

Zadatak 521 (Antonia, gimnazija)

Koliki će ukupni put prijeći tijelo tijekom četvrte i pete sekunde zajedno, ako slobodno pada? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 521

$$t_1 = 3 \text{ s}, \quad t_2 = 5 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Da bismo izračunali put koji će tijelo prijeći za vrijeme četvrte i pete sekunde zajedno moramo naći koliki je put tijelo prevalilo za prvih 5 sekundi i za prve 3 sekunde i te putove oduzeti:

$$h = h_5 - h_3 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot t_1^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_2^2 - t_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot ((5 \text{ s})^2 - (3 \text{ s})^2) = 78.48 \text{ m}.$$

Vježba 521

Koliki put prijeđe tijelo koje slobodno pada za vrijeme četvrte sekunde padanja? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $h = h_4 - h_3 = 34.34 \text{ m}$.

Zadatak 522 (Darko, gimnazija)

Tijelo slobodno pada 9 s. S koje visine tijelo pada? Razdijelite tu visinu na tri dijela tako da za svaki dio puta treba jednako vrijeme? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 522

$$t_0 = 9 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?, \quad \Delta h_1 = ?, \quad \Delta h_2 = ?, \quad \Delta h_3 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad v = g \cdot t,$$

gdje je h visina pada.

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 tada formula za slobodni pad glasi:

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Tijelo pada s visine h čija je vrijednost:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (9 \text{ s})^2 = 397.31 \text{ m}.$$

Visinu moramo razdijeliti na tri dijela tako da za svaki dio puta treba jednako vrijeme. To vrijeme iznosi:

$$t = \frac{1}{3} \cdot t_0 = \frac{1}{3} \cdot 9 \text{ s} = 3 \text{ s}.$$

1. inačica

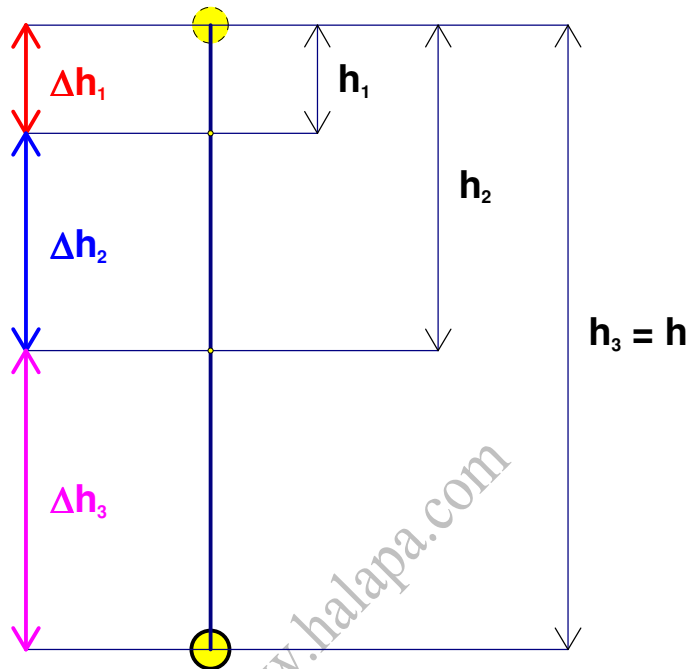
Računamo putove koje tijelo prijeđe za prve 3 s, za prvih 6 s i za ukupno vrijeme od 9 s.

- $h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3 \text{ s})^2 = 44.15 \text{ m}$
- $h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (2 \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \cdot 3 \text{ s})^2 = 176.58 \text{ m}$

- $h_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (9 s)^2 = 397.31 m.$

Dijelovi puta, za koje treba jednako vrijeme, su:

- $\Delta h_1 = h_1 = 44.15 m$
- $\Delta h_2 = h_2 - h_1 = 176.58 m - 44.15 m = 132.43 m$
- $\Delta h_3 = h_3 - h_2 = 397.13 m - 176.58 m = 220.73 m.$



2. inačica

Na kraju prve 3 s tijelo je, slobodno padajući, prešlo put

$$\Delta h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (3 s)^2 = 44.15 m$$

i postiglo brzinu

$$v = g \cdot t = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s = 29.43 \frac{m}{s}.$$

U sljedeće 3 s tijelo slobodno pada s početnom brzinom v pa prijeđe put

$$\Delta h_2 = v \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 29.43 \frac{m}{s} \cdot 3 s + \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (3 s)^2 = 132.44 m.$$

U trećem vremenskom intervalu od 3 s tijelo je prevalo put

$$\Delta h_3 = h - (\Delta h_1 + \Delta h_2) = 397.31 m - (44.15 m + 132.44 m) = 220.72 m.$$

Vježba 522

Tijelo slobodno pada 18 s. S koje visine tijelo pada? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 m / s^2$)

Rezultat: 1589.22 m.

Zadatak 523 (Alfie321, gimnazija)

Brzina vozila smanji se sa 70 km / h na 30 km / h na putu od 26 m. Koliki je faktor trenja? Masa vozila je 1.2 t. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 m / s^2$)

Rješenje 523

$$v_0 = 70 \text{ km/h} = [70 : 3.6] = 19.44 \text{ m/s}, \quad v = 30 \text{ km/h} = [30 : 3.6] = 8.33 \text{ m/s},$$

$$s = 26 \text{ m}, \quad m = 1.2 \text{ t} = 1200 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se počelo usporavati i gibati jednoliko usporeno akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F . Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Budući da vozilo usporava, odredimo akceleraciju.

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_0^2 - v^2 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_0^2 - v^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot s} \Rightarrow a = \frac{v_0^2 - v^2}{2 \cdot s}.$$

Sila koja vozilo usporava je sila trenja pa prema drugome Newtonovu poučku vrijedi:

$$F = F_{tr} \Rightarrow F_{tr} = F \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{a}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a = \frac{v_0^2 - v^2}{2 \cdot s} \right] \Rightarrow \mu = \frac{\frac{v_0^2 - v^2}{2 \cdot s}}{g} \Rightarrow \mu = \frac{v_0^2 - v^2}{2 \cdot g \cdot s} = \frac{\left(19.44 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(8.33 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 26 \text{ m}} = 0.6.$$

Vježba 523

Brzina vozila smanji se sa 140 km/h na 60 km/h na putu od 104 m. Koliki je faktor trenja? Masa vozila je 1.5 t. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.6.

Zadatak 524 (Matura15, gimnazija)

Na horizontalnoj podlozi gurnemo tijelo brzinom 3 m/s. Faktor trenja između tijela i podloge iznosi 0.4. Odredi put što ga tijelo prevali prije nego što se zaustavi. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 524

$$v_0 = 3 \text{ m/s}, \quad \mu = 0.4, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se počelo usporavati i gibati jednoliko usporeno

akceleracijom a za vrijeme t . Ako je konačna brzina jednaka 0, tada je

$$v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s.$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F . Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Budući da se tijelo nakon gibanja zaustavilo, odredimo akceleraciju.

$$v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_0^2 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_0^2 / \frac{1}{2 \cdot s} \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2 \cdot s}.$$

Sila koja tijelo usporava je sila trenja pa prema drugome Newtonovu poučku vrijedi:

$$F = F_{tr} \Rightarrow F_{tr} = F \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow \left[a = \frac{v_0^2}{2 \cdot s} \right] \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot s} / \frac{s}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(3 \frac{m}{s} \right)^2}{2 \cdot 0.4 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 1.15 \text{ m}.$$

Vježba 524

Na horizontalnoj podlozi gurnemo tijelo brzinom 10.8 km/h. Faktor trenja između tijela i podloge iznosi 0.4. Odredi put što ga tijelo prevali prije nego što se zaustavi. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.15 m.

Zadatak 525 (Ivana, gimnazija)

Dva tijela mase $m_1 = 5 \text{ kg}$ i $m_2 = 15 \text{ kg}$ dovedena u neposredan dodir na horizontalnoj podlozi zanemariva trenja odbijaju se silom F . Tijela su naglo i istodobno otpuštena. Prvo tijelo prešlo je u nekom vremenu put 1.8 m. Koliki je put drugog tijela u istom vremenu?

Rješenje 525

$$m_1 = 5 \text{ kg}, \quad m_2 = 15 \text{ kg}, \quad F, \quad s_1 = 1.8 \text{ m}, \quad t_1 = t_2 = t, \quad s_2 = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Treći Newtonov poučak

Ako neko tijelo mase m_1 djeluje na drugo tijelo mase m_2 nekom silom F_{21} , onda drugo tijelo djeluje na

prvo silom F_{12} koja je jednaka sili F_{21} , ali je suprotnog smjera.

$$F_{12} = F_{21} \Rightarrow m_2 \cdot a_2 = m_1 \cdot a_1 \text{ ili vektorski } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Budući da nas zanima samo omjer akceleracija, izostavit ćemo predznak minus.

$$m_2 \cdot a_2 = m_1 \cdot a_1 \Rightarrow m_2 \cdot a_2 = m_1 \cdot a_1 \cdot \frac{1}{m_2 \cdot a_1} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Put s_2 drugog tijela iznosi:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2 \\ s_2 &= \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 \\ s_2 &= \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2} \Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \left[\frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2} \right] \Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{m_1}{m_2} \cdot s_1 \Rightarrow s_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot s_1 = \frac{5 \text{ kg}}{15 \text{ kg}} \cdot 1.8 \text{ m} = 0.6 \text{ m}.$$

Vježba 525

Dva tijela mase $m_1 = 4 \text{ kg}$ i $m_2 = 12 \text{ kg}$ dovedena u neposredan dodir na horizontalnoj podlozi zanemariva trenja odbijaju se silom F . Tijela su naglo i istodobno otpuštena. Prvo tijelo prešlo je u nekom vremenu put 1.8 m . Koliki je put drugog tijela u istom vremenu?

Rezultat: 0.6 m .

Zadatak 526 (Lucija, srednja škola)

Mačak Tom na Zemlji ima težinu 24 N . Koliko Tom teži na Mjesecu, gdje je jakost gravitacijskog polja 6 puta manja? Izračunajte masu mačka na Mjesecu. (ubrzanje slobodnog pada na Zemlji $g_z = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 526

$$G_z = 24 \text{ N}, \quad g_m = \frac{1}{6} \cdot g_z, \quad g_z = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad G_m = ?, \quad m = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Tromost, ustrajnost ili inercija svojstvo je svakog tijela da ostaje u stanju mirovanja ako miruje ili u stanju jednolikog gibanja po pravcu ako se giba (prvi Newtonov poučak). **Masa** je fizikalna veličina, ona je mjera tromosti tijela. **Masa nekog tijela ne ovisi o tome gdje se to tijelo nalazi.** Znači da će to tijelo imati jednaku masu na Zemlji, na Marsu, na Mjesecu, ili bilo gdje u svemiru.

Računamo masu mačka Toma.

$$G_z = m \cdot g_z \Rightarrow m \cdot g_z = G_z \Rightarrow m \cdot g_z = G_z \cdot \frac{1}{g_z} \Rightarrow m = \frac{G_z}{g_z} = \frac{24 \text{ N}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2.45 \text{ kg}.$$

Masa mačka Toma je svuda jednaka i iznosi 2.45 kg.



Računamo težinu G_m mačka Toma na Mjesecu.

1. inačica

$$G_m = m \cdot g_m \Rightarrow G_m = m \cdot \frac{1}{6} \cdot g_z = 2.45 \text{ kg} \cdot \frac{1}{6} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 4 \text{ N}.$$

2. inačica

Budući da je jakost gravitacijskog polja 6 puta manja na Mjesecu, bit će i težina mačka Toma 6 puta manja nego na Zemlji.

$$G_m = \frac{1}{6} \cdot G_z = \frac{1}{6} \cdot 24 \text{ N} = 4 \text{ N}.$$

Vježba 526

Mačak Tom na Zemlji ima težinu 48 N. Koliko Tom teži na Mjesecu, gdje je jakost gravitacijskog polja 6 puta manja? Izračunajte masu mačka na Mjesecu. (ubrzanje slobodnog pada na Zemlji $g_z = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 4.89 kg, 8 N.

Zadatak 527 (Antun, gimnazija)

Čovjek stoji pokraj prednjeg ruba vlaka koji stoji. Vlak se počinje jednoliko ubrzavati. Prva polovica vlaka prođe pokraj promatrača za vrijeme od 25 s. Za koje će vrijeme proći pokraj njega druga polovica vlaka?

Rješenje 527

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot s, \quad t_1 = 25 \text{ s}, \quad s_2 = \frac{1}{2} \cdot s, \quad t_2 = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v = a \cdot t,$$

gdje su s i v put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Prva polovica vlaka s_1 prođe pokraj promatrača za vrijeme t_1 pa vrijedi:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2,$$

a postignuta brzina vlaka je

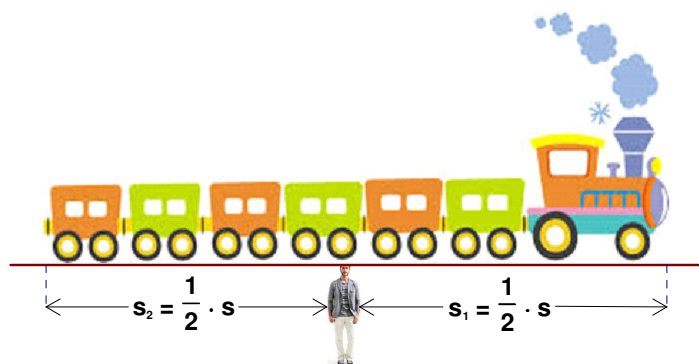
$$v = a \cdot t_1.$$

Budući da sada vlak ima početnu brzinu v druga polovica vlaka proći će pokraj promatrača za vrijeme t_2 pa vrijedi

$$s_2 = v \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2.$$

Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = v \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow [v = a \cdot t_1] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \quad / \cdot \frac{2}{a} \Rightarrow t_1^2 = 2 \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2 = t_1^2 \Rightarrow t_2^2 + 2 \cdot t_1 \cdot t_2 - t_1^2 = 0 \Rightarrow t_2^2 + 2 \cdot 25 \cdot t_2 - 25^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_2^2 + 50 \cdot t_2 - 625 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_2^2 + 50 \cdot t_2 - 625 = 0 \\ a = 1, b = 50, c = -625 \end{array} \right\} \Rightarrow (t_2)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (t_2)_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-625)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow (t_2)_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 2500}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (t_2)_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{5000}}{2} \Rightarrow (t_2)_{1,2} = \frac{-50 \pm 70.71}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (t_2)_1 = \frac{-50 - 70.71}{2} \\ (t_2)_2 = \frac{-50 + 70.71}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (t_2)_1 = \frac{-120.71}{2} \text{ nema smisla} \\ (t_2)_2 = \frac{20.71}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (t_2)_2 = 10.355 \text{ s} \Rightarrow (t_2)_2 \approx 10.36 \text{ s.} \end{aligned}$$



Vježba 527

Čovjek stoji pokraj prednjeg ruba vlaka koji stoji. Vlak se počinje jednoliko ubrzavati. Prva polovica vlaka prođe pokraj promatrača za vrijeme od 50 s. Za koje će vrijeme proći pokraj njega druga polovica vlaka?

Rezultat: 20.71 s.

Zadatak 528 (Dora, gimnazija)

Tijelo slobodno pada s visine 1 m na Zemlji i na Mjesecu. Koliki je kvocijent vremena slobodnog pada tog tijela na Zemlji i na Mjesecu? (ubrzanje slobodnog pada na Zemlji $g_1 = 9.81 \text{ m/s}^2$, ubrzanje slobodnog pada na Mjesecu $g_2 = 1.64 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 528

$$h = 1 \text{ m}, \quad g_1 = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad g_2 = 1.64 \text{ m/s}^2, \quad \frac{t_1}{t_2} = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje s početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je h visina pada.

Kvocijent vremena iznosi:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_1}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_2}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_1} \cdot \frac{g_2}{2 \cdot h}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{1.64 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = 0.41.$$

Vježba 528

Tijelo slobodno pada s visine 5 m na Zemlji i na Mjesecu. Koliki je kvocijent vremena slobodnog pada tog tijela na Zemlji i na Mjesecu? (ubrzanje slobodnog pada na Zemlji $g_1 = 9.81 \text{ m/s}^2$, ubrzanje slobodnog pada na Mjesecu $g_2 = 1.64 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.41.

Zadatak 529 (Zvonimir, srednja škola)

Prvi vagon vlaka prošao je kraj promatrača koji stoji uz prugu za $t_1 = 1 \text{ s}$, a drugi za $t_2 = 1.5 \text{ s}$. Duljina vagona je $d = 12 \text{ m}$. Nađite akceleraciju vlaka.

Rješenje 529

$$t_1 = 1 \text{ s}, \quad t_2 = 1.5 \text{ s}, \quad d = 12 \text{ m}, \quad a = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Prvi vagon duljine d prošao je pored promatrača za vrijeme t_1 pa je prevaljeni put vlaka

$$d = v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2,$$

gdje je v_0 početna brzina vlaka.

Za vrijeme $t_1 + t_2$ prošao je i drugi vagon pokraj promatrača pa je prevaljeni put vlaka

$$2 \cdot d = v_0 \cdot (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2,$$

gdje je v_0 početna brzina vlaka, a $2 \cdot d$ duljina prvog i drugog vagona.

Rješavanjem sustava jednadžbi dobije se akceleracija a .

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} d &= v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ 2 \cdot d &= v_0 \cdot (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 &= d \\ 2 \cdot d &= v_0 \cdot (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1^2 + 2 \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 \cdot t_1 &= d - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ 2 \cdot d &= v_0 \cdot (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 \cdot t_1 &= d - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \quad /: t_1 \\ 2 \cdot d &= v_0 \cdot (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 &= \frac{d}{t_1} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 \\ 2 \cdot d &= v_0 \cdot (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow 2 \cdot d = \left(\frac{d}{t_1} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 \right) \cdot (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow 2 \cdot d = d - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 + \frac{d}{t_1} \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow 2 \cdot d = d - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 + \frac{d}{t_1} \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow 2 \cdot d = d + \frac{d}{t_1} \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 \cdot t_2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow 2 \cdot d - d - \frac{d}{t_1} \cdot t_2 = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 \cdot t_2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow d - \frac{d}{t_1} \cdot t_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow d \cdot \left(1 - \frac{t_2}{t_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 \cdot (t_1 + t_2) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 \cdot (t_1 + t_2) = d \cdot \left(1 - \frac{t_2}{t_1} \right) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 \cdot (t_1 + t_2) = d \cdot \frac{t_1 - t_2}{t_1} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2 \cdot (t_1 + t_2) = d \cdot \frac{t_1 - t_2}{t_1} \quad /: \frac{2}{t_2 \cdot (t_1 + t_2)} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot d \cdot (t_1 - t_2)}{t_1 \cdot t_2 \cdot (t_1 + t_2)} = \\
& \qquad \qquad \qquad = \frac{2 \cdot 12 \text{ m} \cdot (1 \text{ s} - 1.5 \text{ s})}{1 \text{ s} \cdot 1.5 \text{ s} \cdot (1 \text{ s} + 1.5 \text{ s})} = -3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.
\end{aligned}$$

Vlak jednoliko usporava jer je akceleracija a negativnog predznaka.

Vježba 529

Prvi vagon vlaka prošao je kraj promatrača koji stoji uz prugu za $t_1 = 1 \text{ s}$, a drugi za $t_2 = 1.5 \text{ s}$. Duljina vagona je $d = 10 \text{ m}$. Nađite akceleraciju vlaka.

Rezultat: -2.67 m/s^2 .

Zadatak 530 (Zvonimir, srednja škola)

S jednake visine i u isto vrijeme padaju dvije kuglice: jedna kuglica bez početne brzine, a druga s početnom brzinom 20 m/s . Prva kuglica pala je 2 s kasnije od druge. Koliko je vrijeme padanja druge kuglice? S koje visine su kuglice počele padati? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 530

$$v_0 = 20 \text{ m/s}, \quad \Delta t = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?, \quad h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje s početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 tada formula za slobodni pad glasi:

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Neka je t vrijeme padanja druge kuglice. Tada je $t + \Delta t$ vrijeme padanja prve kuglice. Označimo li slovom h visinu s koje su kuglice počele padati vrijedi:

- za prvu kuglicu

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t + \Delta t)^2$$

- za drugu kuglicu

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se vrijeme t .

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t + \Delta t)^2 \\ h &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t + \Delta t)^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 = v_0 \cdot t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_0 \cdot t = g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow v_0 \cdot t - g \cdot t \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t \cdot (v_0 - g \cdot \Delta t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow t \cdot (v_0 - g \cdot \Delta t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \cdot \frac{1}{v_0 - g \cdot \Delta t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{g \cdot (\Delta t)^2}{2 \cdot (v_0 - g \cdot \Delta t)} = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2}{2 \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s} \right)} = 51.63 \text{ s}.$$

Računamo visinu h .

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (51.63 s + 2 s)^2 = 14107.65 m \approx 14.1 km.$$

Vježba 530

S jednake visine i u isto vrijeme padaju dvije kuglice: jedna kuglica bez početne brzine, a druga s početnom brzinom 72 km/h. Prva kuglica pala je 2 s kasnije od druge. Koliko je vrijeme padanja druge kuglice? S koje visine su kuglice počele padati? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 m/s^2$)

Rezultat: 51.63 s, 14.1 km.

Zadatak 531 (Marin, maturant)

Osoba nategne vrpce luka za 20 cm.

- Kolikom brzinom poleti strelica mase 25 g, ako je konstanta opiranja elastične vrpce luka takva da za njezino produljenje od 1 cm trebamo silu od 10 N?
- Na kojoj udaljenosti od mjesta ispućavanja bi strelica pala na tlo, ako je visina s koje je horizontalno izbačena jednaka 1.5 m?
- Kolikom brzinom strelica padne na tlo? Zanimarite silu otpora zraka. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 m/s^2$)

Rješenje 531

$$s = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad m = 25 \text{ g} = 0.025 \text{ kg}, \quad s_1 = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}, \quad F = 10 \text{ N}, \\ h = 1.5 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?, \quad D = ?, \quad v = ?$$

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak x i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Za svako tijelo koje se giba poput tijela na opruzi, što uzrokuje sila upravno proporcionalna pomaku x , smjera suprotnoga pomaku, dakle

$$F = -k \cdot x$$

kažemo da harmonički titra. Za računanje dovoljno je uzeti

$$F = k \cdot x.$$

gdje je k konstanta elastičnosti.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Pomaknemo li oprugu iz ravnotežnog položaja stiskanjem ili rastezanjem, ona titra oko tog položaja. Svaki pomak od ravnotežnog položaja nazivamo elongacijom, a najveći pomak od položaja ravnoteže nazivamo amplitudom. Elastična potencijalna energija opruge dana je formulom

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

gdje je x pomak od ravnotežnog položaja, k koeficijent elastičnosti opruge.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Brzine nakon vremena t jesu v_0 i $v_y = g \cdot t$, a resultantnu brzinu v možemo izračunati iz Pitagorina poučka jer su komponente međusobno okomite. Prema načelu neovisnosti gibanja komponenta v_0 brzine u svakoj je točki jednaka. Komponenta v_y mijenja se kao pri slobodnom padu:

$$v_y = g \cdot t.$$

Komponente brzine u trenutku t su $v_x = v_0$ i $v_y = g \cdot t$ te je resultantna brzina tijela vektorski zbroj tih komponenata. Iznos resultantne brzine u vremenu t je

$$v = \sqrt{v_0^2 + (g \cdot t)^2}.$$

U trenutku pada tijela na zemlju njegova brzina iznosi:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}.$$

Domet kod horizontalnog hica računa se po formuli

$$D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0$ m/s i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81$ m/s². Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje su h visina pada, g ubrzanje sile teže.

Najprije odredimo konstantu opiranja k elastične vrpce luka.

$$F = k \cdot s_1 \Rightarrow k \cdot s_1 = F \Rightarrow k \cdot s_1 = F \cdot \frac{1}{s_1} \Rightarrow k = \frac{F}{s_1}.$$

Zbog zakona očuvanja energije maksimalna elastična potencijalna energija E_{ep} koju luk ima pri napinjanju bit će jednaka maksimalnoj kinetičkoj energiji E_k izbačene strelice.

$$\begin{aligned} E_{ep} = E_k &\Rightarrow E_k = E_{ep} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \Rightarrow \left[k = \frac{F}{s_1} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{s_1} \cdot s^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{s_1} \cdot s^2 \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v_0^2 = \frac{F}{s_1 \cdot m} \cdot s^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_0^2 &= \frac{F}{s_1 \cdot m} \cdot s^2 \cdot \sqrt{} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{F}{s_1 \cdot m} \cdot s^2} \Rightarrow v_0 = s \cdot \sqrt{\frac{F}{s_1 \cdot m}} = \\ &= 0.2 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{10 \text{ N}}{0.01 \text{ m} \cdot 0.025 \text{ kg}}} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Domet D strelice koja je sa visine h ispućana početnom brzinom v_0 iznosi:

$$D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1.5 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 22.12 \text{ m}.$$

Vektor brzine jest tangenta na stazu hica u promatranoj točki. Prema načelu neovisnosti gibanja komponenta v_x brzine u svakoj je točki jednaka. Komponenta v_y mijenja se kao pri slobodnom padu. Tako je

$$\begin{aligned} v^2 = v_x^2 + v_y^2 &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} v_x = v_0 \\ v_y^2 = 2 \cdot g \cdot h \end{array} \right] \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h \cdot \sqrt{} \Rightarrow \\ \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} &= \sqrt{\left(40 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1.5 \text{ m}} = 40.37 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Vježba 531

Osoba nategne vrpce luka za 20 cm. Kolikom brzinom poleti strelica mase 25 g, ako je konstanta opiranja elastične vrpce luka takva da za njezino produljenje od 2 cm trebamo silu od 20 N. Zanemarite silu otpora zraka. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m/s²)

Rezultat: $v_0 = 40 \text{ m/s}$.

Zadatak 532 (Iva, gimnazija)

Tijelo izbačeno u horizontalnom smjeru poslije 3 s ima brzinu v koja u odnosu na horizontalu zatvara kut 45° . Odredi početnu brzinu. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 532

$$t = 3 \text{ s}, \quad v, \quad \alpha = 45^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Brzine nakon vremena t jesu v_0 i $g \cdot t$, a rezultatnu brzinu v možemo izračunati iz Pitagorina poučka jer su komponente međusobno okomite.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Na temelju odnosa među duljinama stranica trokut može biti:

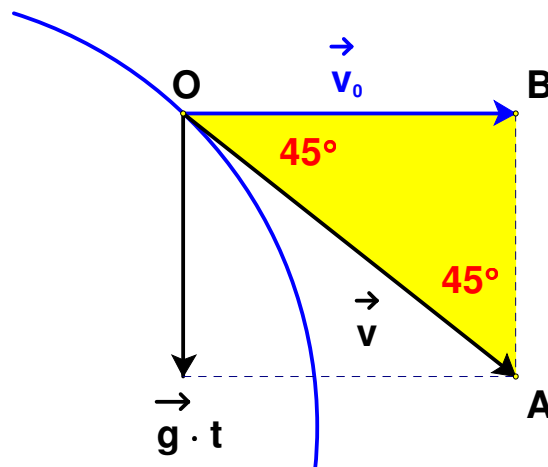
- 1) raznostraničan,
- 2) jednakokračan,
- 3) jednakostraničan.

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta. Nasuprot jednakim stranicama nalaze se jednaki kutovi.

$$\begin{cases} a = b \Rightarrow \alpha = \beta \\ a = c \Rightarrow \alpha = \gamma \\ b = c \Rightarrow \beta = \gamma \\ a = b = c \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma. \end{cases}$$

Nasuprot jednakim kutovima nalaze se jednake stranice.

$$\begin{cases} \alpha = \beta \Rightarrow a = b \\ \alpha = \gamma \Rightarrow a = c \\ \beta = \gamma \Rightarrow b = c \\ \alpha = \beta = \gamma \Rightarrow a = b = c. \end{cases}$$



Budući da rezultatna brzina v u odnosu na horizontalu zatvara kut od 45° , pravokutan trokut OAB je jednakokračan (katete su jednake duljine) pa vrijedi:

$$v_0 = g \cdot t = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ s} = 29.43 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 532

Tijelo izbačeno u horizontalnom smjeru poslije 2 s ima brzinu v koja u odnosu na horizontalu zatvara kut 45° . Odredi početnu brzinu. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 19.62 m/s.

Zadatak 533 (Bogdana, Anita, Maja, Ivica, veseli maturanti ☺)

Automobil, koji miruje, za 5 sekundi postigne brzinu 360 km/h. Njegovo ubrzanje približno je jednako:

A. pet puta ubrzanju sile teže

B. nuli

C. dva puta ubrzanju sile teže.

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 533

$$t = 5 \text{ s}, \quad v = 360 \text{ km/h} = [360 : 3.6] = 100 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \frac{a}{g} = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Kako se ispituje koliko je puta veličina a veća od veličine g ?

$$\frac{a}{g} = ?$$

Ubrzanje automobila iznosi:

$$v = a \cdot t \Rightarrow a \cdot t = v \Rightarrow a \cdot t = v \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow a = \frac{v}{t} = \frac{100 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Računamo koliko je puta ubrzanje a veće od ubrzanja g .

$$\frac{a}{g} = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 2.$$

Ubrzanje a je približno dva puta veće od ubrzanja g . Odgovor je pod C.

Vježba 533

Automobil, koji miruje, za 2 sekunde postigne brzinu 144 km/h. Njegovo ubrzanje približno je jednako:

A. pet puta ubrzanju sile teže

B. nuli

C. dva puta ubrzanju sile teže.

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: C.

Zadatak 534 (Ante, maturant)

S koje je visine palo tijelo koje je posljednjih 20 m prešlo za 0.85 s? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 534

$$\Delta h = 20 \text{ m}, \quad \Delta t = 0.85 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Neka je:

- h visina sa koje je tijelo palo
- t vrijeme za koje je tijelo palo s visine h.

Tada je tijelo visinu h – Δh prešlo za vrijeme t – Δt pa vrijedi sustav jednadžbi:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h - \Delta h &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow h - \Delta h - h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h - \Delta h - h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow -\Delta h = -g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot t \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 + \Delta h \Rightarrow g \cdot t \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 + \Delta h \quad / \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t = g \cdot (\Delta t)^2 + 2 \cdot \Delta h \Rightarrow 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t = g \cdot (\Delta t)^2 + 2 \cdot \Delta h \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot g \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{g \cdot (\Delta t)^2 + 2 \cdot \Delta h}{2 \cdot g \cdot \Delta t} = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (0.85 s)^2 + 2 \cdot 20 m}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0.85 s} = 2.82 s.$$

Visina pada tijela iznosi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (2.82 s)^2 = 39.01 m.$$

Vježba 534

S koje je visine palo tijelo koje je posljednjih 200 dm prešlo za 0.85 s? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 39.01 m.

Zadatak 535 (Nata, medicinska škola)

Koliko je težak 1 dm³ leda pri 0 °C? (gustoća leda pri 0 °C $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$, ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 535

$$V = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3, \quad \rho = 920 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad G = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz kvocijenta mase tijela i njegova obujma

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.



$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V} \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow G = \rho \cdot V \cdot g = 920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9.03 \text{ N}.$$

Vježba 535

Koliko je težak 2 dm³ leda pri 0 °C? (gustoća leda pri 0 °C $\rho = 920 \text{ kg / m}^3$, ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: 18.05 N.

Zadatak 536 (Nata, medicinska škola)

Koliko je teška kapljica žive obujma 0.25 cm³? (gustoća žive $\rho = 13600 \text{ kg / m}^3$, ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 536

$$V = 0.25 \text{ cm}^3 = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3, \quad \rho = 13600 \text{ kg / m}^3, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad G = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz kvocijenta mase tijela i njegova obujma

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.



$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V} \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow G = \rho \cdot V \cdot g = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.033 \text{ N}.$$

Vježba 536

Koliko je teška kapljica žive obujma 0.5 cm³? (gustoća žive $\rho = 13600 \text{ kg / m}^3$, ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: 0.067 N.

Zadatak 537 (Darko, tehnička škola)

Jedno tijelo slobodno pada s visine h_1 , a drugo s visine h_2 .

- a) U kojem omjeru stoje njihova vremena padanja?
 b) U kojem omjeru stoje njihove brzine u trenutku pada na Zemlju? (ubrzanje slobodnog pada g)

Rješenje 537

$$h_1, \quad h_2, \quad g, \quad t_1 : t_2 = ?, \quad v_1 : v_2 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0$ m/s i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81$ m/s². Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}, \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

gdje je h visina pada, v brzina pada.

- a) Računamo omjer vremena $t_1 : t_2$.

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} \\ t_2 &= \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g} \cdot \frac{g}{2 \cdot h_2}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{2 \cdot h_2}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}} \Rightarrow t_1 : t_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}.$$

- b) Računamo omjer brzina $v_1 : v_2$.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \\ v_2 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_1}{2 \cdot g \cdot h_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_1}{2 \cdot g \cdot h_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}} \Rightarrow v_1 : v_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}.$$

Vježba 537

Jedno tijelo slobodno pada s visine 100 m, a drugo s visine 50 m.

- a) U kojem omjeru stoje njihova vremena padanja?
 b) U kojem omjeru stoje njihove brzine u trenutku pada na Zemlju? (ubrzanje slobodnog pada g)

Rezultat: $t_1 : t_2 = \sqrt{2} : 1, \quad v_1 : v_2 = \sqrt{2} : 1.$

Zadatak 538 (Antonio, gimnazija)

Strelica izbačena lukom vertikalno uvis vraća se nakon 20 sekundi. Kolika je bila početna brzina? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m / s²)

Rješenje 538

$$t = 20 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad v_0 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato su mu brzina v i put s u času kad je prošlo vrijeme t dani ovim izrazima:

$$v = v_0 - g \cdot t, \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Najviši domet H što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je $v = 0$. Onda je

$$t = \frac{v_0}{g} \quad , \quad H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \quad , \quad H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 .$$

Let do najviše točke traje koliko i pad s te točke, tj. za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.

Neka je t_0 vrijeme za koje strelica postigne maksimalnu visinu. Tada je:

$$\left. \begin{array}{l} t_0 = \frac{v_0}{g} \\ t_0 = \frac{1}{2} \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_0}{g} = \frac{1}{2} \cdot t \Rightarrow \frac{v_0}{g} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot / \cdot g \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2} \cdot t \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ s} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 98.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$



Vježba 538

Strelica izbačena lukom vertikalno uvis vraća se nakon 10 sekundi. Kolika je bila početna brzina? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 49.05 m/s.

Zadatak 539 (Antonio, gimnazija)

Do koje se visine digne tijelo koje se, vertikalno bačeno uvis, nakon 20 sekundi vrati na zemlju? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 539

$$t = 20 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato su mu brzina v i put s u času kad je prošlo vrijeme t dani ovim izrazima:

$$v = v_0 - g \cdot t \quad , \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 .$$

Najviši domet H što ga tijelo može postići pri vertikalnom hici jest put u času kad je $v = 0$. Onda je

$$t = \frac{v_0}{g} \quad , \quad H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \quad , \quad H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 .$$

Let do najviše točke traje koliko i pad s te točke, tj. za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.

Neka je t_0 vrijeme za koje tijelo postigne maksimalnu visinu h . Tada je:

$$\left. \begin{array}{l} t_0 = \frac{1}{2} \cdot t \\ h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0^2 \end{array} \right\} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t \right)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{8} \cdot g \cdot t^2 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (20 \text{ s})^2 = 490.5 \text{ m} .$$

Vježba 539

Do koje se visine digne tijelo koje se, vertikalno bačeno uvis, nakon 10 sekundi vrati na zemlju? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 122.63 m.

Zadatak 540 (Ljilja, gimnazija)

Za koliko posto je potrebno smanjiti visinu slobodnog pada da bi se vrijeme pada smanjilo na polovicu?

Rješenje 540

$$h, \quad t, \quad t_1 = \frac{1}{2} \cdot t, \quad \Delta h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0$ m/s i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81$ m/s². Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Neka je t vrijeme slobodnog pada s visine h , a $t_1 = \frac{1}{2} \cdot t$ vrijeme slobodnog pada s visine h_1 . Napišemo sustav jednadžbi.

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t\right)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h_1 = \frac{1}{8} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{\frac{1}{8} \cdot g \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2} \Rightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{\frac{1}{8} \cdot g \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2} \Rightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{1}{4} \cdot h \Rightarrow h_1 = \frac{h}{4}.$$

Visina h_1 s koje tijelo slobodno pada za upola kraće vrijeme dana je relacijom $h_1 = \frac{h}{4}$ pa visinu h treba smanjiti za

$$\Delta h = h - h_1 \Rightarrow \Delta h = h - \frac{h}{4} \Rightarrow \Delta h = \frac{h}{1} - \frac{h}{4} \Rightarrow \Delta h = \frac{4 \cdot h - h}{4} \Rightarrow \Delta h = \frac{3 \cdot h}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = 0.75 \cdot h \Rightarrow \Delta h = \frac{75}{100} \cdot h \Rightarrow \Delta h = 75\% \cdot h.$$

Vježba 540

Za koliko posto je potrebno povećati visinu slobodnog pada da bi se vrijeme pada povećalo dva puta?

Rezultat: $\Delta h = 300\% \cdot h.$