0$  jednak

$$\begin{aligned}\left. \begin{aligned}v_0 &= g \cdot (t - \Delta t) \\ \Delta h &= v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2\end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta h = g \cdot (t - \Delta t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta h &= g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta h = g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 &= \Delta h \Rightarrow g \cdot t \cdot \Delta t = \Delta h + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow g \cdot t \cdot \Delta t &= \Delta h + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \quad / \cdot \frac{1}{g \cdot \Delta t} \Rightarrow t = \frac{\Delta h + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2}{g \cdot \Delta t} \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \frac{\Delta h}{g \cdot \Delta t} + \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2}{g \cdot \Delta t} \Rightarrow t = \frac{\Delta h}{g \cdot \Delta t} + \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2}{g \cdot \Delta t} \Rightarrow t = \frac{\Delta h}{g \cdot \Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{15 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.4 \text{ s}} + \frac{0.4 \text{ s}}{2} = 4.02 \text{ s}.$$

Visina sa koje je tijelo počelo padati iznosi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (4.02 \text{ s})^2 = 79.27 \text{ m}.$$

### Vježba 623

Izračunati visinu sa koje je tijelo pušteno da slobodno pada, ako je posljednjih 150 dm prešlo za 0.4 s. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 79.27 m.

### Zadatak 624 (Željka, gimnazija)

Tijelo A slobodno pada s visine 800 m. U istom trenutku započinje padati i drugo tijelo B s visine 1000 m. Kojom početnom brzinom mora padati tijelo B da bi istodobno kada i tijelo A udarilo u površinu Zemlje? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A.  $7.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       B.  $9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       C.  $15.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       D.  $14.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### Rješenje 624

$$h_1 = 800 \text{ m}, \quad h_2 = 1000 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je  $h$  visina pada,  $v$  trenutna brzina.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Vrijeme padanja tijela A iznosi:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}.$$

Početna brzina  $v_0$  kojom mora početi padati tijelo B da bi istodobno udarilo u zemlju kada i tijelo A dobije se iz sustava jednačja:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h_2 &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_2 = v_0 \cdot t + h_1 \Rightarrow v_0 \cdot t + h_1 = h_2 \Rightarrow v_0 \cdot t = h_2 - h_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot t = h_2 - h_1 \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow v_0 = \frac{h_2 - h_1}{t} \Rightarrow \left[ t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} \right] \Rightarrow v_0 = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}} =$$

$$= \frac{1000 \text{ m} - 800 \text{ m}}{\sqrt{\frac{2 \cdot 800 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}} = 15.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 624

Tijelo A slobodno pada s visine 0.8 km. U istom trenutku započinje padati i drugo tijelo B s visine 1 km. Kojom početnom brzinom mora padati tijelo B da bi istodobno kada i tijelo A udarilo u površinu Zemlje? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

$$A. 7.0 \frac{m}{s} \quad B. 9.8 \frac{m}{s} \quad C. 15.7 \frac{m}{s} \quad D. 14.3 \frac{m}{s}$$

**Rezultat:** C.

### Zadatak 625 (Sara, gimnazija)

Pri jednolikom ubrzanju tijelo prijeđe prvih 60 m za 8 s. Koliko mu vremena treba za sljedećih 40 m?

### Rješenje 625

$$s_1 = 60 \text{ m}, \quad t_1 = 8 \text{ s}, \quad s_2 = 40 \text{ m}, \quad t_2 = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t,$$

gdje su  $s$  i  $v$  put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano

akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijedi formula za put  $s$ :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je  $s$  put koji je tijelo prešlo pošto se počelo ubrzavati akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

1. inačica

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ s_1 + s_2 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \quad / \cdot 2 \\ s_1 + s_2 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 \quad / \cdot 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot s_1 &= a \cdot t_1^2 \\ 2 \cdot (s_1 + s_2) &= a \cdot (t_1 + t_2)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a \cdot t_1^2 &= 2 \cdot s_1 \\ a \cdot (t_1 + t_2)^2 &= 2 \cdot (s_1 + s_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{a \cdot (t_1 + t_2)^2}{a \cdot t_1^2} = \frac{2 \cdot (s_1 + s_2)}{2 \cdot s_1} \Rightarrow \frac{a \cdot (t_1 + t_2)^2}{a \cdot t_1^2} = \frac{2 \cdot (s_1 + s_2)}{2 \cdot s_1} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{(t_1 + t_2)^2}{t_1^2} = \frac{s_1 + s_2}{s_1} \Rightarrow \left( \frac{t_1 + t_2}{t_1} \right)^2 = \frac{s_1 + s_2}{s_1} \Rightarrow \left( \frac{t_1 + t_2}{t_1} \right)^2 = \frac{s_1 + s_2}{s_1} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{t_1 + t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{s_1 + s_2}{s_1}} \Rightarrow \frac{t_1 + t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{s_1 + s_2}{s_1}} \quad / \cdot t_1 \Rightarrow t_1 + t_2 = t_1 \cdot \sqrt{\frac{s_1 + s_2}{s_1}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_2 = t_1 \cdot \sqrt{\frac{s_1 + s_2}{s_1}} - t_1 \Rightarrow t_2 = t_1 \cdot \left( \sqrt{\frac{s_1 + s_2}{s_1}} - 1 \right) = 8 \text{ s} \cdot \left( \sqrt{\frac{60 \text{ m} + 40 \text{ m}}{60 \text{ m}}} - 1 \right) = 2.33 \text{ s.}$$

2. inačica

Pri jednolikom ubrzanju tijelo prijeđe put  $s_1$  za vrijeme  $t_1$  pa su konačna brzina  $v_0$  i akceleracija  $a$  dane formulama:

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t_1 \\ s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t_1 = s_1 \\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = s_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t_1 = s_1 \quad / \cdot \frac{2}{t_1} \\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = s_1 \quad / \cdot \frac{2}{t_1^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = \frac{2 \cdot s_1}{t_1} \\ a = \frac{2 \cdot s_1}{t_1^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = \frac{2 \cdot 60 \text{ m}}{8 \text{ s}} \\ a = \frac{2 \cdot 60 \text{ m}}{(8 \text{ s})^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = \frac{120 \text{ m}}{8 \text{ s}} \\ a = \frac{120 \text{ m}}{64 \text{ s}^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = \frac{120 \text{ m}}{8 \text{ s}} \\ a = \frac{120 \text{ m}}{64 \text{ s}^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a = \frac{15 \text{ m}}{8 \text{ s}^2} \end{array} \right\}.$$

Sljedeći dio puta  $s_2$  tijelo će prewalkiti za vrijeme  $t_2$  početnom brzinom  $v_0$  pa vrijedi jednađba:

$$\begin{aligned} s_2 &= v_0 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} v_0 = 15 \\ a = \frac{15}{8} \end{array} \right] \Rightarrow 40 = 15 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8} \cdot t_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 40 &= 15 \cdot t_2 + \frac{15}{16} \cdot t_2^2 \Rightarrow 40 = 15 \cdot t_2 + \frac{15}{16} \cdot t_2^2 \quad / \cdot 16 \Rightarrow 640 = 240 \cdot t_2 + 15 \cdot t_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 240 \cdot t_2 &+ 15 \cdot t_2^2 = 640 \Rightarrow 240 \cdot t_2 + 15 \cdot t_2^2 - 640 = 0 \Rightarrow 15 \cdot t_2^2 + 240 \cdot t_2 - 640 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 15 \cdot t_2^2 &+ 240 \cdot t_2 - 640 = 0 \quad / : 5 \Rightarrow 3 \cdot t_2^2 + 48 \cdot t_2 - 128 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \cdot t_2^2 &+ 48 \cdot t_2 - 128 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} a = 3, \quad b = 48, \quad c = -128 \\ a = 3, \quad b = 48, \quad c = -128 \end{array} \right\} \Rightarrow (t_2)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \\ \Rightarrow (t_2)_{1,2} &= \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-128)}}{2 \cdot 3} \Rightarrow (t_2)_{1,2} = \frac{-48 \pm \sqrt{2304 + 1536}}{6} \Rightarrow \\ \Rightarrow (t_2)_{1,2} &= \frac{-48 \pm \sqrt{3840}}{6} \Rightarrow (t_2)_{1,2} = \frac{-48 \pm 61.97}{6} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (t_2)_1 = \frac{-48 + 61.97}{6} \\ (t_2)_2 = \frac{-48 - 61.97}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow (t_2)_1 &= \frac{-48 + 61.97}{6} \quad \left. \begin{array}{l} (t_2)_1 = 2.33 \text{ s} \\ (t_2)_2 = -18.33 \text{ s} \text{ nema smisla} \end{array} \right\} \Rightarrow t_2 = 2.33 \text{ s.} \end{aligned}$$

### Vježba 625

Pri jednolikom ubrzanju tijelo prijeđe prvih 600 dm za 8 s. Koliko mu vremena treba za sljedećih 400 dm?

**Rezultat:** 2.33 s.

**Zadatak 626 (Miroslav, gimnazija)**

Gibajući se pravocrtno za 2 s tijelo prijeđe put od 20 m. Pritom mu se brzina poveća tri puta u odnosu na početnu. Akceleracija tijela je konstantna. Kolika je početna brzina tijela? Koliko je ubrzanje tijela?

**Rješenje 626**

$$t = 2 \text{ s}, \quad s = 20 \text{ m}, \quad v = 3 \cdot v_0, \quad v_0 = ?, \quad a = ?$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijede formule za konačnu brzinu  $v$  i put  $s$ :

$$v = v_0 + a \cdot t, \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje su  $v$  i  $s$  brzina, odnosno put za tijelo pošto se počelo ubrzavati i gibati jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Budući da su sve mjerne jedinice zapisane u SI – sustavu, možemo napisati sustav jednažba:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t \\ s &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{aligned} v &= 3 \cdot v_0 \\ t &= 2 \\ s &= 20 \end{aligned} \right] \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3 \cdot v_0 &= v_0 + 2 \cdot a \\ 20 &= 2 \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3 \cdot v_0 - v_0 &= 2 \cdot a \\ 20 &= 2 \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot v_0 &= 2 \cdot a \\ 20 &= 2 \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot v_0 &= 2 \cdot a \quad / : 2 \\ 20 &= 2 \cdot v_0 + 2 \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 &= a \\ 20 &= 2 \cdot v_0 + 2 \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 20 = 2 \cdot v_0 + 2 \cdot v_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20 = 4 \cdot v_0 \Rightarrow 4 \cdot v_0 = 20 \Rightarrow 4 \cdot v_0 = 20 \quad / : 4 \Rightarrow v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ubrzanje tijela je

$$a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**Vježba 626**

Gibajući se pravocrtno za 2 s tijelo prijeđe put od 0.02 km. Pritom mu se brzina poveća tri puta u odnosu na početnu. Akceleracija tijela je konstantna. Kolika je početna brzina tijela? Koliko je ubrzanje tijela?

**Rezultat:**  $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

**Zadatak 627 (Ivona, gimnazija)**

Prva kuglica ispuštena je bez početne brzine s vrha zgrade. Nakon pola sekunde s istog je mjesta bačena druga kuglica početnom brzinom 10 m / s. Na kojoj će udaljenosti od vrha zgrade druga kuglica preteći prvu? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rješenje 627**

$$\Delta t = 0.5 \text{ s}, \quad v_0 = 10 \text{ m / s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $h$  visina pada,  $v$  trenutna brzina.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Za vrijeme  $t$  prva kuglica prijeđe put

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

a druga, bačena  $\Delta t$  vremena kasnije početnom brzinom  $v_0$ , prevali put

$$h_2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t - g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t - g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_0 \cdot t - g \cdot t \cdot \Delta t = v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow t \cdot (v_0 - g \cdot \Delta t) = \Delta t \cdot \left( v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t \cdot (v_0 - g \cdot \Delta t) = \Delta t \cdot \left( v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t \right) \cdot \frac{1}{v_0 - g \cdot \Delta t} \Rightarrow t = \frac{\Delta t \cdot \left( v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t \right)}{v_0 - g \cdot \Delta t} = \\ &= \frac{0.5 \text{ s} \cdot \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.5 \text{ s} \right)}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.5 \text{ s}} = 0.74 \text{ s}. \end{aligned}$$

Druga će kuglica preteći prvu na udaljenosti  $h$  od vrha zgrade.

$$h = h_1 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0.74 \text{ s})^2 = 2.69 \text{ m}.$$

### Vježba 627

Prva kuglica ispuštena je bez početne brzine s vrha zgrade. Nakon pola sekunde s istog je mjesta bačena druga kuglica početnom brzinom 36 km / h. Na kojoj će udaljenosti od vrha zgrade druga kuglica preteći prvu? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:** 2.69 m.

### Zadatak 628 (Ivana, medicinska škola)

Tijelo bacimo vertikalno uvis početnom brzinom 23.5 m / s. Odredi njegovu brzinu i visinu nakon 3 sekunde leta. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

### Rješenje 628

$$v_0 = 23.5 \text{ m / s}, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad v = ?, \quad h = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato su brzina  $v$  i put  $h$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dani ovim izrazima:

$$v = v_0 - g \cdot t \quad , \quad h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 .$$

Brzina tijela v iznosi:

$$v = v_0 - g \cdot t = 23.5 \frac{m}{s} - 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s = -5.93 \frac{m}{s} \text{ tijelo pada, vraća se.}$$

Visina h je:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 23.5 \frac{m}{s} \cdot 3 s - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (3 s)^2 = 26.36 m.$$

### Vježba 628

Tijelo bacimo vertikalno uvis početnom brzinom 84.6 km / h. Odredi njegovu brzinu i visinu nakon 3 sekunde leta. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:**  $- 5.93 \text{ m / s}$ ,  $26.36 \text{ m}$ .

### Zadatak 629 (Katarina, srednja škola)

Vlak je jednolikim usporavanjem kroz 18 s smanjio svoju brzinu od 100 km / h na 60 km / h. Koliki je put pri tome prešao?

- A. 200 m      B. 300 m      C. 400 m      D. 500 m

### Rješenje 629

$$t = 18 \text{ s}, \quad v_0 = 100 \text{ km / h} = [ 100 : 3.6 ] = 27.78 \text{ m / s}, \quad v = 60 \text{ km / h} = [ 60 : 3.6 ] = 16.67 \text{ m / s}, \quad s = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijede formule za konačnu brzinu  $v$  i put  $s$ :

$$v = v_0 - a \cdot t \quad , \quad v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s \quad , \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 ,$$

gdje su  $v$  i  $s$  brzina, odnosno put za tijelo pošto se počelo usporavati i gibati jednoliko usporeno akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} v = v_0 - a \cdot t \\ s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot t = v_0 - v \\ s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot (a \cdot t) \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot (v_0 - v) \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \left( v_0 - \frac{1}{2} \cdot (v_0 - v) \right) \cdot t \Rightarrow s = \left( v_0 - \frac{1}{2} \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot v \right) \cdot t \Rightarrow s = \left( \frac{v_0}{2} + \frac{1}{2} \cdot v \right) \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{2 \cdot v_0 - v_0 + v}{2} \cdot t \Rightarrow s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{27.78 \frac{m}{s} + 16.67 \frac{m}{s}}{2} \cdot 18 s = 400 m.$$

Odgovor je pod C.

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} v = v_0 - a \cdot t \\ v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot t = v_0 - v \\ 2 \cdot a \cdot s = v_0^2 - v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot s}{a \cdot t} = \frac{v_0^2 - v^2}{v_0 - v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot s}{a \cdot t} = \frac{(v_0 - v) \cdot (v_0 + v)}{v_0 - v} \Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t} = \frac{(v_0 - v) \cdot (v_0 + v)}{v_0 - v} \Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t} = v_0 + v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t} = v_0 + v \quad / \cdot \frac{t}{2} \Rightarrow s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{27.78 \frac{m}{s} + 16.67 \frac{m}{s}}{2} \cdot 18 s = 400 m.$$

Odgovor je pod C.



### 3.inačica

Najprije izračunamo akceleraciju usporavanja (deceleraciju, retardaciju) vlaka.

$$v = v_0 - a \cdot t \Rightarrow a \cdot t = v_0 - v \Rightarrow a \cdot t = v_0 - v \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow a = \frac{v_0 - v}{t} =$$

$$= \frac{27.78 \frac{m}{s} - 16.67 \frac{m}{s}}{18 s} = 0.62 \frac{m}{s^2}.$$

Duljina puta iznosi:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 27.78 \frac{m}{s} \cdot 18 s - \frac{1}{2} \cdot 0.62 \frac{m}{s^2} \cdot (18 s)^2 = 399.6 m \approx 400 m.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 629

Vlak je jednolikim usporavanjem kroz 18 s smanjio svoju brzinu od 140 km / h na 20 km / h. Koliki je put pri tome prešao?

- A. 200 m      B. 300 m      C. 400 m      D. 500 m

**Rezultat:** C.

### Zadatak 630 (Josip, tehnička škola)

Dvije teške kugle bacimo vertikalno uvis jednakim početnim brzinama, jednu za drugom u vremenskom razmaku 2 s. Kugle se sastanu dvije sekunde pošto je bačena druga kugla. Odredi početnu brzinu kugala. Otpor zraka zanemarimo. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

### Rješenje 630

$$\Delta t = 2 \text{ s}, \quad t = \Delta t + 2 \text{ s} = 2 \text{ s} + 2 \text{ s} = 4 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad v_0 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Prva kugla baci se početnom brzinom  $v_0$  vertikalno uvis i nakon  $t$  sekundi bit će na visini

$$h_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Druga kugla, također, baci se početnom brzinom  $v_0$  vertikalno uvis sa zakašnjenjem  $\Delta t$  sekundi u odnosu na prvu i nalazi se u zraku  $t - \Delta t$  sekundi. Zato će njezina visina  $h_2$  iznositi

$$h_2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2.$$

Pri susretu je

$$h_1 = h_2$$

pa slijedi:

$$v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= -v_0 \cdot \Delta t + g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow v_0 \cdot \Delta t = g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_0 \cdot \Delta t &= \Delta t \cdot \left( g \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t \right) \Rightarrow v_0 \cdot \Delta t = \Delta t \cdot \left( g \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t \right) / \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_0 &= g \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t \Rightarrow v_0 = g \cdot \left( t - \frac{1}{2} \cdot \Delta t \right) = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left( 4 s - \frac{1}{2} \cdot 2 s \right) = 29.43 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

### Vježba 630

Dvije teške kugle bacimo vertikalno uvis jednakim početnim brzinama, jednu za drugom u vremenskom razmaku 3 s. Kugle se sastanu tri sekunde pošto je bačena druga kugla. Odredi početnu brzinu kugala. Otpor zraka zanemarimo. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 44.15 m/s.

### Zadatak 631 (Vedran, tehnička škola)

Tijelo mase 60 kg nalazi se na horizontalnoj podlozi. Kada će težina ovog tijela iznositi 1200 N? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

$$A. 9.81 \frac{m}{s} \quad B. 4.91 \frac{m}{s} \quad C. 10.19 \frac{m}{s^2} \quad D. 12 \frac{m}{s^2}$$

### Rješenje 631

$$m = 60 \text{ kg}, \quad G_1 = 1200 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje. Isto tako vrijede i s obzirom na koordinatni sustav koji se giba po pravcu. Ti zakoni, međutim ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase  $m$ , koje postavimo, primjerice, na pod vagona koji ima stalnu akceleraciju  $a$ , neće mirovati s obzirom na vagon, nego će imati akceleraciju  $-a$ . U vagonu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila

$$-m \cdot a.$$

Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Najprije izračunamo težinu tijela uz ubrzanje slobodnog pada  $g$ .

$$G = m \cdot g.$$

Da bi težina ovog tijela iznosila  $G_1$  potrebno je da se tijelo giba jednoliko ubrzano zajedno s podlogom u suprotnom smjeru djelovanja sile teže:

$$\begin{aligned} G_1 &= m \cdot (g + a) \Rightarrow G_1 = m \cdot g + m \cdot a \Rightarrow m \cdot g + m \cdot a = G_1 \Rightarrow m \cdot a = G_1 - m \cdot g \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot a &= G_1 - m \cdot g / \frac{1}{m} \Rightarrow a = \frac{G_1}{m} - g = \frac{1200 \text{ N}}{60 \text{ kg}} - 9.81 \frac{m}{s^2} = 10.19 \frac{m}{s^2}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 631

Tijelo mase 60 kg nalazi se na horizontalnoj podlozi. Kada će težina ovog tijela iznositi 1.2 kN? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A.  $9.81 \frac{m}{s^2}$       B.  $4.91 \frac{m}{s^2}$       C.  $10.19 \frac{m}{s^2}$       D.  $12 \frac{m}{s^2}$

**Rezultat:** C.

**Zadatak 632 (Felix, tehnička škola)**

S visine 100 m iznad tla bačena je kugla vertikalno prema dolje početnom brzinom 5 m / s. Kojom početnom brzinom treba istodobno baciti drugu kuglu s tla vertikalno uvis da bi se sudarile na pola puta? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rješenje 632**

$h = 100 \text{ m}, \quad v_1 = 5 \text{ m / s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad v_2 = ?$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

1. inačica

Budući da su se kugle sudarile na pola puta, možemo napisati sljedeće jednadžbe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot h &= v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 && \text{hitac prema dolje} \\ \frac{1}{2} \cdot h &= v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 && \text{hitac prema gore} \end{aligned} \right\}$$

Jednadžbe prvo zbrojimo, a zatim oduzmemo:

$$\bullet \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot h &= v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ \frac{1}{2} \cdot h &= v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot h = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t \Rightarrow h = t \cdot (v_1 + v_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot (v_1 + v_2) = h \Rightarrow t \cdot (v_1 + v_2) = h / \frac{1}{v_1 + v_2} \Rightarrow t = \frac{h}{v_1 + v_2}$$

$$\bullet \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot h &= v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ \frac{1}{2} \cdot h &= v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot h - \frac{1}{2} \cdot h = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - \left( v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot h - \frac{1}{2} \cdot h = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = v_1 \cdot t - v_2 \cdot t + g \cdot t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1 \cdot t - v_2 \cdot t + g \cdot t^2 &= 0 \Rightarrow t \cdot (v_1 - v_2 + g \cdot t) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = 0 \text{ nema smisla} \\ v_1 - v_2 + g \cdot t = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow v_1 - v_2 + g \cdot t = 0. \end{aligned}$$

Početnu brzinu  $v_2$  izračunamo iz sljedećeg sustava jednačja

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} t = \frac{h}{v_1 + v_2} \\ v_1 - v_2 + g \cdot t = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow v_1 - v_2 + g \cdot \frac{h}{v_1 + v_2} = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 + g \cdot \frac{h}{v_1 + v_2} = 0 \cdot (v_1 + v_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (v_1 - v_2) \cdot (v_1 + v_2) + g \cdot h &= 0 \Rightarrow v_1^2 - v_2^2 + g \cdot h = 0 \Rightarrow -v_2^2 = -v_1^2 - g \cdot h \Rightarrow \\ \Rightarrow -v_2^2 = -v_1^2 - g \cdot h \cdot (-1) &\Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + g \cdot h \Rightarrow v_2 = v_1^2 + g \cdot h \cdot \sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{v_1^2 + g \cdot h} = \sqrt{\left(5 \frac{m}{s}\right)^2 + 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 100 m} = 31.72 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

2. inačica

Prva kugla bačena je s visine  $h$  početnom brzinom  $v_1$  pa će polovicu puta prijeći za vrijeme  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot h &= v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot h = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \cdot 2 \Rightarrow h = 2 \cdot v_1 \cdot t + g \cdot t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot v_1 \cdot t + g \cdot t^2 &= h \Rightarrow 2 \cdot v_1 \cdot t + g \cdot t^2 - h = 0 \Rightarrow g \cdot t^2 + 2 \cdot v_1 \cdot t - h = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g \cdot t^2 + 2 \cdot v_1 \cdot t - h = 0 \\ a = g, b = 2 \cdot v_1, c = -h \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = g, b = 2 \cdot v_1, c = -h \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} &= \frac{-2 \cdot v_1 \pm \sqrt{(2 \cdot v_1)^2 - 4 \cdot g \cdot (-h)}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_1 \pm \sqrt{4 \cdot v_1^2 + 4 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} &= \frac{-2 \cdot v_1 \pm \sqrt{4 \cdot (v_1^2 + g \cdot h)}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_1 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{v_1^2 + g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} &= \frac{-2 \cdot v_1 \pm 2 \cdot \sqrt{v_1^2 + g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot (-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} &= \frac{2 \cdot (-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + g \cdot h}}{g} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + g \cdot h}}{g} \\ t_2 &= \frac{-v_1 - \sqrt{v_1^2 + g \cdot h}}{g} \quad \text{nema smisla} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + g \cdot h}}{g} =$$

$$= \frac{-5 \frac{m}{s} + \sqrt{\left(5 \frac{m}{s}\right)^2 + 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 100 m}}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 2.72 s.$$

Za isto vrijeme t druga kugla, bačena vertikalno uvis početnom brzinom  $v_2$ , prijeći će također pola puta h.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot h &= v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot h = v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow h = 2 \cdot v_2 \cdot t - g \cdot t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot v_2 \cdot t - g \cdot t^2 &= h \Rightarrow 2 \cdot v_2 \cdot t = h + g \cdot t^2 \Rightarrow 2 \cdot v_2 \cdot t = h + g \cdot t^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot t} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2 &= \frac{h + g \cdot t^2}{2 \cdot t} = \frac{100 m + 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (2.72 s)^2}{2 \cdot 2.72 s} = 31.72 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

### Vježba 632

S visine 0.1 km iznad tla bačena je kugla vertikalno prema dolje početnom brzinom 18 km/h. Kojom početnom brzinom treba istodobno baciti drugu kuglu s tla vertikalno uvis da bi se sudarile na pola puta? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 31.72 m/s.

### Zadatak 633 (Felix, tehnička škola)

Tijelo se iz mirovanja počinje gibati jednoliko ubrzano. Koliko vremena traje cijeli put ako u posljednje tri sekunde tijelo prevali pola ukupnog puta?

#### Rješenje 633

$$s, \quad \Delta t = 3 s, \quad t = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Cijeli put s tijelo prijeđe za vrijeme t.

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Ako u posljednje tri sekunde tijelo prevali polovicu ukupnog puta, onda je i za vrijeme  $t - \Delta t$  također prevalo polovicu ukupnog puta.

$$\frac{1}{2} \cdot s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - \Delta t)^2.$$

Dobili smo dvije jednačbe.

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ \frac{1}{2} \cdot s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - \Delta t)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{s}{\frac{1}{2} \cdot s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - \Delta t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{s}{\frac{1}{2} \cdot s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - \Delta t)^2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{t^2}{(t - \Delta t)^2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = \left( \frac{t}{t - \Delta t} \right)^2 \Rightarrow 2 = \left( \frac{t}{t - \Delta t} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = \left( \frac{t}{t - \Delta t} \right)^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{t}{t - \Delta t} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{t}{t - \Delta t} \quad / \cdot (t - \Delta t) \Rightarrow \sqrt{2} \cdot (t - \Delta t) = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot \sqrt{2} - \Delta t \cdot \sqrt{2} = t \Rightarrow t \cdot \sqrt{2} - t = \Delta t \cdot \sqrt{2} \Rightarrow t \cdot (\sqrt{2} - 1) = \Delta t \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot (\sqrt{2} - 1) = \Delta t \cdot \sqrt{2} \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow t = \frac{\Delta t \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3 \text{ s} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 10.24 \text{ s}.$$

### Vježba 633

Tijelo se iz mirovanja počinje gibati jednoliko ubrzano. Koliko vremena traje cijeli put ako u posljednje četiri sekunde tijelo prevali pola ukupnog puta?

**Rezultat:** 13.66 s.

### Zadatak 634 (Martina, medicinska škola)

Kolika je bila početna brzina kamena koji je stigao do visine 21.6 m za 1.2 s? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 634

$$h = 21.6 \text{ m}, \quad t = 1.2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato je put  $h$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan ovim izrazom:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

$$\begin{aligned} h &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h \Rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h \quad / \cdot 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t - g \cdot t^2 = 2 \cdot h \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t = 2 \cdot h + g \cdot t^2 \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t = 2 \cdot h + g \cdot t^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2 \cdot t} = \frac{2 \cdot 21.6 \text{ m} + 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1.2 \text{ s})^2}{2 \cdot 1.2 \text{ s}} = 23.89 \frac{\text{m}}{\text{s}}.
\end{aligned}$$

### Vježba 634

Kolika je bila početna brzina kamena koji je stigao do visine 216 dm za 1.2 s? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 23.89 m/s.

### Zadatak 635 (Željka, gimnazija)

Tijelo slobodno pada u vakuumu s visine  $h$ . Tu visinu valja podijeliti na četiri dijela tako da vrijeme padanja bude jednako. (ubrzanje slobodnog pada  $g$ )

#### Rješenje 635

$$h, \quad n = 4, \quad g, \quad h_p = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0$  m/s i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $h$  visina pada,  $v$  trenutna brzina.

Neka je  $t$  četvrtina ukupnog vremena padanja tijela. Tada je

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot (4 \cdot t)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 16 \cdot t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 16 \cdot t^2 \Rightarrow h = 8 \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 8 \cdot g \cdot t^2 = h \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8 \cdot g \cdot t^2 = h / \frac{1}{8 \cdot g} \Rightarrow t^2 = \frac{h}{8 \cdot g}. \end{aligned}$$

Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} \bullet \quad h_1 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \left[ t^2 = \frac{h}{8 \cdot g} \right] \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{h}{8 \cdot g} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{h}{8 \cdot g} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{16} \cdot h \\ \bullet \quad h_1 + h_2 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot (2 \cdot t)^2 \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (2 \cdot t)^2 - h_1 \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 4 \cdot t^2 - h_1 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t^2 = \frac{h}{8 \cdot g} \\ h_1 = \frac{1}{16} \cdot h \end{array} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 4 \cdot \frac{h}{8 \cdot g} - \frac{1}{16} \cdot h \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 4 \cdot \frac{h}{8 \cdot g} - \frac{1}{16} \cdot h \Rightarrow h_2 = \frac{1}{4} \cdot h - \frac{1}{16} \cdot h \Rightarrow \\ &\Rightarrow h_2 = \frac{4-1}{16} \cdot h \Rightarrow h_2 = \frac{3}{16} \cdot h \\ \bullet \quad h_1 + h_2 + h_3 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot (3 \cdot t)^2 \Rightarrow h_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (3 \cdot t)^2 - h_1 - h_2 \Rightarrow h_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 9 \cdot t^2 - h_1 - h_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t^2 = \frac{h}{8 \cdot g} \\ h_1 = \frac{1}{16} \cdot h, \quad h_2 = \frac{3}{16} \cdot h \end{array} \right] \Rightarrow h_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 9 \cdot \frac{h}{8 \cdot g} - \frac{1}{16} \cdot h - \frac{3}{16} \cdot h \Rightarrow \\ \Rightarrow h_3 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot 9 \cdot \frac{h}{8 \cdot g} - \frac{1}{16} \cdot h - \frac{3}{16} \cdot h \Rightarrow h_3 = \frac{9}{16} \cdot h - \frac{1}{16} \cdot h - \frac{3}{16} \cdot h \Rightarrow h_3 = \frac{9-1-3}{16} \cdot h \Rightarrow h_3 = \frac{5}{16} \cdot h \\ \bullet \quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot (4 \cdot t)^2 \Rightarrow h_4 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (4 \cdot t)^2 - h_1 - h_2 - h_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow h_4 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 16 \cdot t^2 - h_1 - h_2 - h_3 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t^2 = \frac{h}{8 \cdot g} \\ h_1 = \frac{1}{16} \cdot h, \quad h_2 = \frac{3}{16} \cdot h, \quad h_3 = \frac{5}{16} \cdot h \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow h_4 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot 16 \cdot \frac{h}{8 \cdot g} - \frac{1}{16} \cdot h - \frac{3}{16} \cdot h - \frac{5}{16} \cdot h \Rightarrow h_4 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 16 \cdot \frac{h}{8 \cdot g} - \frac{1}{16} \cdot h - \frac{3}{16} \cdot h - \frac{5}{16} \cdot h \Rightarrow \\ &\Rightarrow h_4 = h - \frac{1}{16} \cdot h - \frac{3}{16} \cdot h - \frac{5}{16} \cdot h \Rightarrow h_4 = \frac{16-1-3-5}{16} \cdot h \Rightarrow h_4 = \frac{7}{16} \cdot h. \end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi:

$$h_p = \frac{2 \cdot p - 1}{n} \cdot h.$$

### Vježba 635

Tijelo slobodno pada u vakuumu s visine  $h$ . Tu visinu valja podijeliti na pet dijelova tako da vrijeme padanja bude jednako. (ubrzanje slobodnog pada  $g$ )

**Rezultat:**  $h_1 = \frac{1}{25} \cdot h$ ,  $h_2 = \frac{3}{25} \cdot h$ ,  $h_3 = \frac{5}{25} \cdot h$ ,  $h_4 = \frac{7}{25} \cdot h$ ,  $h_5 = \frac{9}{25} \cdot h$ .

### Zadatak 636 (Željka, gimnazija)

Tijelo bacimo vertikalno uvis početnom brzinom  $50 \text{ m/s}$ .

- Za koje će vrijeme stići u najvišu točku i kolika je ta visina?
  - Za koje će vrijeme tijelo postići prvi put visinu  $15 \text{ m}$ ?
  - Za koje će vrijeme postići drugi put visinu  $15 \text{ m}$ ?
- (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 636

$$v_0 = 50 \text{ m/s}, \quad h = 15 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad h_m = ?, \quad t = ?, \quad t_1 = ?, \quad t_2 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $h$  visina pada,  $v$  trenutna brzina.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Najviši domet  $h_m$  što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je  $v = 0$ . Onda je

$$h_m = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}, \quad t = \frac{v_0}{g} \Rightarrow v_0 = g \cdot t.$$

a)

Računamo maksimalnu visinu  $h_m$  i vrijeme  $t$  za koje je tijelo postigne.

- $h_m = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(50 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 125 \text{ m}$
- $t = \frac{v_0}{g} = \frac{50 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5 \text{ s}.$

b) i c)

Vremena za koja tijelo postigne prvi put i drugi put visinu  $h$  iznose:

$$\begin{aligned} h &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - v_0 \cdot t + h = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 15 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 15 = 0 \Rightarrow 5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 15 = 0 \Rightarrow 5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 15 = 0 \quad /:5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t^2 - 10 \cdot t + 3 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t^2 - 10 \cdot t + 3 = 0 \\ a = 1, b = -10, c = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1, b = -10, c = 3 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 12}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{88}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{10 - \sqrt{88}}{2} \\ t_2 = \frac{10 + \sqrt{88}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 0.31 \text{ s pri penjanju} \\ t_2 = 9.69 \text{ s pri povratku} \end{array} \right\}$$

### Vježba 636

Tijelo bacimo vertikalno uvis početnom brzinom 180 km/h. Za koje će vrijeme stići u najvišu točku i kolika je ta visina? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 5 s, 125 m.

### Zadatak 637 (Luka ☺, gimnazija)

Bruno ☺ iz pračke ispali kamen početnom brzinom 10 m/s vertikalno uvis. Odredite:

- položaj kamena nakon 1.2 s leta
- brzinu kamena u tom trenutku
- ukupni prijeđeni put kamena nakon 1.2 s. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 637

$$v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad t = 1.2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad n = 4, \quad g, \quad h_p = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v = g \cdot t, \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $v$  konačna brzina,  $h$  visina pada,  $t$  vrijeme pada.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$



a), b), c)

Računamo maksimalnu visinu  $H$  i vrijeme  $t_1$  za koje je kamen postigne.

- $$H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5.10 \text{ m}$$
- $$t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.02 \text{ s}.$$

Za slobodno padanje sa maksimalne visine  $H$  kamenu je preostalo  $t_2$  vremena.

$$t_2 = t - t_1 = 1.2 \text{ s} - 1.02 \text{ s} = 0.18 \text{ s}$$

pa prevaljeni put  $h_1$  iznosi:

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (0.18 s)^2 = 0.16 m.$$

Računamo visinu  $h_p$  na kojoj se kamen nalazi iznad tla.

1. inačica

$$h_p = H - h_1 = 5.10 m - 0.16 m = 4.94 m.$$

2. inačica

$$h_p = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 10 \frac{m}{s} \cdot 1.2 s - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (1.2 s)^2 = 4.94 m.$$

Brzina koju tijelo ima u tom trenutku iznosi:

$$v = g \cdot t_2 = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0.18 s = 1.77 \frac{m}{s}.$$

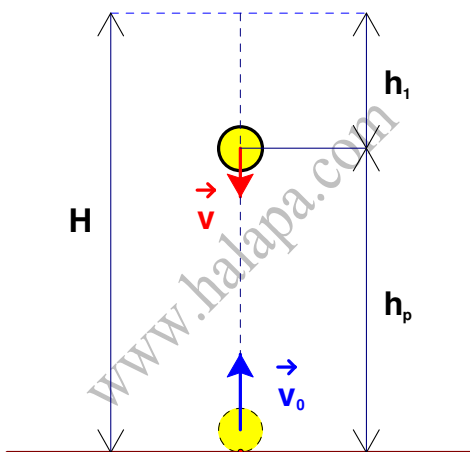
Računamo ukupan prijeđeni put  $h$ .

1. inačica

$$h = H + h_1 = 5.10 m + 0.16 m = 5.26 m.$$

2. inačica

$$h = 2 \cdot H - h_p = 2 \cdot 5.10 m - 4.94 m = 5.26 m.$$



### Vježba 637

Luka iz pračke ispali kamen početnom brzinom 36 km / h vertikalno uvis. Odredite položaj kamena nakon 1.2 s leta. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 m / s^2$ )

**Rezultat:** 4.94 m iznad tla.

### Zadatak 638 (Tina, gimnazija)

Strelica je izbačena vertikalno uvis početnom brzinom 60 m / s.

a) Izračunajte brzinu i visinu nakon 4 s.

b) Izračunajte brzinu i visinu nakon 8 s.

(ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 m / s^2$ )

### Rješenje 638

$$v_0 = 60 m / s, \quad t_1 = 4 s, \quad t_2 = 8 s, \quad g = 10 m / s^2, \quad v_1 = ?, \quad h_1 = ?, \quad v_2 = ?, \quad h_2 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Za vertikalni hitac prema gore vrijedi izraz

$$v = v_0 - g \cdot t,$$

gdje je  $v$  konačna brzina, a  $v_0$  početna brzina.

a)

- $v_1 = v_0 - g \cdot t_1 = 60 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s^2} \cdot 4 s = 20 \frac{m}{s}$
- $h_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 60 \frac{m}{s} \cdot 4 s - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (4 s)^2 = 160 m.$

b)

- $v_2 = v_0 - g \cdot t_2 = 60 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s^2} \cdot 8 s = -20 \frac{m}{s}$
- $h_2 = v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 = 60 \frac{m}{s} \cdot 8 s - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (8 s)^2 = 160 m.$

Pri padanju strelica ima suprotan smjer.

Strelica se nalazi na istoj visini kao i za vrijeme  $t_1$ , ali sada pada.

### Vježba 638

Strelica je izbačena vertikalno uvis početnom brzinom  $60 \text{ m/s}$ . Izračunajte brzinu i visinu nakon  $2 \text{ s}$ . (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $40 \text{ m/s}$ ,  $100 \text{ m}$ .

### Zadatak 639 (Lana, gimnazija)

Koliko će dugo lopta ostati u zraku ako je ispućana početnom brzinom  $30 \text{ m/s}$  pod kutom  $65^\circ$  prema površini Zemlje? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 639

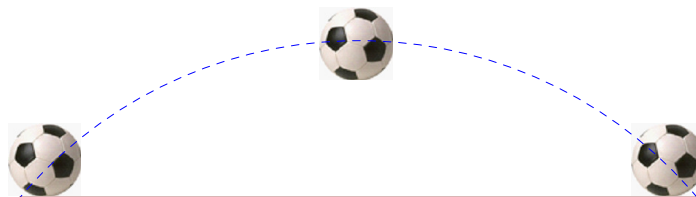
$$v_0 = 30 \text{ m/s}, \quad \alpha = 65^\circ, \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2, \quad t_u = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut  $\alpha$  (kut elevacije) i slobodnog pada. Vrijeme za koje tijelo postigne maksimalnu visinu (vrijeme penjanja, uspona) računa se po formuli:

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}.$$

Ukupno vrijeme  $t_u$  za koje lopta ostane u zraku jednako je zbroju vremena penjanja i padanja, tj.

$$t_u = 2 \cdot t \Rightarrow t_u = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = 2 \cdot \frac{30 \frac{m}{s} \cdot \sin 65^\circ}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 5,54 \text{ s}.$$



### Vježba 639

Koliko će dugo lopta ostati u zraku ako je ispućana početnom brzinom  $108 \text{ km/h}$  pod kutom  $65^\circ$  prema površini Zemlje? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $5,54 \text{ s}$ .

### Zadatak 640 (Lana, gimnazija)

Kolika je vertikalna komponenta brzine loptice izbačene brzinom 25 m / s pod kutom 40° prema horizontali? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

#### Rješenje 640

$$v_0 = 25 \text{ m / s}, \quad \alpha = 40^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad v_y = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut  $\alpha$  (kut elevacije) i slobodnog pada. Izraz za komponentu brzine u smjeru koordinatne osi y (vertikalna komponenta) glasi:

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t.$$

U početnom trenutku za  $t = 0$  dobije se:

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha.$$

Vertikalna komponenta brzine loptice iznosi:

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 40^\circ = \left[ \begin{array}{l} \text{džepno računalo} \\ \text{rad u stupnjevima} \end{array} \right] = 16.07 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

#### Vježba 640

Kolika je vertikalna komponenta brzine loptice izbačene brzinom 50 m / s pod kutom 40° prema horizontali? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:** 32.14 m / s.