

Zadatak 441 (Kristina, gimnazija)

Atletičar izbací koplje pod kutom 45° s visine 1.8 m na udaljenost 80 m. Otpor zraka se može zanemariti. Odredi početnu brzinu koplja. (ubrzanje sile teže $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 441

$$\alpha = 45^\circ, \quad y_0 = 1.8 \text{ m}, \quad d = 80 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada.

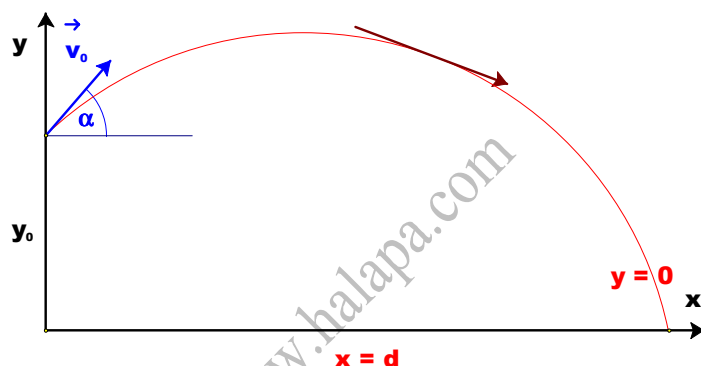
Za kosi hitac s visine y_0 vrijedi:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = y_0 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Jednadžba putanje je:

$$y = y_0 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}.$$



Budući da je poznat domet koplja $x = d$, njegova početna brzina v_0 iznosit će:

$$\left. \begin{array}{l} y = y_0 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \\ y = 0, \quad x = d \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = y_0 + d \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot d^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g \cdot d^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} = y_0 + d \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{g \cdot d^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} = y_0 + d \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{v_0^2}{y_0 + d \cdot \operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{g \cdot d^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (y_0 + d \cdot \operatorname{tg} \alpha)} \Rightarrow v_0^2 = \frac{g \cdot d^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (y_0 + d \cdot \operatorname{tg} \alpha)} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot d^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (y_0 + d \cdot \operatorname{tg} \alpha)}} \Rightarrow v_0 = \frac{d}{\cos \alpha} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (y_0 + d \cdot \operatorname{tg} \alpha)}} =$$

$$= \frac{80 \text{ m}}{\cos 45^\circ} \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot (1.8 \text{ m} + 80 \text{ m} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ)}} = 27.70 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Vježba 441

Atletičar izbacila koplje pod kutom 45° s visine 1.8 m na udaljenost 85 m. Otpor zraka se može zanemariti. Odredi početnu brzinu koplja. (ubrzanje sile teže $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 28.58 m/s.

Zadatak 442 (Josip, srednja škola)

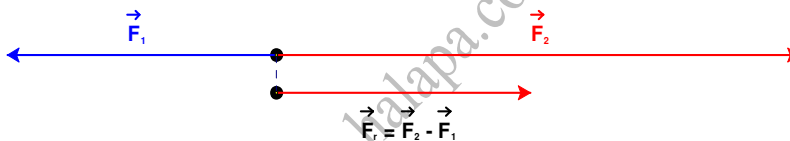
Na nepomičnom koloturu ovješena su preko nerastezljive niti dva tijela masa M i m pri čemu je $M > m$. Akceleracija slobodnog pada je g . Koji od predloženih odgovora za akceleraciju sustava tijela je ispravan?

A. $\frac{M-m}{M+m} \cdot g$ B. $\frac{M+m}{M-m} \cdot g$ C. $\frac{M}{M+m} \cdot g$ D. $\frac{m}{M+m} \cdot g$

Rješenje 442

$m_1 = M, \quad m_2 = m, \quad g, \quad a = ?$

Ako dvije sile imaju suprotne orijentacije, tada je orijentacija rezultante jednaka orijentaciji sile većeg iznosa, a iznos rezultante jednak je razlici iznosa njezinih komponenta.



Rezultanta sile F_1 i F_2 je

$$F_r = F_2 - F_1.$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F .

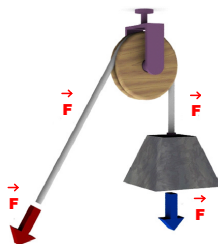
Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile, a obrnuto je razmjerna masi tijela.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

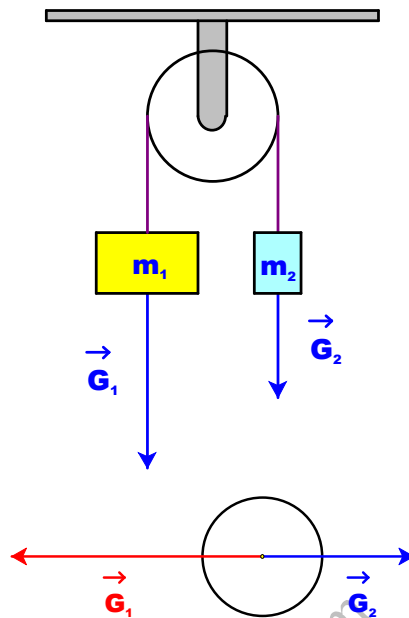
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G težna sila, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.



Kolutur je kotač koji ima na obodu žljeb u koji se ulaže uža. Kolutur može biti nepomičan i pomičan. Osovina čvrstog kolutura je učvršćena. Pomoću jednog nepomičnog kolutura mijenjamo samo smjer (ali ne i iznos) sile kojom podižemo teret. To je ekvivalentno poluzi jednakih krakova. Vučna sila F jednaka je težini tereta G .



Sila F koja uzrokuje gibanje tijela jednaka je razlici djelovanja sile teže na tijelo mase m_1 i tijelo mase m_2 , tj.

$$F = G_1 - G_2 \Rightarrow F = m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \Rightarrow F = M \cdot g - m \cdot g \Rightarrow F = (M - m) \cdot g.$$

Budući da sila F pokreće oba tijela, to je ukupna masa sustava m_{12} jednaka

$$m_{12} = m_1 + m_2 \Rightarrow m_{12} = M + m.$$

Akceleraciju sustava naći ćemo iz osnovnog zakona gibanja

$$a = \frac{F}{m_{12}} \Rightarrow a = \frac{(M - m) \cdot g}{M + m} \Rightarrow a = \frac{M - m}{M + m} \cdot g.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 442

Na nepomičnom koluturu ovješena su preko nerastezljive niti dva tijela masa $3 \cdot m$ i m . Akceleracija slobodnog pada je g . Koji od predloženih odgovora za akceleraciju sustava tijela je ispravan?

- A. $\frac{1}{2} \cdot g$ B. $2 \cdot g$ C. $\frac{3}{4} \cdot g$ D. $\frac{1}{4} \cdot g$

Rezultat: A.

Zadatak 443 (Goran, tehnička škola)

Tijelo se giba brzinom 50 m/s . Odjednom mu se brzina počinje jednoliko povećavati za 12 m/s^2 . Odredi srednju brzinu za vrijeme prvih triju sekundi.

- A. $31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ B. $62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ C. $38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ D. $68 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Rješenje 443

$$v_0 = 50 \text{ m/s}, \quad a = 12 \text{ m/s}^2, \quad t = 3 \text{ s}, \quad \bar{v} = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Srednja brzina pri jednoliko ubrzanom ili usporenom gibanju je

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

gdje su v_1 početna brzina gibanja i v_2 konačna brzina gibanja.

Budući da je početna brzina tijela v_0 , a ono se giba jednoliko ubrzano akceleracijom a , nakon vremena t konačna brzina v bit će

$$v = v_0 + a \cdot t.$$

Srednja brzina pri jednolikom ubrzanom gibanju za vrijeme t je aritmetička sredina početne i konačne brzine pa vrijedi:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{v_0 + v}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{2 \cdot v_0 + a \cdot t}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{2 \cdot v_0}{2} + \frac{a \cdot t}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{2 \cdot v_0}{2} + \frac{a \cdot t}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{v} = v_0 + \frac{a \cdot t}{2} = 50 \frac{m}{s} + \frac{12 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s}{2} = 68 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Vježba 443

Tijelo se giba brzinom 44 m/s. Odjednom mu se brzina počinje jednoliko povećavati za 12 m/s². Odredi srednju brzinu za vrijeme prvih triju sekundi.

A. 31 $\frac{m}{s}$ B. 62 $\frac{m}{s}$ C. 38 $\frac{m}{s}$ D. 68 $\frac{m}{s}$

Rezultat: B.

Zadatak 444 (Ivana, medicinska škola)

Kolika je težina tijela koje sila od 60 N pokrene u horizontalnom smjeru akceleracijom 4 m/s²? (ubrzanje sile teže $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 444

$$F = 60 \text{ N}, \quad a = 4 \text{ m/s}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad G = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F .

Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile, a obrnuto je razmjerna masi tijela.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G težna sila, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Računamo težinu tijela G .

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \quad / \cdot \frac{1}{a} \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \frac{F}{a} \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G = \frac{F}{a} \cdot g = \frac{60 \text{ N}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 147.15 \text{ N}.$$

Vježba 444

Kolika je težina tijela koje sila od 30 N pokrene u horizontalnom smjeru akceleracijom 2 m/s²? (ubrzanje sile teže g = 9.81 m/s²)

Rezultat: 147.15 N.

Zadatak 445 (Davor, tehnička škola)

Težina homogene kugle polumjera 3 cm iznosi 8.65 N. Kolika je gustoća kugle? (ubrzanje sile teže g = 9.81 m/s²)

Rješenje 445

$$r = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}, \quad G = 8.65 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \rho = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G težna sila, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

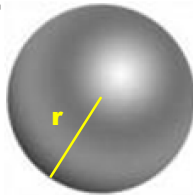
Gustoću ρ neke tvari definiramo omjerom mase m i obujma V tijela:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Obujam kugle

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$



Iz težine G homogene kugle izračunamo njezinu masu m.

$$G = m \cdot g \Rightarrow G = m \cdot g \quad /: g \Rightarrow m = \frac{G}{g}.$$

Sada je gustoća kugle:

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{G}{g} \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ \rho = \frac{m}{V} \end{array} \right\} \Rightarrow \rho = \frac{\frac{G}{g}}{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} \Rightarrow \rho = \frac{3 \cdot G}{4 \cdot r^3 \cdot \pi \cdot g} = \frac{3 \cdot 8.65 \text{ N}}{4 \cdot (0.03 \text{ m})^3 \cdot \pi \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7796.41 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Vježba 445

Težina homogene kugle polumjera 30 mm iznosi 8.65 N. Kolika je gustoća kugle? (ubrzanje sile teže g = 9.81 m/s²)

Rezultat: 7796.41 kg/m³.

Zadatak 446 (Ivan, tehnička škola)

Tijelo mase 160 kg padne na zemlju brzinom 5 m/s i propadne u nju 8 cm. Kolika je sila otpora zemlje?

Rješenje 446

$$m = 160 \text{ kg}, \quad v_0 = 5 \text{ m/s}, \quad s = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}, \quad F = ?$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se počelo usporavati i gibati jednoliko usporeno akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F . Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Budući da se tijelo giba kroz zemlju jednoliko usporeno dok se ne zaustavi ($v = 0$), dobijemo:

$$\left. \begin{array}{l} v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s \\ v = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_0^2 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot s = v_0^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot s} \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2 \cdot s}.$$

Tada sila trenja (otpora zemlje) iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ a = \frac{v_0^2}{2 \cdot s} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{array} \right] \Rightarrow F = m \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot s} = 160 \text{ kg} \cdot \frac{\left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.08 \text{ m}} = 25000 \text{ N} = 25 \text{ kN} = 2.5 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Vježba 446

Tijelo mase 320 kg padne na zemlju brzinom 5 m/s i propadne u nju 16 cm. Kolika je sila otpora zemlje?

Rezultat: $2.5 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Zadatak 447 (Neodlučna, gimnazija)

Tijelo krene iz mirovanja i prešavši put od 30 m postigne brzinu 50 km/h. Koliko mu je vremena za to bilo potrebno?

Rješenje 447

$$s = 30 \text{ m}, \quad v = 50 \text{ km/h} = [50 : 3.6] = 13.89 \text{ m/s}, \quad t = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = a \cdot t, \quad v^2 = 2 \cdot a \cdot s, \quad s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t,$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

1. inačica

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \cdot \frac{2}{v} \Rightarrow t = \frac{2 \cdot s}{v} = \frac{2 \cdot 30 \text{ m}}{13.89 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4.3 \text{ s}.$$

2. inačica

Najprije izračunamo akceleraciju a .

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow v^2 = 2 \cdot a \cdot s / \cdot \frac{1}{2 \cdot s} \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s} = \frac{\left(13.89 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 30 m} = 3.22 \frac{m}{s^2}$$

Vrijeme t iznosi:

$$v = a \cdot t \Rightarrow v = a \cdot t / \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{13.89 \frac{m}{s}}{3.22 \frac{m}{s^2}} = 4.3 s.$$

Vježba 447

Tijelo krene iz mirovanja i prešavši put od 300 dm postigne brzinu 50 km/h. Koliko mu je vremena za to bilo potrebno?

Rezultat: 4.3 s.

Zadatak 448 (Neodlučna, gimnazija)

Luka trči jednoliko pravocrtno brzinom 5 m/s, a 40 m iza njega Marko krene iz mirovanja na skuteru koji ima srednje ubrzanje 0.9 m/s². Nakon koliko će vremena Marko sustići Luku?

Rješenje 448

$$v = 5 \text{ m/s}, \quad s_1 = 40 \text{ m}, \quad a = 0.9 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

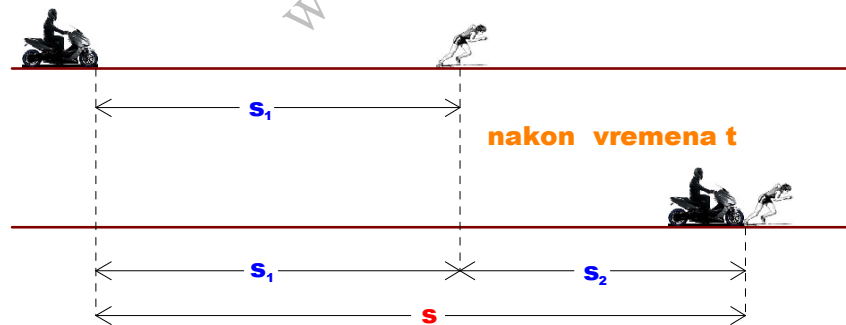
$$s = v \cdot t,$$

gdje je s put tijela počto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo stalnom, konstantnom brzinom v za vrijeme t.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela počto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.



Neka je t vrijeme potrebno da Marko sustigne Luku. U tom vremenu Luka je, gibajući se jednoliko pravocrtno, prešao put s_2 :

$$s_2 = v \cdot t,$$

a Marko, gibajući se jednoliko ubrzano, put s:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

koji je jednak zbroju putova s_1 i s_2 .

$$\begin{aligned} s = s_1 + s_2 &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 40 + v \cdot t \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 40 + v \cdot t / \cdot 2 \Rightarrow a \cdot t^2 = 80 + 2 \cdot v \cdot t \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \cdot t^2 - 2 \cdot v \cdot t - 80 = 0 \Rightarrow 0.9 \cdot t^2 - 2 \cdot 5 \cdot t - 80 = 0 \Rightarrow 0.9 \cdot t^2 - 10 \cdot t - 80 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0.9 \cdot t^2 - 10 \cdot t - 80 = 0 \quad / : 10 \Rightarrow 9 \cdot t^2 - 100 \cdot t - 800 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadratna jednađba} \\ \text{po varijabli } t \end{array} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9 \cdot t^2 - 100 \cdot t - 800 = 0 \\ a = 9, b = -100, c = -800 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 9, b = -100, c = -800 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-100) \pm \sqrt{(-100)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-800)}}{2 \cdot 9} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 + 28800}}{18} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{38800}}{18} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{100 \pm 196.98}{18} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{100 + 196.98}{18} \\ t_2 = \frac{100 - 196.98}{18} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{296.98}{18} \\ t_2 = \frac{-96.98}{18} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 16.5 \text{ s} \\ t_2 = -5.4 \text{ s, nema smisla} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Vježba 448

Luka trči jednoliko pravocrtno brzinom 5 m/s, a 0.04 km iza njega Marko krene iz mirovanja na skuteru koji ima srednje ubrzanje 90 cm/s^2 . Nakon koliko će vremena Marko sustići Luku?

Rezultat: 16.5 s.

Zadatak 449 (Ivan, gimnazija)

Osobni automobil giba se brzinom 60 km/h iza kamiona kojemu je brzina 30 km/h . Približivši se na udaljenost s iza kamiona vozač automobila počinje kočiti akceleracijom od -3 m/s^2 . Odredite kolika mora biti minimalna udaljenost s da ne dođe do sudara.

Rješenje 449

$$v_1 = 60 \text{ km/h} = [60 : 3.6] = 16.67 \text{ m/s}, \quad v_2 = 30 \text{ km/h} = [30 : 3.6] = 8.33 \text{ m/s},$$

$$a = -3 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Gibanje je svuda oko nas. Nema apsolutnog mirovanja. To je jedno od osnovnih svojstava materije. Gibanje je neprekidno mijenjanje položaja tijela (ili njegovih čestica) prema okolišu. Gibanje tijela uvijek promatramo u odnosu prema okolišu. S različitih stajališta isto gibanje pokazuje nam se različito pa gdječak čak i kao mirovanje. Referentni sustav je koordinatni sustav u kojem promatramo gibanje. Referentni sustav je vezan uz ono tijelo za koje se uvjetno dogovorimo da miruje i spram kojeg se promatra gibanje nekih drugih tijela.

Budući da osobni automobil brzine v_1 sustiže kamion brzine v_2 , relativna brzina osobnog automobila u odnosu na kamion je:

$$v_r = v_1 - v_2$$

pa vrijedi:

$$v_r^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow v_r^2 = 2 \cdot a \cdot s \cdot \frac{1}{2 \cdot a} \Rightarrow s = \frac{v_r^2}{2 \cdot a} \Rightarrow \left[v_r^2 = v_1 - v_2 \right] \Rightarrow s = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2 \cdot a} =$$

$$= \frac{\left(16.67 \frac{m}{s} - 8.33 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 3 \frac{m}{s^2}} = 11.59 \text{ m.}$$



Vježba 449

Osobni automobil giba se brzinom 65 km/h iza kamiona kojemu je brzina 35 km/h. Približivši se na udaljenost s iza kamiona vozač automobila počinje kočiti akceleracijom od -3 m/s^2 . Odredite kolika mora biti minimalna udaljenost s da ne dođe do sudara.

Rezultat: 11.6 m.

Zadatak 450 (Nataša, medicinska škola)

Odredite konstantnu silu F koja ubrzava automobil mase 1000 kg od mirovanja do brzine 20 m/s za vrijeme 10 s.

Rješenje 450

$$m = 1000 \text{ kg}, \quad v = 20 \text{ m/s}, \quad t = 10 \text{ s}, \quad F = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t \Rightarrow a = \frac{v}{t},$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F . Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile, a obrnuto je razmjerna masi tijela. Ako je početna brzina nula, za tijelo mase m na koje je za vrijeme t djelovala sila F vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je v brzina na kraju vremenskog intervala t za koji je sila djelovala. Umnožak

$$I = F \cdot t$$

zovemo impulsom sile F , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase m .

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ a = \frac{v}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow F = m \cdot \frac{v}{t} = 1000 \text{ kg} \cdot \frac{20 \frac{m}{s}}{10 \text{ s}} = 2000 \text{ N} = 2 \cdot 10^3 \text{ N} = 2 \text{ kN}.$$

2. inačica

Budući da je promjena količine gibanja jednaka impulsu sile koji je tu promjenu uzrokovao, vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v \Rightarrow F \cdot t = m \cdot v \quad | : t \Rightarrow F = \frac{m \cdot v}{t} = \frac{1000 \text{ kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} = 2000 \text{ N} = 2 \cdot 10^3 \text{ N} = 2 \text{ kN}.$$

Vježba 450

Odredite konstantnu silu F koja ubrzava automobil mase 2000 kg od mirovanja do brzine 20 m/s za vrijeme 20 s.

Rezultat: 2 kN.

Zadatak 451 (Nataša, medicinska škola)

Djevojčica se zatrči na zaleđeno jezero i počne klizati brzinom 5 m/s pa se zaustavi nakon 4 s. Koliko iznosi faktor trenja klizanja između cipela i leda? Za akceleraciju sile teže uzmite približnu vrijednost ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Rješenje 451

$$v = 5 \text{ m/s}, \quad t = 4 \text{ s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t \Rightarrow a = \frac{v}{t},$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F. Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile, a obrnuto je razmjerna masi tijela. Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže. Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Djevojčica se zatrči na zaleđeno jezero i počne klizati brzinom v pa se zaustavi nakon vremena t. Sila koja usporava klizanje je sila trenja između cipela i leda. Zato vrijedi:

$$F = F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot G \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{v}{t} \\ G = m \cdot g \end{array} \right] \Rightarrow m \cdot \frac{v}{t} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow m \cdot \frac{v}{t} = \mu \cdot m \cdot g \quad | \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{v}{g \cdot t} = \frac{5 \frac{m}{s}}{10 \frac{m}{s^2} \cdot 4 s} = 0.125.$$

Vježba 451

Djevojčica se zatrči na zaleđeno jezero i počne klizati brzinom 10 m/s pa se zaustavi nakon 8 s. Koliko iznosi faktor trenja klizanja između cipela i leda? Za akceleraciju sile teže uzmite približnu vrijednost ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Rezultat: 0.125.

Zadatak 452 (Goran, srednja škola)

Na automobil mase 1200 kg brzine 10 m/s djeluje u vremenu 6 s sila ubrzanja 900 N. Kolika je brzina nakon djelovanja sile?

Rješenje 452

$$m = 1200 \text{ kg}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad t = 6 \text{ s}, \quad F = 900 \text{ N}, \quad v = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F . Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile, a obrnuto je razmjerna masi tijela. Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v = v_0 + a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se počelo ubrzavati i gibati jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Budući da automobil ima početnu brzinu v_0 , konačna brzina v nakon ubrzanja a za vrijeme t bit će:

$$\left. \begin{array}{l} v = v_0 + a \cdot t \\ a = \frac{F}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow v = v_0 + \frac{F}{m} \cdot t = 10 \frac{m}{s} + \frac{900 \text{ N}}{1200 \text{ kg}} \cdot 6 \text{ s} = 14.5 \frac{m}{s}.$$

Vježba 452

Na automobil mase 600 kg brzine 10 m/s djeluje u vremenu 6 s sila ubrzanja 450 N. Kolika je brzina nakon djelovanja sile?

Rezultat: 14.5 m/s.

Zadatak 453 (Marija, gimnazija)

Na površini jezera nalazi se čamac. On leži okomito na smjer obale i okrenut je prema njoj pramcem. Čamac miruje, a pramac mu je udaljen od obale 0.75 m. U čamcu se nalazi čovjek koji prelazi cijelu duljinu čamca od pramca do krme. Masa čamca je 140 kg, a čovjeka 60 kg.

a) Koliki je omjer brzina gibanja čovjeka i čamca u odnosu prema obali?

b) Je li pri tome gibanju čamac pristao uz obalu, ako je dugačak 2 m? Otpor vode zanemarimo.

Rješenje 453

$$l = 0.75 \text{ m}, \quad m_1 = 140 \text{ kg} - \text{masa čamca}, \quad m_2 = 60 \text{ kg} - \text{masa čovjeka}, \quad d = 2 \text{ m},$$

$$\frac{v_2}{v_1} = ?, \quad s = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je s put tijela počto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo stalnom, konstantnom brzinom v za vrijeme t .

Umnožak

$$p = m \cdot v$$

zovemo količinom gibanja tijela mase m .

Zakon održanja količine gibanja ako su početne brzine obaju tijela jednake nuli:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0,$$

gdje su v_1 i v_2 brzine tijela mase m_1 odnosno m_2 nakon njihova međusobnog djelovanja.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'.$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.



a) Količina gibanja čovjeka mase m_2 koji se kreće po čamcu brzinom v_2 je

$$p_2 = m_2 \cdot v_2.$$

Količina gibanja čamca mase m_1 zajedno sa čovjekom mase m_2 pri čemu se čamac kreće brzinom v_1 je

$$p_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_1.$$

Zbog zakona očuvanja količine gibanja vrijedi:

$$\begin{aligned} p_2 = p_1 &\Rightarrow m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_1 \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_1 \cdot \frac{1}{m_2 \cdot v_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{140 \text{ kg} + 60 \text{ kg}}{60 \text{ kg}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = 3.3. \end{aligned}$$

b) Računamo s put čamca po vodi.

1. inačica

Put koji čovjek prevali od pramca do krme čamca je d . Put koji čamac sa čovjekom za to vrijeme prijeđe u suprotnom smjeru označimo slovom s . Oba su gibanja jednoliko pravocrtna pa su putovi što ih oni prijeđu upravo razmjerni njihovim brzinama.

$$\frac{d}{s} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \left[\frac{v_2}{v_1} = 3.3 \right] \Rightarrow \frac{d}{s} = 3.3 \Rightarrow \frac{d}{s} = \frac{3.3}{1} \Rightarrow \frac{s}{d} = \frac{1}{3.3} \Rightarrow \frac{s}{d} = \frac{1}{3.3} \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{d}{3.3} = \frac{2 \text{ m}}{3.3} = 0.6 \text{ m.}$$

Čamac je bio udaljen od obale 0.75 m, a pomakao se za 0.6 m pa nije pristao uz obalu.

2. inačica

Budući da su oba gibanja jednoliko pravocrtna za putove d čovjeka i s čamca vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} d = v_2 \cdot t \\ s = v_1 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{d}{s} = \frac{v_2 \cdot t}{v_1 \cdot t} \Rightarrow \frac{d}{s} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{d}{s} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \left[\frac{v_2}{v_1} = 3.3 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{s} = 3.3 \Rightarrow \frac{d}{s} = \frac{3.3}{1} \Rightarrow \frac{s}{d} = \frac{1}{3.3} \Rightarrow \frac{s}{d} = \frac{1}{3.3} \cdot d \Rightarrow s = \frac{d}{3.3} = \frac{2 \text{ m}}{3.3} = 0.6 \text{ m.}$$

Čamac je bio udaljen od obale 0.75 m, a pomakao se za 0.6 m pa nije pristao uz obalu.

Vježba 453

Na površini jezera nalazi se čamac. On leži okomito na smjer obale i okrenut je prema njoj pramcem. Čamac miruje, a pramac mu je udaljen od obale 7.5 dm. U čamcu se nalazi čovjek koji prelazi cijelu duljinu čamca od pramca do krme. Masa čamca je 280 kg, a čovjeka 120 kg. Koliki je omjer brzina gibanja čovjeka i čamca u odnosu prema obali? Otpor vode zanemarimo.

Rezultat: 3.3.

Zadatak 454 (Valentina, njezina dosjetljiva cimerica ☺, gimnazija)

Lopta izbačena s balkona brzinom 36 km/h uvis pod kutom 40° u odnosu na površinu Zemlje padne na tlo na udaljenosti 13.8 m od mjesta izbačaja.

a) Kolika je visina balkona?

b) Kolika je bila najveća visina koju je lopta dosegla u odnosu na tlo?

Otpor zraka zanemarivo je malen. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 454

$v_0 = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}$, $\alpha = 40^\circ$, $D = 13.8 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $y_0 = ?$, $y_M = ?$

Tijelo se složeno giba kad istodobno obavlja dva ili više gibanja. Pri takvom gibanju vrijedi načelo **neovisnosti gibanja** koje glasi: Kad tijelo istodobno obavlja dva gibanja, giba se tako da se u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi stiglo kad bi obavilo samo jedno gibanje u određenom vremenskom razmaku, a neovisno o tom gibanju istodobno i drugo gibanje u istome vremenskom razmaku. Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada.

Kosi hitac s visine y_0

Jednadžba putanje kod kosog hica s visine y_0 glasi:

$$y = y_0 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha},$$

gdje je y_0 početna visina, α kut elevacije, v_0 početna brzina, g ubrzanje slobodnog pada.

Najveća visina (visina penjanja) y_M je

$$y_M = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} + y_0.$$

Budući da je zadana početna brzina v_0 , kut elevacije α i domet D , a traži se početna visina y_0 , stavit ćemo da je $y = 0$, a $x = D$ pa dobijemo:

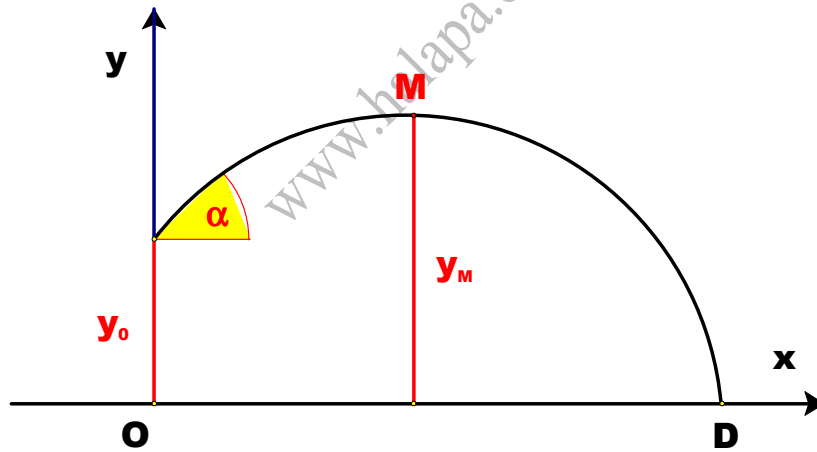
$$\left. \begin{array}{l} y = y_0 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \\ y = 0 \\ x = D \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = y_0 + D \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot D^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y_0 = D \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot D^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \Rightarrow -y_0 = D \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot D^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{g \cdot D^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} - D \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (13.8 \text{ m})^2}{2 \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \cos^2 40^\circ} - 13.8 \text{ m} \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 4.34 \text{ m}.$$

Najveća visina y_M koju je lopta dosegla iznosi:

$$y_M = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} + y_0 = \frac{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \sin^2 40^\circ}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + 4.34 \text{ m} = 6.45 \text{ m}.$$



Vježba 454

Lopta izbačena s balkona brzinom 36 km/h uvis pod kutom 30° u odnosu na površinu Zemlje padne na tlo na udaljenosti 13.8 m od mjesta izbačaja. Kolika je visina balkona? Otpor zraka zanemarivo je malen. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 4.49 m.

Zadatak 455 (Marija, gimnazija)

Kamen bacimo s tornja visine 30 m početnom brzinom 10 m/s pod kutom 35° prema horizontali. Treba odrediti koliko će se dugo tijelo gibati i na kojoj će udaljenosti od podnožja tornja pasti. Otpor zraka zanemarimo. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 455

$$y_0 = 30 \text{ m}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad \alpha = 35^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?, \quad D = ?$$

Tijelo se složeno giba kad istodobno obavlja dva ili više gibanja. Pri takvom gibanju vrijedi načelo

neovisnosti gibanja koje glasi: Kad tijelo istodobno obavlja dva gibanja, giba se tako da se u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi stiglo kad bi obavilo samo jedno gibanje u određenom vremenskom razmaku, a neovisno o tom gibanju istodobno i drugo gibanje u istome vremenskom razmaku. Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada.

Kosi hitac s visine y_0

Jednadžba putanje kod kosog hica s visine y_0 glasi:

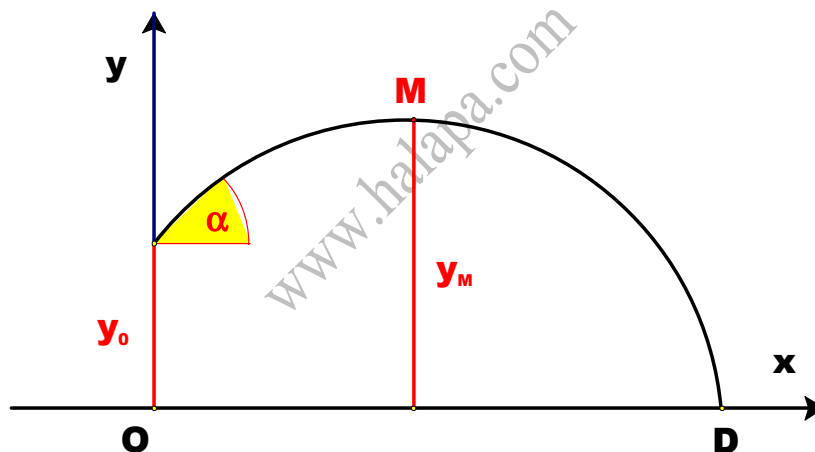
$$y = y_0 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha},$$

gdje je y_0 početna visina, α kut elevacije, v_0 početna brzina, g ubrzanje slobodnog pada. Trajanje leta tijela kod kosog hica s visine y_0 dobije se iz jednadžbe

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2 \cdot g \cdot y_0}}{g}.$$

Dometa tijela kod kosog hica s visine y_0 računa se po formuli

$$D = \frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{g} \cdot \left(v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2 \cdot g \cdot y_0} \right).$$



Vrijeme gibanja kamena iznosi:

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2 \cdot g \cdot y_0}}{g} =$$

$$= \frac{10 \frac{m}{s} \cdot \sin 35^\circ + \sqrt{\left(10 \frac{m}{s} \cdot \sin 35^\circ\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 30 m}}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 3.13 s.$$

Udaljenost od podnožja tornja do mjesta gdje kamen padne je:

$$D = \frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{g} \cdot \left(v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2 \cdot g \cdot y_0} \right) =$$

$$= \frac{10 \frac{m}{s} \cdot \cos 35^\circ}{g} \cdot \left(10 \frac{m}{s} \cdot \sin 35^\circ + \sqrt{\left(10 \frac{m}{s} \cdot \sin 35^\circ \right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 30 m} \right) = 25.61 m.$$

Vježba 455

Kamen bacimo s tornja visine 300 dm početnom brzinom 36 km/h pod kutom 35° prema horizontali. Treba odrediti koliko će se dugo tijelo gibati. Otpor zraka zanemarimo. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 3.13 s.

Zadatak 456 (Mario, srednja škola)

S vrha visoke zgrade ispušten je kamen da slobodno pada. Jednu sekundu kasnije bačena je kugla početnom brzinom v_0 , koja je dostigla kamen 3 s nakon njegovog ispuštanja. Izračunaj početnu brzinu kugle. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 456

$$\Delta t = 1 \text{ s}, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje su h visina pada, g ubrzanje sile teže.

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 tada formula za slobodni pad glasi:

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Neka je t vrijeme padanja kamena u kojem ga kugla dostigne. Tada je vrijeme padanja kugle

$$t - \Delta t.$$

Prijeđeni putovi pri padanju tijela iznose:

- za kamen

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

- za kuglu

$$h_2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2.$$

Budući da je kugla dostigla kamen, prešli su jednake putove pa vrijedi:

$$h_1 = h_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot (t - \Delta t)^2 = g \cdot t^2 \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) = g \cdot t^2 - g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) = g \cdot t^2 - g \cdot (t - \Delta t)^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow v_0 = \frac{g \cdot t^2 - g \cdot (t - \Delta t)^2}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow v_0 = \frac{g \cdot t^2 - g \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2)}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow v_0 = \frac{g \cdot t^2 - g \cdot t^2 + 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow v_0 = \frac{g \cdot t^2 - g \cdot t^2 + 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow v_0 = \frac{g \cdot \Delta t \cdot (2 \cdot t - \Delta t)}{2 \cdot (t - \Delta t)} = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1 s \cdot (2 \cdot 3 s - 1 s)}{2 \cdot (3 s - 1 s)} = 12.26 \frac{m}{s}.
\end{aligned}$$

Vježba 456

S vrha visoke zgrade ispušten je kamen da slobodno pada. Dvije sekunde kasnije bačena je kugla početnom brzinom v_0 , koja je dostigla kamen 3 s nakon njegovog ispuštanja. Izračunaj početnu brzinu kugle. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $39.24 \frac{m}{s}$.

Zadatak 457 (Tomislav, gimnazija)

Pri jednolikom ubrzanju tijelo prijeđe prvih 60 m za 8 s. Koliko mu vremena treba za sljedećih 40 m?

Rješenje 457

$$s_1 = 60 \text{ m}, \quad t_1 = 8 \text{ s}, \quad s_2 = 40 \text{ m}, \quad t_2 = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela počto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Put s_1 tijelo je prešlo za vrijeme t_1 pa je

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2.$$

Sljedeći dio puta s_2 preavljen je za vrijeme t_2 pa je ukupni put $s_1 + s_2$ jednak

$$s_1 + s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se t_2 .

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ s_1 + s_2 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{s_1 + s_2}{s_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{s_1 + s_2}{s_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_2)^2}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2} \Rightarrow \frac{s_1 + s_2}{s_1} = \frac{(t_1 + t_2)^2}{t_1^2} \Rightarrow \frac{s_1 + s_2}{s_1} = \left(\frac{t_1 + t_2}{t_1} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{t_1+t_2}{t_1}\right)^2 &= \frac{s_1+s_2}{s_1} \Rightarrow \left(\frac{t_1+t_2}{t_1}\right)^2 = \frac{s_1+s_2}{s_1} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{t_1+t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{t_1+t_2}{t_1} &= \sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}} \quad / \cdot t_1 \Rightarrow t_1+t_2 = t_1 \cdot \sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}} \Rightarrow t_2 = t_1 \cdot \sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}} - t_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow t_2 &= t_1 \cdot \left(\sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}} - 1\right) = 8 \text{ s} \cdot \left(\sqrt{\frac{60 \text{ m} + 40 \text{ m}}{60 \text{ m}}} - 1\right) = 2.33 \text{ s}. \end{aligned}$$

Vježba 457

Pri jednolikom ubrzanju tijelo prijeđe prvih 120 m za 8 s. Koliko mu vremena treba za sljedećih 80 m?

Rezultat: 2.33 s.

Zadatak 458 (Rock, tehnička škola)

Iz zraka s visine 100 m ispusti se tijelo u jezero dubine 200 m. Tijelo padne na dno jezera 8 sekundi nakon trenutka ispuštanja iz zraka. Nađi srednju akceleraciju pri padanju kroz vodu. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 458

$$h = 100 \text{ m}, \quad d = 200 \text{ m}, \quad t = 8 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s, \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}, \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje su h visina pada, g ubrzanje sile teže.

Neka je t_1 vrijeme padanja tijela kroz zrak s visine h .

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}.$$

Vrijeme gibanja Δt tijela kroz vodu iznosi:

$$\Delta t = t - t_1 \Rightarrow \Delta t = t - \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}.$$

Tijelo u zraku slobodno pada pa je njegova brzina pri ulazu u vodu

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Pri padanju kroz vodu tijelo se giba jednoliko ubrzano s početnom brzinom v i akceleracijom a pa za vrijeme Δt prevari put d .

$$d = v \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow d = v \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot d = 2 \cdot v \cdot \Delta t + a \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \cdot v \cdot \Delta t + a \cdot (\Delta t)^2 &= 2 \cdot d \Rightarrow a \cdot (\Delta t)^2 = 2 \cdot d - 2 \cdot v \cdot \Delta t \Rightarrow a \cdot (\Delta t)^2 = 2 \cdot d - 2 \cdot v \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{(\Delta t)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= \frac{2 \cdot d - 2 \cdot v \cdot \Delta t}{(\Delta t)^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot (d - v \cdot \Delta t)}{(\Delta t)^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot (d - v \cdot (t - t_1))}{(t - t_1)^2} \Rightarrow \\ &= \frac{2 \cdot \left(d - \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot \left(t - \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \right) \right)}{\left(t - \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \right)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot \left(200 \text{ m} - \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100 \text{ m}} \cdot \left(8 \text{ s} - \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \right) \right)}{\left(8 \text{ s} - \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \right)^2} = 7.52 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Vježba 458

Iz zraka s visine 0.1 km ispusti se tijelo u jezero dubine 0.2 km. Tijelo padne na dno jezera 8 sekundi nakon trenutka ispuštanja iz zraka. Nađi srednju akceleraciju pri padanju kroz vodu. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 7.52 m/s^2 .

Zadatak 459 (Željko, srednja škola)

Koliko iznosi ubrzanje sile teže na Marsu ako kamen sa visine 46.5 metara pada 5 sekundi?

Rješenje 459

$$h = 46.5 \text{ m}, \quad t = 5 \text{ s}, \quad a = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Slobodni pad (na Marsu) je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom a . Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje su h visina pada, a ubrzanje sile teže na Marsu.

Računamo ubrzanje sile teže na Marsu.

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \cdot \frac{2}{t^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot h}{t^2} = \frac{2 \cdot 46.5 \text{ m}}{(5 \text{ s})^2} = 3.72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 459

Koliko iznosi ubrzanje sile teže na Marsu ako kamen sa visine 186 metara pada 10 sekundi?

Rezultat: 3.72 m/s^2 .

Zadatak 460 (Bruno, tehnička škola)

- Tijelo mase 10 kg miruje na glatkoj ravnoj podlozi. Na tijelo djeluje sila trenja od 5 N.
- Kolika vučna sila treba djelovati na tijelo da bi se gibalo jednoliko?
 - Kolika bi vučna sila trebala djelovati da bi se gibalo akceleracijom 2 m/s^2 ?

Rješenje 460

$$m = 10 \text{ kg}, \quad F_{tr} = 5 \text{ N}, \quad a = 2 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja.

Prvi Newtonov poučak

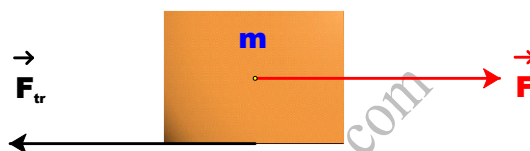
Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F . Akceleracija a tijela je razmjerna sili F i ima smjer sile, a obrnuto je razmjerna masi tijela.

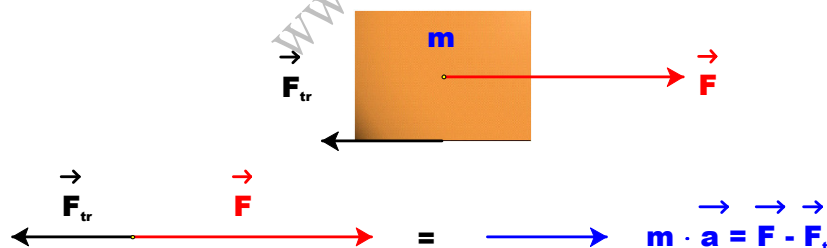
a)



Budući da se tijelo mora gibati jednoliko (ima stalnu brzinu), prema prvom Newtonovom poučku vučna sila F po iznosu jednaka je sili trenja F_{tr} , a suprotnog je smjera od smjera sile trenja.

$$F = F_{tr} = 5 \text{ N}.$$

b)



Rezultantna sila $m \cdot a$ koja tijelu daje akceleraciju a jednaka je razlici vučne sile F i sile trenja F_{tr} .

$$m \cdot a = F - F_{tr} \Rightarrow F - F_{tr} = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot a + F_{tr} = 10 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 5 \text{ N} = 25 \text{ N}.$$

Vježba 460

Tijelo mase 5 kg miruje na glatkoj ravnoj podlozi. Na tijelo djeluje sila trenja od 5 N. Kolika bi vučna sila trebala djelovati na tijelo da bi se gibalo akceleracijom 4 m/s^2 ?

Rezultat: 25 N.