

Zadatak 281 (Biba, srednja tehnička škola)

Vagon mase 12 t giba se brzinom 7 m/s i centralno se sudari s drugim vagonom koji se giba u istom smjeru brzinom 2 m/s. Nakon sudara vagoni se gibaju zajedno brzinom 5 m/s u istom smjeru. Kolika je masa drugog vagona?

Rješenje 281

$$m_1 = 12 \text{ t}, \quad v_1 = 7 \text{ m/s}, \quad v_2 = 2 \text{ m/s}, \quad v_1' = v_2' = v' = 5 \text{ m/s}, \quad m_2 = ?$$

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

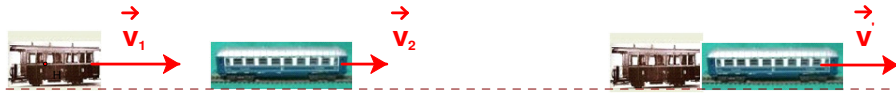
$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.

Ako je sudar središnji (kad svi vektori brzina leže na pravcu koji prolazi središtem masa obaju tijela), zakon održanja količina gibanja glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v',$$

gdje je v' zajednička brzina za oba tijela koja su se sudarila.



Masa m_2 drugog vagona iznosi:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \\ v_1' &= v_2' = v' \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v' = m_1 \cdot v' - m_1 \cdot v_1 \Rightarrow m_2 \cdot (v_2 - v') = m_1 \cdot (v' - v_1) \Rightarrow m_2 = \frac{m_1 \cdot (v' - v_1)}{v_2 - v'}$$
$$= \frac{12 \text{ t} \cdot \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 8 \text{ t}.$$

Vježba 281

Vagon mase 15 t giba se brzinom 7 m/s i centralno se sudari s drugim vagonom koji se giba u istom smjeru brzinom 2 m/s. Nakon sudara vagoni se gibaju zajedno brzinom 5 m/s u istom smjeru. Kolika je masa drugog vagona?

Rezultat: 10 t.

Zadatak 282 (Maturant, gimnazija)

Automobil vozi brzinom 20 m/s u vodoravno položenome zavoju polumjera zakrivljenosti 80 m. Koliki mora biti najmanji faktor trenja između guma i ceste da bi vozilo prošlo zavoj sa stalnim iznosom brzine? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 282

$$v = 20 \text{ m/s}, \quad r = 80 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Ako se tijelo nalazi na vodoravnoj podlozi, tada trenje iznosi

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, m masa tijela, g akceleracija slobodnog pada (ubrzanje sile teže).

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Budući da automobil mora proći zavoj sa stalnim iznosom brzine tu je trenje sila koja prisiljava automobil da se giba kružnom cestom, tj. zavojem.

$$\begin{aligned} F_{tr} = F_{cp} &\Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} / \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{r \cdot g} = \\ &= \frac{\left(20 \frac{m}{s}\right)^2}{80 m \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 0.51. \end{aligned}$$

Vježba 282

Automobil vozi brzinom 20 m/s u vodoravno položenome zavoju polumjera zakrivljenosti 160 m. Koliko mora biti najmanji faktor trenja između guma i ceste da bi vozilo prošlo zavoj sa stalnim iznosom brzine? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.25.

Zadatak 283 (Maturant, gimnazija)

Kutija mase 1 kg giba se niz kosinu nagiba 30° . Trenje je zanemarlivo.

- Koliko iznosi ubrzanje kutije?
- Kolikom silom kutija pritišće podlogu? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 283

$$m = 1 \text{ kg}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?, \quad F_2 = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

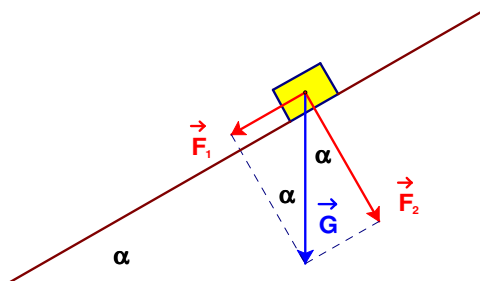
gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



a) Sa slike vidi se

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{F_1}{G} \cdot G \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

Sila koja kutiju ubrzava niz kosinu je horizontalna komponenta F_1 sile teže G pa prema drugom Newtonovom poučku vrijedi:

$$F = F_1 \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin \alpha \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin \alpha \quad /: m \Rightarrow a = g \cdot \sin \alpha = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 30^\circ = 4.91 \frac{m}{s^2}.$$

b) Sa slike vidi se

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{F_2}{G} \cdot G \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Sila kojom kutija pritišće podlogu je F_2 :

$$F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \cos 30^\circ = 8.50 \text{ N}.$$

Vježba 283

Kutija mase 2 kg giba se niz kosinu nagiba 30° . Trenje je zanemarivo. Kolikom silom kutija pritišće podlogu? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 16.99 N.

Zadatak 284 (Matea, srednja škola)

Predmet mase 6 kg obješen je u točki A dviju potpornih šipaka koje su dugačke $a = 4 \text{ dm}$ i $b = 5 \text{ dm}$. Kolikom silom djeluje uteg duž oba štapa? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 284

$$m = 6 \text{ kg}, \quad a = 4 \text{ dm} = 0.4 \text{ m}, \quad b = 5 \text{ dm} = 0.5 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_1 = ?, \quad F_2 = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

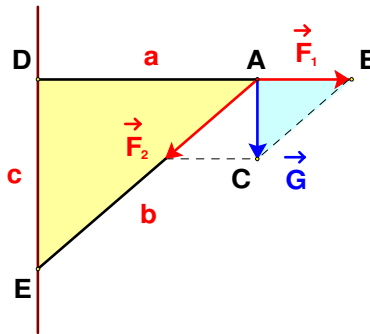
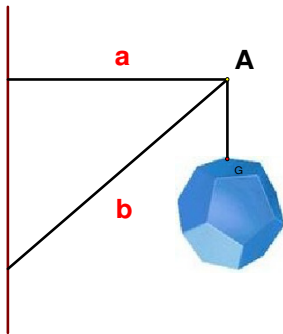
gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Sličnost trokuta: Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

Prvi teorem sličnosti (K – K): Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Uočimo pravokutan trokut DEA pa pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu stranice $c = |DE|$.



$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = b^2 - a^2 \quad | \sqrt{} \Rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{(0.5 \text{ m})^2 - (0.4 \text{ m})^2} = 0.3 \text{ m}.$$

Iz sličnosti trokuta $\triangle ACB$ i $\triangle DEA$ (imaju jednake kutove) slijedi razmjer:

$$\frac{F_1}{G} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{F_1}{G} = \frac{a}{c} \cdot G \Rightarrow F_1 = G \cdot \frac{a}{c} \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \frac{a}{c} = 6 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{0.4 \text{ m}}{0.3 \text{ m}} = 78.48 \text{ N}.$$

Iz sličnosti trokuta $\triangle ACB$ i $\triangle DEA$ (imaju jednake kutove) slijedi razmjer:

$$\frac{F_2}{G} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{F_2}{G} = \frac{b}{c} \cdot G \Rightarrow F_2 = G \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \frac{b}{c} = 6 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{0.5 \text{ m}}{0.3 \text{ m}} = 98.1 \text{ N}.$$

Vježba 284

Predmet mase 600 dag obješen je u točki A dviju potpornih šipaka koje su dugačke $a = 40 \text{ cm}$ i $b = 50 \text{ cm}$. Kolikom silom djeluje uteg duž oba štapa? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 78.48 N , 98.1 N.

Zadatak 285 (Matea, srednja škola)

Kolika sila mora djelovati na tijelo mase 4 kg da bi se ono gibalo vertikalno gore akceleracijom 2 m/s^2 ? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 285

$$m = 4 \text{ kg}, \quad a = 2 \text{ m/s}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Budući da se tijelo mase m giba vertikalno gore akceleracijom a , resultantna sila F_r jednaka je zbroju sile teže G i sile F koja ubrzava tijelo akceleracijom a :

$$F_r = G + F \Rightarrow F_r = m \cdot g + m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (g + a) = 4 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 47.24 \text{ N}.$$

Vježba 285

Kolika sila mora djelovati na tijelo mase 8 kg da bi se ono gibalo vertikalno gore akceleracijom 2 m/s^2 ? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 94.48 N.

Zadatak 286 (Matea, srednja škola)

Tijelo mase 3 kg giba se vertikalno dolje ubrzanjem 12 m/s^2 . Kolika je sila koja osim sile teže djeluje na tijelo? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 286

$$m = 3 \text{ kg}, \quad a = 12 \text{ m/s}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Budući da se tijelo mase m giba vertikalno dolje akceleracijom a , rezultantna sila F_r jednaka je zbroju sile teže G i nepoznate sile F :

$$\left. \begin{array}{l} F_r = m \cdot a \\ F_r = G + F \end{array} \right\} \Rightarrow G + F = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot a - G \Rightarrow F = m \cdot a - m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m \cdot (a - g) = 3 \text{ kg} \cdot \left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 6.57 \text{ N}.$$

Vježba 286

Tijelo mase 6 kg giba se vertikalno dolje ubrzanjem 12 m/s^2 . Kolika je sila koja osim sile teže djeluje na tijelo? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 13.14 N.

Zadatak 287 (Jelena, gimnazija)

Zrakoplov leti po pravcu konstantnom brzinom na stalnoj visini od 1000 m nad horizontalnim tlom i ispusti predmet. Kolika je udaljenost zrakoplova od predmeta u trenutku kad predmet udari u tlo?

Rješenje 287

$$h_1 = 1000 \text{ m}, \quad v_0 = \text{const.}, \quad h_2 = ?$$

Tijelo se složeno giba kad istodobno obavlja dva ili više gibanja. Pri takvom gibanju vrijedi načelo neovisnosti gibanja koje glasi:

Kad tijelo istodobno obavlja dva gibanja, giba se tako da se u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi stiglo kad bi obavilo samo jedno gibanje u određenom vremenskom razmaku, a neovisno o tom gibanju istodobno i drugo gibanje u istome vremenskom razmaku.

Horizontalni hitac je gibanje što se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Za vrijeme t tijelo je prešlo put

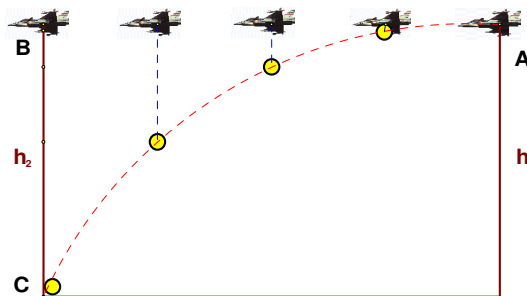
$$x = v_0 \cdot t,$$

a u vertikalnom je smjeru palo za

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Neka je t vrijeme za koje predmet, ispušten iz zrakoplova, udari u tlo. Zbog načela neovisnosti iz slike možemo zaključiti da će za vrijeme t zrakoplov, gibajući se u horizontalnom smjeru stalnom brzinom v_0 , doći u točku B. On će biti točno iznad mjesta pada predmeta, dakle, udaljen 1000 m.

$$h_2 = 1000 \text{ m.}$$



(Jelena je zadatak poslala, ali i sama predložila rješenje)

Vježba 287

Zrakoplov leti po pravcu konstantnom brzinom na stalnoj visini od 1500 m nad horizontalnim tlom i ispusti predmet. Kolika je udaljenost zrakoplova od predmeta u trenutku kad predmet udari u tlo?

Rezultat: 1500 m.

Zadatak 288 (Ana, gimnazija)

Iz helikoptera koji se nalazi 200 m iznad Zemlje ispustimo teret. Za koje će on vrijeme pasti na Zemlju:

- ako helikopter miruje u zraku
- ako se helikopter giba horizontalno brzinom 5 m/s? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 288

$$h = 200 \text{ m, } v_0 = 5 \text{ m/s, } g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t_1 = ?, \quad t_2 = ?$$

Tijelo se složeno giba kad istodobno obavlja dva ili više gibanja. Pri takvom gibanju vrijedi načelo neovisnosti gibanja koje glasi:

Kad tijelo istodobno obavlja dva gibanja, giba se tako da se u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi stiglo kad bi obavilo samo jedno gibanje u određenom vremenskom razmaku, a neovisno o tom gibanju istodobno i drugo gibanje u istome vremenskom razmaku.

Horizontalni hitac je gibanje što se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Za vrijeme t tijelo je prešlo put

$$x = v_0 \cdot t,$$

a u vertikalnom je smjeru palo za

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Slobodan pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje za koje vrijedi identičan izrazi (samo se umjesto puta s piše visina h , umjesto akceleracije a piše akceleracija slobodnog pada g):

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

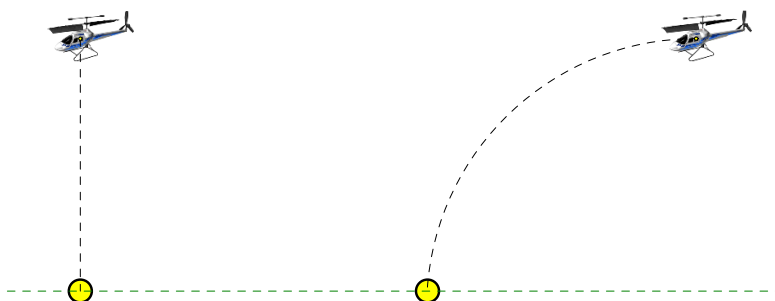
gdje je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ akceleracija slobodnog pada.

a) Budući da helikopter miruje, teret slobodno pada pa vrijeme pada iznosi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \cdot \frac{2}{g} \Rightarrow t_1^2 = \frac{2 \cdot h}{g} \Rightarrow t_1^2 = \frac{2 \cdot h}{g} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 6.4 \text{ s.}$$

b) Budući da se helikopter giba horizontalno stalnom brzinom v_0 i ispušteni teret ima tu početnu brzinu pa je riječ o horizontalnom hicu. Zbog načela neovisnosti možemo zaključiti da je vrijeme pada tereta jednako vremenu za koje bi teret pao gibajući se jednoliko ubrzano vertikalno prema dolje zbog sile teže (slobodan pad).

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \cdot \frac{2}{g} \Rightarrow t_2^2 = \frac{2 \cdot h}{g} \Rightarrow t_2^2 = \frac{2 \cdot h}{g} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 6.4 \text{ s.}$$



Vježba 288

Iz helikoptera koji se nalazi 800 m iznad Zemlje ispuštimo teret. Za koje će on vrijeme pasti na Zemlju:

- ako helikopter miruje u zraku
- ako se helikopter giba horizontalno brzinom 5 m/s? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: a) 12.8 s , b) 12.8 s.

Zadatak 289 (Hrvoje, srednja škola)

Dvije su lopte bačene istodobno vertikalno prema gore. Prva ima početnu brzinu 20 m/s, a druga 24 m/s. Kolika je udaljenost između njih kada je prva lopta na maksimalnoj visini? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 289

$$v_1 = 20 \text{ m/s}, \quad v_2 = 24 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta h = ?$$

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato su mu brzina v i put s u času kad je prošlo vrijeme t dani ovim izrazima:

$$v = v_0 - g \cdot t, \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Najviši domet H što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je $v = 0$. Onda je

$$t = \frac{v_0}{g}, \quad H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

Najviši domet H_1 prve lopte iznosi:

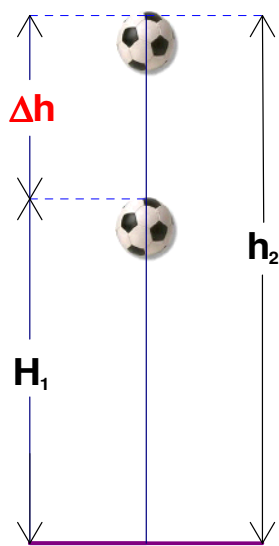
$$H = \frac{v_1^2}{2 \cdot g},$$

a vrijeme za koje lopta stigne do najviše točke je

$$t = \frac{v_1}{g}.$$

Za isto vrijeme t druga lopta prevali put (visinu) h_2 :

$$h_2 = v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h_2 = v_2 \cdot \frac{v_1}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_1}{g}\right)^2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_1 \cdot v_2}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_1^2}{g^2} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow h_2 = \frac{v_1 \cdot v_2}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_1^2}{g^2} \Rightarrow h_2 = \frac{v_1 \cdot v_2}{g} - \frac{v_1^2}{2 \cdot g}$$

Udaljenost između lopti, kada je prva lopta na maksimalnoj visini, jednaka je razlici visina h_2 i H_1 :

$$\Delta h = h_2 - H_1 \Rightarrow \Delta h = \frac{v_1 \cdot v_2}{g} - \frac{v_1^2}{2 \cdot g} - \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \Delta h = \frac{v_1 \cdot v_2}{g} - 2 \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{v_1 \cdot v_2}{g} - 2 \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \Delta h = \frac{v_1 \cdot v_2}{g} - \frac{v_1^2}{g} \Rightarrow \Delta h = \frac{v_1}{g} \cdot (v_2 - v_1) =$$

$$= \frac{20 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \cdot \left(24 \frac{m}{s} - 20 \frac{m}{s} \right) = 8.15 \text{ m.}$$

Vježba 289

Dvije su lopte bačene istodobno vertikalno prema gore. Prva ima početnu brzinu 72 km/h, a druga 86.4 km/h. Kolika je udaljenost između njih kada je prva lopta na maksimalnoj visini?

Rezultat: 8.15 m.

Zadatak 290 (Iva, srednja škola)

Predmet miruje na horizontalnoj podlozi. Nakon što je dobio udarac u horizontalnom smjeru giba se 8 s i zaustavi 32 m daleko od početnog položaja. Koliki je koeficijent trenja između predmeta i podloge? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 290

$$t = 8 \text{ s}, \quad s = 32 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Ako se tijelo nalazi na vodoravnoj podlozi, tada trenje iznosi

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, m masa tijela, g akceleracija slobodnog pada (ubrzanje sile teže). Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t,$$

gdje su s i v put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t . Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje vrijede iste formule.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

1. inačica

Najmanje trenje F_{tr} između horizontalne podloge i predmeta treba biti toliko da svlada horizontalnu silu F koja je djelovala na predmet, tj.

$$F_{tr} = F \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{a}{g}.$$

Koeficijent trenja μ između predmeta i podloge iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \frac{a}{g} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu = \frac{a}{g} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \cdot \frac{2}{t^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu = \frac{a}{g} \\ a = \frac{2 \cdot s}{t^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot s}{g \cdot t^2} \Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot s}{g \cdot t^2} = \frac{2 \cdot 32 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (8 \text{ s})^2} = 0.102.$$

2. inačica

Budući da je rad sile trenja W_{tr} , koji je obavljen da bi se predmet zaustavio na podlozi, jednak promjeni kinetičke energije E_k predmeta, slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} W_{tr} = E_k \\ s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{tr} \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \cdot \frac{2}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v = \frac{2 \cdot s}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2 \cdot s}{t} \right)^2 \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4 \cdot s^2}{t^2} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4 \cdot s^2}{t^2} \cdot \frac{1}{m \cdot g \cdot s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot s}{g \cdot t^2} = \frac{2 \cdot 32 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (8 \text{ s})^2} = 0.102.$$

Vježba 290

Predmet miruje na horizontalnoj podlozi. Nakon što je dobio udarac u horizontalnom smjeru giba se 16 s i zaustavi 128 m daleko od početnog položaja. Koliki je koeficijent trenja između predmeta i podloge? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.102.

Zadatak 291 (Nea, srednja škola)

Most je visok 30 m. Kamen koji smo bacili s mosta vertikalno prema dolje pao je u rijeku za 2 sekunde. Kolikom brzinom smo bacili kamen? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 291

$$h = 30 \text{ m}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo stalnom brzinom v za vrijeme t .

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Slobodan pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje za koje vrijedi identičan izraz (samo se umjesto puta s piše visina h , umjesto akceleracije a piše akceleracija slobodnog pada g):

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ akceleracija slobodnog pada.

Vertikalni hitac prema dolje je složeno gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja prema dolje brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato je visina h tijela u času kad je prošlo vrijeme t dana ovim izrazom:

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$



Brzina v_0 kojom smo kamen bacili s mosta iznosi:

$$\begin{aligned} h &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \cdot / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot h = 2 \cdot v_0 \cdot t + g \cdot t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t &= 2 \cdot h - g \cdot t^2 \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t = 2 \cdot h - g \cdot t^2 \cdot / \cdot \frac{1}{2 \cdot t} \Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot h - g \cdot t^2}{2 \cdot t} = \\ &= \frac{2 \cdot 30 \text{ m} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2}{2 \cdot 2 \text{ s}} = 5.19 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Vježba 291

Most je visok 60 m. Kamen koji smo bacili s mosta vertikalno prema dolje pao je u rijeku za 2 sekunde. Kolikom brzinom smo bacili kamen? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 20.19 m/s.

Zadatak 292 (Nea, srednja škola)

Helikopter se giba u horizontalnom smjeru brzinom od 10 m/s i ispusti tijelo. Tijelo je palo na tlo 50 m u horizontalnom smjeru od mjesta ispuštanja. Kolika je visina letenja helikoptera? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

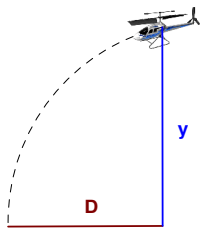
Rješenje 292

$$v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad D = 50 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad y = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Za vrijeme t tijelo je prošlo put

$$x = v_0 \cdot t,$$



a u vertikalnom je smjeru palo za

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Domet D horizontalnog hica, ako je zadana početna brzina v_0 i visina y , iznosi:

$$D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot y}{g}}.$$

Visina y letenja helikoptera iznosi:

$$D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot y}{g}} \Rightarrow D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot y}{g}} \cdot \frac{1}{v_0} \Rightarrow \frac{D}{v_0} = \sqrt{\frac{2 \cdot y}{g}} \cdot \frac{1}{v_0} \Rightarrow \left(\frac{D}{v_0}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2 \cdot y}{g}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{D}{v_0}\right)^2 = \frac{2 \cdot y}{g} \Rightarrow \left(\frac{D}{v_0}\right)^2 = \frac{2 \cdot y}{g} \cdot \frac{g}{2} \Rightarrow y = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{D}{v_0}\right)^2 = \frac{9.81 \frac{m}{s^2}}{2} \cdot \left(\frac{50 \frac{m}}{10 \frac{m}{s}}\right)^2 = 122.63 \text{ m}.$$

Vježba 292

Helikopter se giba u horizontalnom smjeru brzinom od 12 m/s i ispusti tijelo. Tijelo je palo na tlo 60 m u horizontalnom smjeru od mjesta ispuštanja. Kolika je visina letenja helikoptera? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 122.63 m.

Zadatak 293 (Emilio, gimnazija)

Na tijelo mase 5 kg djeluje jedna sila od 3 N i jedna sila od 4 N, a smjerovi su im pod kutom od 60° . Koliku će brzinu imati tijelo nakon 2 s?

Rješenje 293

$$m = 5 \text{ kg}, \quad F_1 = 3 \text{ N}, \quad F_2 = 4 \text{ N}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad t = 2 \text{ s}, \quad v = ?$$



Paralelogram je trapez kojemu su suprotne stranice usporedne. Unutarnji kutovi uz jednu stranicu paralelograma su suplementni, tj.

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Poučak o kosinusima (kosinusov poučak)

Za trokut ABC vrijedi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

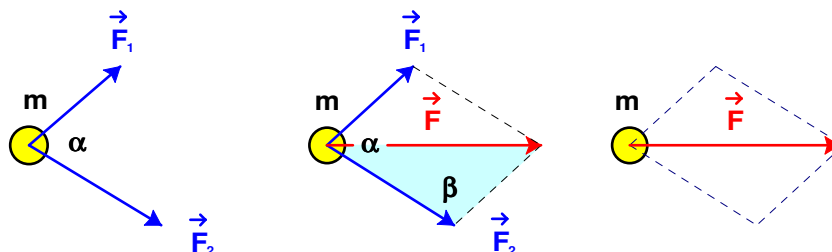
Drugi Newtonov zakon: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .



Kut β iznosi:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \beta = 180^\circ - 60^\circ \Rightarrow \beta = 120^\circ.$$

Rezultantna sila F dobije se po pravilu paralelograma sila. Budući da sile F_1 i F_2 imaju isti početak, konstruirat ćemo paralelogram čije stranice čine te sile. Zbroj ili rezultanta F bit će dijagonala paralelograma koja ima isti početak kao i zadane sile F_1 i F_2 .

Iznos rezultantne sile F izračunamo pomoću kosinusovog poučka. Uočimo trokut sa stranicama F_1 i F_2 te kutom β između njih.

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta \Rightarrow F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta} = \sqrt{(3 \text{ N})^2 + (4 \text{ N})^2 - 2 \cdot 3 \text{ N} \cdot 4 \text{ N} \cdot \cos 120^\circ} = 6.08 \text{ N}.$$

Nakon vremena t brzina tijela iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ a = \frac{v}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow F = m \cdot \frac{v}{t} \Rightarrow F = m \cdot \frac{v}{t} \quad / \cdot \frac{t}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{F \cdot t}{m} = \frac{6.08 \text{ N} \cdot 2 \text{ s}}{5 \text{ kg}} = 2.43 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 293

Na tijelo mase 10 kg djeluje jedna sila od 3 N i jedna sila od 4 N, a smjerovi su im pod kutom od 60° . Koliku će brzinu imati tijelo nakon 4 s?

Rezultat: 2.43 m/s.

Zadatak 294 (Vedran, gimnazija)

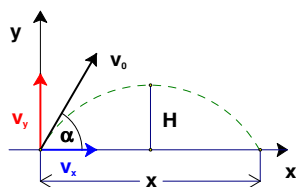
Dva tijela bačena su istodobno iz jedne točke na zemlji, i to jedno – okomito uvis, drugo – pod kutom $\alpha = 45^\circ$ prema horizontu. Njihove početne brzine su jednake i iznose $v_0 = 30 \text{ m/s}$. Kolika je udaljenost između tijela poslije vremena $t = 2 \text{ s}$ od trenutka kada su bačena? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 294

$$\alpha = 45^\circ, \quad v_0 = 30 \text{ m/s}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad d = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada. Izrazi za komponente puta u smjerovima koordinatnih osi x i y su:



$$\text{komponente puta} \quad \begin{cases} x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \\ y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Vertikalni hitac uvis je složeno gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato je visina h tijela u času kad je prošlo vrijeme t dana ovim izrazom:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Udaljenost točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Računamo položaje prvog i drugog tijela u koordinatnom sustavu xOy poslije vremena t .

- Koordinate prvog tijela (vertikalni hitac uvis) poslije vremena t jesu:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 30 \frac{m}{s} \cdot 2 s - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (2 s)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 m \\ y_1 = 40.38 m \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_1(x_1, y_1) = T_1(0, 40.38).$$

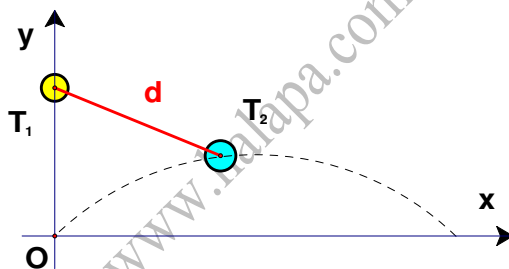
- Koordinate drugog tijela (kosi hitac) poslije vremena t jesu:

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \\ y_2 = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_2 = 30 \frac{m}{s} \cdot 2 s \cdot \cos 45^0 \\ y_2 = 30 \frac{m}{s} \cdot 2 s \cdot \sin 45^0 - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (2 s)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_2 = 42.43 m \\ y_2 = 22.81 m \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_2(x_2, y_2) = T_2(42.43, 22.81).$$

Udaljenost prvog i drugog tijela poslije vremena t iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} T_1(x_1, y_1) = T_1(0, 40.38) \\ T_2(x_2, y_2) = T_2(42.43, 22.81) \end{array} \right\} \Rightarrow d = |T_1 T_2| = \sqrt{(42.43 - 0)^2 + (22.81 - 40.38)^2} = 45.92 m.$$

$$d = |T_1 T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Vježba 294

Dva tijela bačena su istodobno iz jedne točke na zemlji, i to jedno – okomito uvis, drugo – pod kutom $\alpha = 45^\circ$ prema horizontu. Njihove početne brzine su jednake i iznose $v_0 = 108 \text{ km/h}$. Kolika je udaljenost između tijela poslije vremena $t = 2 \text{ s}$ od trenutka kada su bačena? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 45.92 m.

Zadatak 295 (Emilio, gimnazija)

Koji priklon ima ravnina prema horizontalnoj ravnini ako kuglica koja se kotrlja niz nju treba pet puta više vremena nego kad bi padala niz visinu te kosine?

Rješenje 295

$$t_1 = 5 \cdot t_2, \quad \alpha = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}},$$

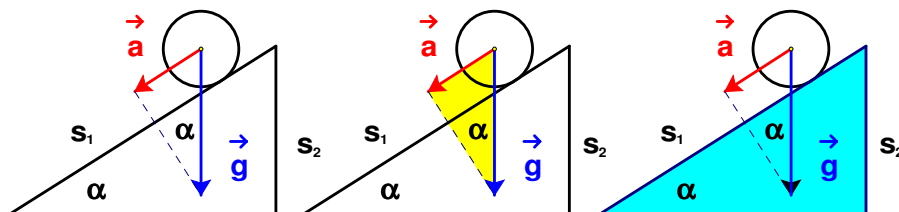
gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Slobodan pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje za koje vrijedi identičan izraz (samo se umjesto puta s piše visina h, umjesto akceleracije a piše akceleracija slobodnog pada g):

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ akceleracija slobodnog pada.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.



Sa slika vidi se da akceleracija a duž kosine (uočimo pravokutan trokut sa katetom a i hipotenuzom g) iznosi:

$$\sin \alpha = \frac{a}{g} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{g} / \cdot g \Rightarrow a = g \cdot \sin \alpha.$$

Također za putove s_1 i s_2 (uočimo pravokutan trokut sa katetom s_2 i hipotenuzom s_1) vrijedi:

$$\sin \alpha = \frac{s_2}{s_1} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{s_2}{s_1} / \cdot s_1 \Rightarrow s_2 = s_1 \cdot \sin \alpha.$$

Računamo vrijeme t_1 za koje se kuglica kotrlja akceleracijom a niz kosinu.

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{a}}.$$

Računamo vrijeme t_2 za koje kuglica pada niz visinu kosine.

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_2}{g}}.$$

Zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$\begin{aligned} t_1 &= 5 \cdot t_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{a}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s_2}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{a}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s_2}{g}} / \cdot 2 \Rightarrow \frac{2 \cdot s_1}{a} = 25 \cdot \frac{2 \cdot s_2}{g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2 \cdot s_1}{g \cdot \sin \alpha} = 25 \cdot \frac{2 \cdot s_1 \cdot \sin \alpha}{g} \Rightarrow \frac{2 \cdot s_1}{g \cdot \sin \alpha} = 25 \cdot \frac{2 \cdot s_1 \cdot \sin \alpha}{g} / \cdot \frac{g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot s_1 \cdot 25} \Rightarrow \frac{1}{25} = \sin^2 \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{25} / \sqrt{\quad} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{25}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \alpha = 11^\circ 32' 13.1". \end{aligned}$$

Vježba 295

Koji priklon ima ravnina prema horizontalnoj ravnini ako kuglica koja se kotrlja niz nju treba četiri puta više vremena nego kad bi padala niz visinu te kosine?

Rezultat: $14^\circ 28' 39"$.

Zadatak 296 (Ana, gimnazija)

Za vrijeme jednolikog pravocrtnog gibanja vlaka odvoji se zadnji vagon koji se nastavi gibati jednoliko usporeno. Ako je vagon od trenutka odvajanja do trenutka zaustavljanja prešao put s , koliki je put za to vrijeme prešao vlak gibajući se i dalje istom brzinom v_0 koju je imao i prije odvajanja vagona?

Rješenje 296

$$s, \quad v_0, \quad s_1 = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo stalnom brzinom v za vrijeme t .

Jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t. Za jednoliko usporeno gibanje vrijedi isti izraz.

Neka je t vrijeme za koje se odvojeni vagon, gibajući se jednoliko usporeno, zaustavi. Njegov prevaljeni put s je

$$s = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t.$$

Za isto vrijeme t vlak će prevaliti, gibajući se jednoliko pravocrtno, put s_1 koji iznosi:

$$s_1 = v_0 \cdot t.$$

Računamo put s_1 .

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t \\ s_1 = v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t \cdot 2 \\ s_1 = v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot s = v_0 \cdot t \\ s_1 = v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow s_1 = 2 \cdot s.$$

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t \\ s_1 = v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t \\ s_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t \\ s_1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow s_1 = 2 \cdot s.$$

3. inačica

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t \\ s_1 = v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{s_1}{s} = \frac{v_0 \cdot t}{\frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t} \Rightarrow \frac{s_1}{s} = \frac{v_0 \cdot t}{\frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t} \Rightarrow \frac{s_1}{s} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{s_1}{s} = 2 \cdot s \Rightarrow s_1 = 2 \cdot s.$$

Vlak će za isto vrijeme prevaliti dva puta dulji nego odvojeni vagon.



Vježba 296

Za vrijeme jednolikog pravocrtnog gibanja vlaka odvoji se zadnji vagon koji se nastavi gibati jednoliko usporeno. Ako je vagon od trenutka odvajanja do trenutka zaustavljanja prešao put $2 \cdot s$, koliki je put za to vrijeme prešao vlak gibajući se i dalje istom brzinom v_0 koju je imao i prije odvajanja vagona?

Rezultat: $4 \cdot s$.

Zadatak 297 (Ana, gimnazija)

Gibajući se brzinom 20 m/s automobil se zaustavi nakon 0.5 s.

- Kolika je akceleracija automobila?
- Koliki će put prevaliti automobil za to vrijeme?
- Nacrtaj v, t – dijagram.

Rješenje 297

$$v_1 = 20 \text{ m/s}, \quad v_2 = 0 \text{ m/s}, \quad \Delta t = 0.5 \text{ s}, \quad a = ?, \quad s = ?, \quad \text{graf}$$

Akceleracija je vektorska veličina (ima iznos i smjer). Akceleracija opisuje promjenu brzine u jedinici vremena (u 1 sekundi).

Srednja akceleracija:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad , \quad a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} ,$$

gdje su v_1 početna brzina gibanja, v_2 konačna brzina gibanja.

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje jest gibanje stalnim ubrzanjem (akceleracijom).

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 i usporava (ima negativnu akceleraciju), vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 .$$

Kada se tijelo giba pravocrtno, vrijedi:

- akceleracija pozitivna , $a > 0 \Rightarrow$ tijelo ubrzava
- akceleracija negativna , $a < 0 \Rightarrow$ tijelo usporava

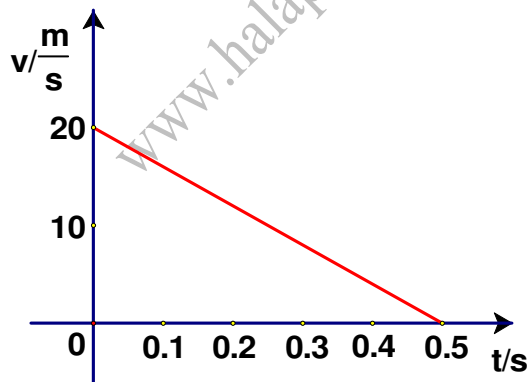
a) Akceleracija a automobila iznosi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{0 \frac{m}{s} - 20 \frac{m}{s}}{0.5 s} = -40 \frac{m}{s^2} . \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{akceleracija negativna,} \\ \text{automobil usporava} \end{array} \right.$$

b) Računamo put s koji automobil prevali za vrijeme Δt gibajući se jednoliko usporeno. Za akceleraciju uzimamo apsolutnu vrijednost.

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = v_1 = 20 \frac{m}{s} , \quad \Delta t = 0.5 s , \quad a = 40 \frac{m}{s^2} \\ s = v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s = 20 \frac{m}{s} \cdot 0.5 s - \frac{1}{2} \cdot 40 \frac{m}{s^2} \cdot (0.5 s)^2 = 5 m .$$

c) Crtamo v , t – graf. U početnom trenutku brzina automobila iznosi v_1 , a zatim se jednoliko smanjuje i poslije vremena Δt brzina je jednaka nuli.



Vježba 297

Gibajući se brzinom 20 m/s automobil se zaustavi nakon 2 s. Kolika je akceleracija automobila?

Rezultat: 10 m/s².

Zadatak 298 (Mario, gimnazija)

Automobil jednoliko ubrzava od 60 km/h do 120 km/h za vrijeme 10 s.

- Kolikom akceleracijom je ubrzavao automobil?
- Kolika mu je brzina nakon 4 s ubrzavanja?
- Koliki je put prešao automobil nakon 5 s ubrzavanja?

Rješenje 298

$$v_1 = 60 \text{ km/h} = [60 : 3.6] = 16.67 \text{ m/s}, \quad v_2 = 120 \text{ km/h} = [120 : 3.6] = 33.33 \text{ m/s},$$

$$\Delta t = 10 \text{ s}, \quad t_1 = 4 \text{ s}, \quad t_2 = 5 \text{ s}, \quad a = ?, \quad v = ?, \quad s = ?$$

Akceleracija je vektorska veličina (ima iznos i smjer). Akceleracija opisuje promjenu brzine u jedinici

vremena (u 1 sekundi). Srednja akceleracija:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t},$$

gdje su v_1 početna brzina gibanja, v_2 konačna brzina gibanja.

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje jest gibanje stalnim ubrzanjem (akceleracijom).

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 i ubrzava, vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Kada se tijelo giba pravocrtno, vrijedi:

- akceleracija pozitivna , $a > 0 \Rightarrow$ tijelo ubrzava
- akceleracija negativna , $a < 0 \Rightarrow$ tijelo usporava

a) Akceleracija a automobila iznosi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{33.33 \frac{m}{s} - 16.67 \frac{m}{s}}{10 s} = 1.67 \frac{m}{s^2}.$$

b) Nakon vremena t_1 brzina automobila v iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = v_1 = 16.67 \frac{m}{s}, \quad t_1 = 4 s, \quad a = 1.67 \frac{m}{s^2} \\ v = v_0 + a \cdot t_1 \end{array} \right\} \Rightarrow v = 16.67 \frac{m}{s} + 1.67 \frac{m}{s^2} \cdot 4 s = 23.35 \frac{m}{s} = [23.35 \cdot 3.6] = 84.06 \frac{km}{h}.$$

c) Nakon vremena t_2 automobil je prešao put s :

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = v_1 = 16.67 \frac{m}{s}, \quad t_2 = 5 s, \quad a = 1.67 \frac{m}{s^2} \\ s = v_0 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s = 16.67 \frac{m}{s} \cdot 5 s + \frac{1}{2} \cdot 1.67 \frac{m}{s^2} \cdot (5 s)^2 = 104.23 m.$$

Vježba 298

Automobil jednoliko ubrzava od 120 km/h do 240 km/h za vrijeme 20 s. Kolikom akceleracijom je ubrzavao automobil?

Rezultat: 1.67 m/s^2 .

Zadatak 299 (Mario, gimnazija)

Automobil se giba tako da mu se brzina povećava od 54 km/h na 108 km/h za 10 s.

a) Kolika je akceleracija automobila?

b) Nacrtajte v, t – graf gibanja automobila i iz grafa odredite put koji je automobil prešao za tih 10 sekundi.

Rješenje 299

$$v_1 = 54 \text{ km/h} = [54 : 3.6] = 15 \text{ m/s}, \quad v_2 = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}, \quad \Delta t = 10 \text{ s}, \\ a = ?, \quad s = ?$$

Akceleracija je vektorska veličina (ima iznos i smjer). Akceleracija opisuje promjenu brzine u jedinici vremena (u 1 sekundi). Srednja akceleracija:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t},$$

gdje su v_1 početna brzina gibanja, v_2 konačna brzina gibanja.

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje jest gibanje stalnim ubrzanjem (akceleracijom).

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 i ubrzava, vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Kada se tijelo giba pravocrtno, vrijedi:

- akceleracija pozitivna , $a > 0 \Rightarrow$ tijelo ubrzava
- akceleracija negativna , $a < 0 \Rightarrow$ tijelo usporava

a) Akceleracija a automobila iznosi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{30 \frac{m}{s} - 15 \frac{m}{s}}{10 s} = 1.5 \frac{m}{s^2}.$$

b) Crtamo v, t – graf. U početnom trenutku brzina automobila iznosi v_1 , a zatim se jednoliko povećava i poslije vremena Δt brzina je jednaka v_2 .

Pomoću v, t – dijagrama predočavamo ovisnost brzine o vremenu. Budući da je brzina u svakom času upravo razmjerna vremenu, a faktor razmjernosti je akceleracija a , brzina je linearna funkcija vremena pa će grafički prikaz biti pravac kroz ishodište (ako je tijelo u početku mirovalo) čiji će nagib ovisiti o veličini akceleracije.

Put je u v, t – dijagramu predöčen površinom ispod krivulje $v(t)$. Termin "površina ispod krivulje" nije ploština plohe u uobičajenom prostoru i ne iskazuje se četvornim metrom.

Prisjetimo se:

- površina pravokutnog trokuta jednaka je polovici produkta osnovice i visine:

$$P = \frac{a \cdot v}{2}.$$

- površina pravokutnika jednaka je produktu osnovice i visine:

$$P = a \cdot b.$$

- površina trapeza jednaka je polovici produkta zbroja donje i gornje osnovice i visine:

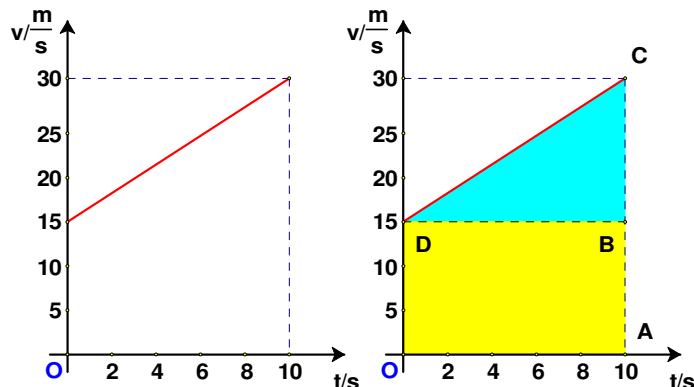
$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v.$$

Najprije pogledajmo koje su veličine naznačene za koordinatne osi.

Vidimo da je riječ o vremenu t iskazanom sekundama t/s i brzini v iskazanoj metrima u sekundi $v/m/s$.

To znači da dijagram prikazuje promjenu brzine nekog gibanja.

Put možemo odrediti pomoću površine što je graf zatvara s osi t .

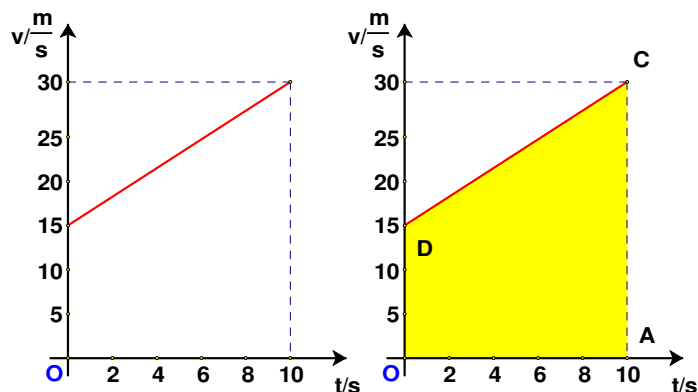


1. inačica

Uočimo da se u prvih 10 sekundi brzina jednoliko mijenja od 15 m/s do 30 m/s.

Put ćemo izračunati iz izraza za površinu pravokutnog trokuta (plava boja) i izraza za površinu pravokutnika (žuta boja):

$$s = P_{DBC} + P_{OABD} \Rightarrow s = \frac{|DB| \cdot |BC|}{2} + |OA| \cdot |AB| \Rightarrow s = \frac{10 \cdot 15}{2} + 10 \cdot 15 \Rightarrow s = 225 m.$$



2. inačica

Uočimo da se u prvih 10 sekundi brzina jednoliko mijenja od 15 m/s do 30 m/s. Put ćemo izračunati iz izraza za površinu trapeza (žuta boja):

$$s = P_{OACD} \Rightarrow s = \frac{|AC| + |OD|}{2} \cdot |OA| \Rightarrow s = \frac{30 + 15}{2} \cdot 10 \Rightarrow s = 225 \text{ m.}$$

Vježba 299

Automobil se giba tako da mu se brzina povećava od 108 km/h na 216 km/h za 20 s. Kolika je akceleracija automobila?

Rezultat: 1.5 m/s².

Zadatak 300 (Josipa, srednja škola)

Kolika je akceleracija tijela koje jednoliko ubrzava od 10 m/s na 20 m/s na putu od 300 m?

Rješenje 300

$$v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad v = 20 \text{ m/s}, \quad s = 300, \quad a = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Kada tijelo već ima početnu brzinu v₀, pa se počne jednoliko ubrzavati, trenutna brzina v iznosi:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s.$$

Akceleracija a tijela na putu s iznosi:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \cdot \frac{1}{2 \cdot s} \Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot s} = a \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot s} = \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 300 \text{ m}} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Vježba 300

Kolika je akceleracija tijela koje jednoliko ubrzava od 10 m/s na 20 m/s na putu od 150 m?

Rezultat: 1 m/s².