

### Zadatak 201 (Matko, gimnazija)

Automobil vozi brzinom 72 km/h. Na kojoj najmanjoj udaljenosti ispred zebre (pješačkog prijelaza) mora početi kočiti da bi se pred njom zaustavio? Faktor trenja kotača s cestom jest 0.4 ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

### Rješenje 201

$$v = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad \mu = 0.4, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$$

gdje su s i v put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$



#### 1. inačica

Pri kočenju se automobil giba jednoliko usporeno (s negativnom akceleracijom). Zbog jednostavnosti (da izbjegnemo predznak minus kod akceleracije) možemo napraviti "obrat" zadatka. Pretpostavimo da je automobil u početku mirovao, a na kraju puta postigao brzinu 72 km/h. Budući da se automobil jednoliko zaustavlja, sila kočenja mora biti jednaka sili trenja. Sila na podlogu jednaka je težini automobila jer je put horizontalan.

U slučaju trenja jednadžba gibanja automobila glasi:

$$\begin{aligned} F = F_{tr} &\Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot s} = \mu \cdot m \cdot g \quad | \cdot \frac{2 \cdot s}{m} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot s \cdot \mu \cdot g \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \\ &= \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.4 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 50 \text{ m}. \end{aligned}$$

#### 2. inačica

Promjena kinetičke energije automobila jednaka je obavljenom radu sile trenja prilikom kočenja na

putu s:

$$\Delta E_k = W_{tr} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = F_{tr} \cdot s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \mu \cdot G \cdot s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s \quad / \cdot \frac{1}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(20 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0.4 \cdot 10 \frac{m}{s^2}} = 50 \text{ m.}$$

### Vježba 201

Automobil vozi brzinom 144 km/h. Na kojoj najmanjoj udaljenosti ispred zebre (pješačkog prijelaza) mora početi kočiti da bi se pred njom zaustavio? Faktor trenja kotača s cestom jest 0.4 ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

**Rezultat:** 200 m.

### Zadatak 202 (Matko, gimnazija)

Automobil vozi brzinom 72 km/h. Koliko dugo traje zaustavljanje prilikom kočenja? Faktor trenja kotača s cestom jest 0.4 ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

### Rješenje 202

$$v = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad \mu = 0.4, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t \Rightarrow a = \frac{v}{t}$$

gdje je  $v$  brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Ako je početna brzina nula, za tijelo mase  $m$  na koje je za vrijeme  $t$  djelovala sila  $F$  vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je  $v$  brzina na kraju vremenskog intervala  $t$  za koji je sila djelovala. Umnožak

$$I = F \cdot t$$

zovemo impulsom sile  $F$ , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase  $m$ .

1. inačica

Pri kočenju se automobil giba jednoliko usporeno ( $s$  negativnom akceleracijom). Zbog jednostavnosti (da izbjegnemo predznak minus kod akceleracije) možemo napraviti "obrat" zadatka. Pretpostavimo da je automobil u početku mirovao, a na kraju puta postigao brzinu 72 km/h. Budući da se automobil jednoliko zaustavlja, sila kočenja mora biti jednaka sili trenja. Sila na podlogu jednaka je težini automobila jer je put horizontalan.

U slučaju trenja jednadžba gibanja automobila glasi:

$$F = F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot G \Rightarrow m \cdot \frac{v}{t} = \mu \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{t}{m} \Rightarrow v = \mu \cdot g \cdot t \Rightarrow t = \frac{v}{\mu \cdot g} =$$

$$= \frac{20 \frac{m}{s}}{0.4 \cdot 10 \frac{m}{s^2}} = 5 \text{ s.}$$



**t = ?**



2. inačica

Budući da za tijelo mase  $m$  na koje je za vrijeme  $t$  djelovala sila trenja  $F_{tr}$  vrijedi:

$$F_{tr} \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je  $v$  brzina na kraju vremenskog intervala  $t$  za koji je sila djelovala, slijedi:

$$F_{tr} \cdot t = m \cdot v \Rightarrow \mu \cdot G \cdot t = m \cdot v \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot t = m \cdot v \quad / \cdot \frac{1}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow t = \frac{v}{\mu \cdot g} = \frac{20 \frac{m}{s}}{0.4 \cdot 10 \frac{m}{s^2}} = 5 \text{ s.}$$

### Vježba 202

Automobil vozi brzinom 144 km/h. Koliko dugo traje zaustavljanje prilikom kočenja? Faktor trenja kotača s cestom jest 0.4 ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

**Rezultat:** 10 s.

### Zadatak 203 (Iva, srednja škola)

Na traktorskoj prikolici nalazi se sanduk mase 1200 kg. Kolikom najvećom akceleracijom traktor smije krenuti bez opasnosti da sanduk ne padne sa prikolice? Koeficijent trenja između sanduka i prikolice je 0.3. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 203

$$m = 1200 \text{ kg}, \quad \mu = 0.3, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$



Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje. Isto tako vrijede i s obzirom na koordinatni sustav koji se giba po pravcu. Ti zakoni, međutim ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se kreće jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase  $m$ , koje postavimo, primjerice, na pod vagona koji ima stalnu akceleraciju  $a$ , neće mirovati s obzirom na vagon, nego će imati akceleraciju  $-a$ . U vagonu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila

$$-m \cdot a.$$

Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Sila trenja između sanduka i prikolice iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Budući da sanduk ne smije kliziti po prikolici, inercijska sila mora po iznosu biti jednaka sili trenja između sanduka i prikolice:

$$F = F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot G \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow a = \mu \cdot g = 0.3 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 2.94 \frac{m}{s^2}.$$

### Vježba 203

Na traktorskoj prikolici nalazi se sanduk mase 1500 kg. Kolikom najvećom akceleracijom traktor smije krenuti bez opasnosti da sanduk ne padne sa prikolice? Koeficijent trenja između sanduka i prikolice je 0.3. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $2.94 \text{ m/s}^2$ .

### Zadatak 204 (Simon, srednja škola)

U sredini ulice, između dviju kuća udaljenih 12 m, na žici dugačkoj 14 m visi svjetiljka mase 5 kg. Kolika je sila napreznja u učvršćenju užeta na kući? Računajte s ubrzanjem sile teže od  $10 \text{ m/s}^2$ . Zanimajte težinu žice.

### Rješenje 204

$$s = 12 \text{ m}, \quad d = 14 \text{ m}, \quad m = 5 \text{ kg}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

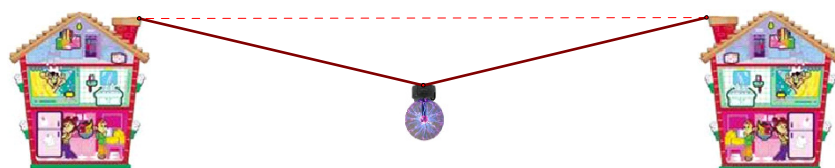
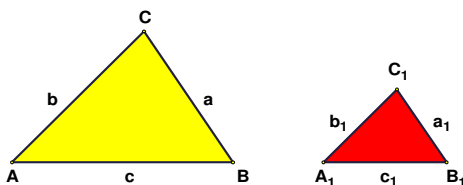
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

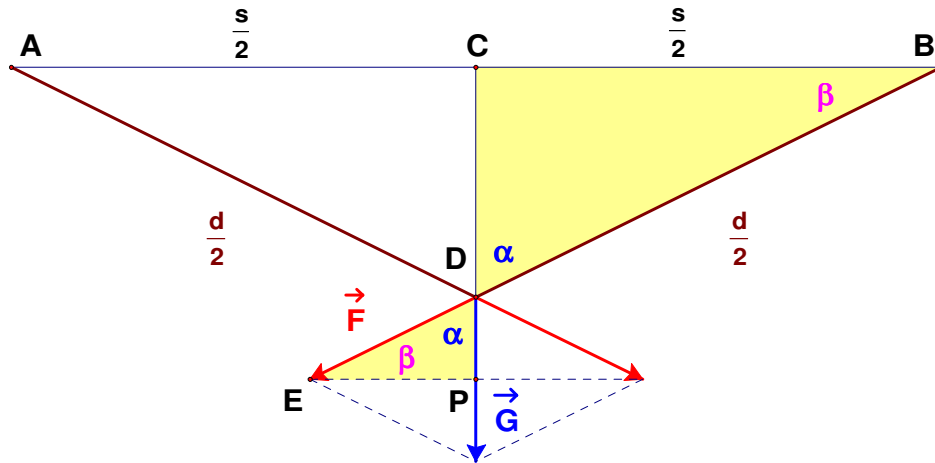
gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Za dva slična trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle A_1B_1C_1$  vrijedi da su im odgovarajuće (homologne) stranice proporcionalne (razmjerne):

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k, \quad k \text{ je koeficijent sličnosti.}$$



Sa slike vidi se:



$$|CB| = \frac{s}{2} = \frac{12 \text{ m}}{2} = 6 \text{ m} \quad , \quad |DB| = \frac{d}{2} = \frac{14 \text{ m}}{2} = 7 \text{ m} \quad , \quad \left. \begin{array}{l} |DP| = \frac{G}{2} \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow |DP| = \frac{m \cdot g}{2} =$$

$$= \frac{5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} = 25 \text{ N} \quad , \quad |DE| = F.$$

Trokut DBC je pravokutan pa vrijedi Pitagorin poučak:

$$|DC|^2 = |DB|^2 - |CB|^2 \Rightarrow |DC| = \sqrt{|DB|^2 - |CB|^2} = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{13} \text{ m}.$$

Uočimo da su pravokutni trokuti  $\triangle DBC$  i  $\triangle DEP$  slični jer imaju iste kutove. To znači da su im odgovarajuće (homologne) stranice proporcionalne. Zbog sličnosti trokuta  $\triangle DBC$  i  $\triangle DEP$  možemo pisati sljedeći razmjer između njihovih stranica:

$$|DE| : |DP| = |DB| : |DC| \Rightarrow |DE| \cdot |DC| = |DP| \cdot |DB| \Rightarrow |DE| = \frac{|DP| \cdot |DB|}{|DC|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{|DP| \cdot |DB|}{|DC|} = \frac{25 \text{ N} \cdot 7 \text{ m}}{\sqrt{13} \text{ m}} = 48.5 \text{ N}.$$

### Vježba 204

U sredini ulice, između dviju kuća udaljenih 120 dm, na žici dugačkoj 140 dm visi svjetiljka mase 500 dag. Kolika je sila naprezanja u učvršćenju užeta na kući? Računajte s ubrzanjem sile teže od  $10 \text{ m/s}^2$ . Zanimarite težinu žice.

**Rezultat:** 48.5 N.

### Zadatak 205 (Viky, gimnazija)

- Duž kosine kojoj je nagib  $32^\circ$  tijelo se uspinje početnom brzinom  $30 \text{ m/s}$ .
- Koliki put prevali tijelo gibajući se prema gore i koliko dugo to traje?
  - Koliko treba tijelu da iz najviše točke na kosini stigne opet dolje? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

### Rješenje 205

$$\alpha = 32^\circ, \quad v_0 = 30 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?, \quad t = ?, \quad t_1 = ?$$

Jednoliko usporeno gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = v_0 - a \cdot t,$$

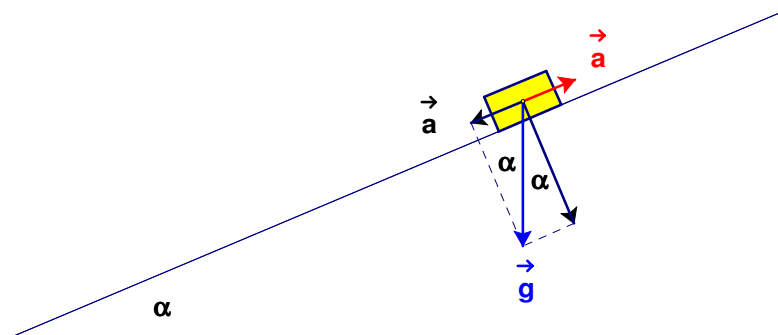
gdje su  $v_0$  i  $v$  početna odnosno konačna brzina za tijelo pošto se gibalo jednoliko usporeno akceleracijom (deceleracijom, retardacijom) a za vrijeme  $t$ .

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

a)



Akceleracija (retardacija, deceleracija) kojom tijelo usporava uz kosinu iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{a}{g} \\ \alpha = 32^{\circ} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 32^{\circ} = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g \cdot \sin 32^{\circ}.$$

Budući da se tijelo uspinje uz kosinu jednoliko usporeno retardacijom, deceleracijom (negativnom akceleracijom) a, vrijeme penjanja iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v = v_0 - a \cdot t \\ v = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = v_0 - a \cdot t \Rightarrow a \cdot t = v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{a} \Rightarrow t = \frac{v_0}{g \cdot \sin 32^{\circ}} = \frac{30 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 32^{\circ}} = 5.77 \text{ s}.$$

Put koji tijelo prevali gibajući se uz kosinu je:

$$\left. \begin{array}{l} a = g \cdot \sin 32^{\circ}, t = \frac{v_0}{a} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = g \cdot \sin 32^{\circ} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = g \cdot \sin 32^{\circ} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{v_0^2}{a^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = g \cdot \sin 32^{\circ} \\ s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g \cdot \sin 32^{\circ}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(30 \frac{m}{s}\right)^2}{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 32^{\circ}} = 86.56 \text{ m}.$$

Ili

$$\left. \begin{array}{l} a = g \cdot \sin 32^{\circ}, t = \frac{v_0}{a} \\ v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = g \cdot \sin 32^{\circ} \\ s = \frac{v_0^2}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g \cdot \sin 32^{\circ}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(30 \frac{m}{s}\right)^2}{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 32^{\circ}} = 86.56 \text{ m}.$$

b)

Vrijeme potrebno da tijelo iz najviše točke na kosini stigne opet dolje jednako je vremenu koje je tijelu trebalo za uspinjanje:

$$t_1 = t \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{a} \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g \cdot \sin 32^\circ} = \frac{30 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 32^\circ} = 5.77 \text{ s.}$$

### Vježba 205

Duž kosine kojoj je nagib  $30^\circ$  tijelo se uspinje početnom brzinom 30 m/s. Koliko dugo traje uspinjanje tijela?

**Rezultat:** 6.12 s.

### Zadatak 206 (Vlado, gimnazija)

Strelica izbačena lukom vertikalno uvis vraća se nakon 20 sekundi. Kolika je bila početna brzina? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

### Rješenje 206

$$t = 20 \text{ s, } g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato mu je brzina  $v$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dana ovim izrazom:

$$v = v_0 - g \cdot t.$$

Za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.

Budući da je vrijeme uspinjanja strelice jednako vremenu pada, slijedi

$$t_0 = \frac{1}{2} \cdot t.$$

Početna brzina  $v_0$  iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v = v_0 - g \cdot t_0, \quad t_0 = \frac{1}{2} \cdot t \\ v = 0 \text{ kad tijelo dosegne najvišu točku} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = v_0 - g \cdot \frac{1}{2} \cdot t \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 20 \text{ s} = 98.1 \frac{m}{s}.$$

### Vježba 206

Strelica izbačena lukom vertikalno uvis vraća se nakon 40 sekundi. Kolika je bila početna brzina? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

**Rezultat:** 196.2 m/s.

### Zadatak 207 (Vlatka, gimnazija)

Do koje se visine digne tijelo koje se, vertikalno bačeno uvis, nakon 20 sekundi vrati na zemlju? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

### Rješenje 207

$$t = 20 \text{ s, } g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato mu je brzina put  $s$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan ovim izrazom:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Najviši domet  $H$  što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put  $u$  času kad je  $v = 0$ . Onda je

$$H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.

Budući da je vrijeme uspinjanja tijela jednako vremenu pada, slijedi

$$t_0 = \frac{1}{2} \cdot t.$$

Tijelo se digne do visine:

$$\left. \begin{array}{l} H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0^2 \\ t_0 = \frac{1}{2} \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t\right)^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot t^2 \Rightarrow H = \frac{1}{8} \cdot g \cdot t^2 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (20 s)^2 = 490.5 m.$$

### Vježba 207

Do koje se visine digne tijelo koje se, vertikalno bačeno uvis, nakon 40 sekundi vrati na zemlju? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

**Rezultat:** 1962 m.

### Zadatak 208 (Iva, gimnazija)

Iz aerostata koji se nalazi na visini 400 m ispadne kamen. Za koje će vrijeme kamen pasti na zemlju:

- ako se aerostat vertikalno diže brzinom 10 m/s,
- ako se aerostat vertikalno spušta brzinom 10 m/s,
- ako aerostat miruje u zraku,
- ako se aerostat kreće horizontalnom brzinom 10 m/s? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )?

### Rješenje 208

$$s = 400 \text{ m}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

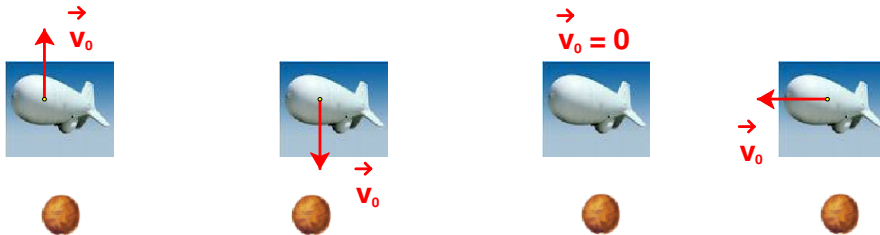
$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}, \quad v = a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v}{a},$$

gdje su  $s$  i  $v$  put odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Za slobodan pad vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}}, \quad v = g \cdot t \Rightarrow t = \frac{v}{g},$$

gdje je  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  akceleracija slobodnog pada.



a) Ako se aerostat vertikalno diže brzinom  $v_0$  vrijeme za koje će kamen pasti na zemlju iznosi

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} + \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \text{ m}}{10 \frac{m}{s^2}}} + \frac{10 \frac{m}{s}}{10 \frac{m}{s^2}} = 9.94 \text{ s.}$$

b) Ako se aerostat vertikalno spušta brzinom  $v_0$  vrijeme za koje će kamen pasti na zemlju iznosi

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} - \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \text{ m}}{10 \frac{m}{s^2}}} - \frac{10 \frac{m}{s}}{10 \frac{m}{s^2}} = 7.94 \text{ s.}$$



c) Ako aerostat miruje u zraku vrijeme za koje će kamen pasti na zemlju iznosi

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 8.94 \text{ s.}$$

d) Ako se aerostat kreće horizontalnom brzinom  $v_0$  vrijeme za koje će kamen pasti na zemlju iznosi

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 8.94 \text{ s.}$$

### Vježba 208

Iz aerostata koji se nalazi na visini 400 m ispadne kamen. Za koje će vrijeme kamen pasti na zemlju ako se aerostat vertikalno diže brzinom 20 m/s,

**Rezultat:** 10.94 s.

### Zadatak 209 (Tea, srednja škola)

S vrha brijega bacimo kamen u horizontalnom smjeru. Padina brijega nagnuta je prema horizontalnoj ravnini za kut  $\alpha = 30^\circ$ . Kojom je brzinom bačen kamen ako je na padinu brijega pao 200 m daleko od mjesta gdje je izbačen? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

### Rješenje 209

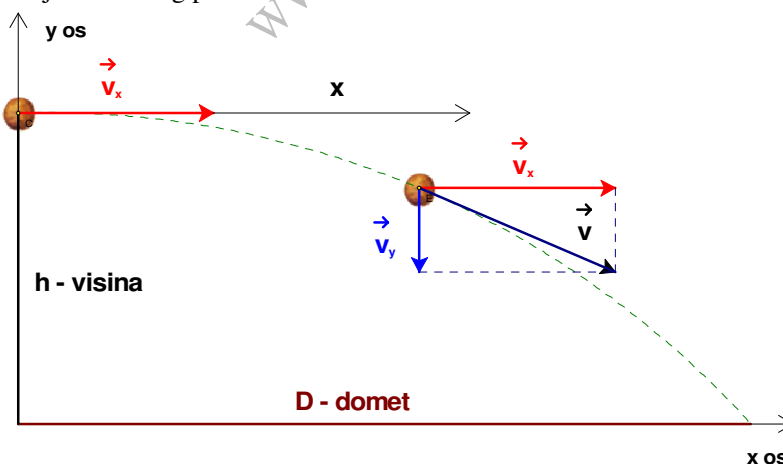
$$\alpha = 30^\circ, \quad d = 200 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Tijelo se složeno giba kad istodobno obavlja dva ili više gibanja. Pri takvom gibanju vrijedi načelo neovisnosti gibanja koje glasi: Kad tijelo istodobno obavlja dva gibanja, giba se tako da se u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi stiglo kad bi obavilo samo jedno gibanje u određenom vremenskom razmaku, a neovisno o tom gibanju istodobno i drugo gibanje u istome vremenskom razmaku.

Za slobodan pad vrijedi izraz

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada.

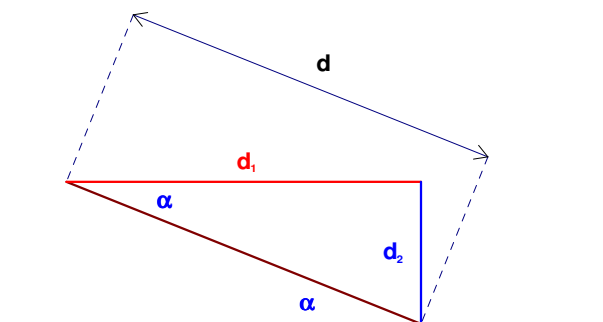


Horizontalni hitac je gibanje što se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom  $v_x = v_0$  i slobodnog pada. Horizontalna i vertikalna komponenta brzine kod horizontalnog hica nakon vremena  $t$  jesu:

$$v_x = v_0, \quad v_y = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Za putove tijela kod horizontalnog hica u smjeru  $x$  osi i  $y$  osi vrijedi:

$$x = v_x \cdot t, \quad y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$



Sa slike vidi se:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{d_1}{d} \\ d_1 = v \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d_1 = d \cdot \cos \alpha \\ d_1 = v \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow d \cdot \cos \alpha = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{d \cdot \cos \alpha}{v}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{d_2}{d} \\ d_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d_2 = d \cdot \sin \alpha \\ d_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow d \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Brzina v bačenog kamena iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{d \cdot \cos \alpha}{v} \\ d \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow d \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left( \frac{d \cdot \cos \alpha}{v} \right)^2 \Rightarrow d \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{d^2 \cdot \cos^2 \alpha}{v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{d^2 \cdot \cos^2 \alpha}{v^2} \cdot \frac{v^2}{d \cdot \sin \alpha} \Rightarrow v^2 = \frac{g \cdot d \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot d \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot \sin \alpha}} \Rightarrow v = \cos \alpha \cdot \sqrt{\frac{g \cdot d}{2 \cdot \sin \alpha}} = \cos 30^\circ \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 200 m}{2 \cdot \sin 30^\circ}} = 38.36 \frac{m}{s}$$

### Vježba 209

S vrha brijega bacimo kamen u horizontalnom smjeru. Padina brijega nagnuta je prema horizontalnoj ravlini za kut  $\alpha = 30^\circ$ . Kojom je brzinom bačen kamen ako je na padinu brijega pao 400 m daleko od mjesta gdje je izbačen? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

**Rezultat:** 54.25 m/s.

### Zadatak 210 (Mala, medicinska škola)

Automobil, koji se giba stalnom brzinom, u jednom trenutku počinje se gibati jednoliko ubrzano, ubrzanjem  $0.8 \text{ m/s}^2$ , u vremenu od 10 s, u kojem prijeđe put od 130 m. Kolika je bila njegova brzina prije početka ubrzanog gibanja?

### Rješenje 210

$$a = 0.8 \text{ m/s}^2, \quad t = 10 \text{ s}, \quad s = 130 \text{ m}, \quad v_0 = ?$$

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje jest gibanje sa stalnim ubrzanjem (akceleracijom). Ako tijelo ima početnu brzinu  $v_0$ , a akceleracija je pozitivna, formula za prijeđeni put  $s$  glasi:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Brzina  $v_0$  prije početka ubrzanog gibanja tijela iznosi:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot s = 2 \cdot v_0 \cdot t + a \cdot t^2 \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t + a \cdot t^2 = 2 \cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t = 2 \cdot s - a \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot t} \Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot s - a \cdot t^2}{2 \cdot t} = \frac{2 \cdot 130 \text{ m} - 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10 \text{ s})^2}{2 \cdot 10 \text{ s}} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

### Vježba 210

Automobil, koji se giba stalnom brzinom, u jednom trenutku počinje se gibati jednoliko ubrzano, ubrzanjem  $0.4 \text{ m/s}^2$ , u vremenu od  $10 \text{ s}$ , u kojem prijeđe put od  $130 \text{ m}$ . Kolika je bila njegova brzina prije početka ubrzanog gibanja?

**Rezultat:** 11 m/s.

### Zadatak 211 (Miro, maturant gimnazije)

Dva tijela masa  $m_1 = 3 \text{ kg}$  i  $m_2 = 6 \text{ kg}$  leže na horizontalnoj podlozi. Tijela su međusobno vezana nerastezljivom niti zanemarive mase. Faktori trenja između tijela i podloge su  $\mu_1 = 0.3$  i  $\mu_2 = 0.2$ . Kolika je akceleracija drugog tijela, ako prvo povlačimo konstantnom silom od  $30 \text{ N}$ ? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 211

$$m_1 = 3 \text{ kg}, \quad m_2 = 6 \text{ kg}, \quad \mu_1 = 0.3, \quad \mu_2 = 0.2, \quad F = 30 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

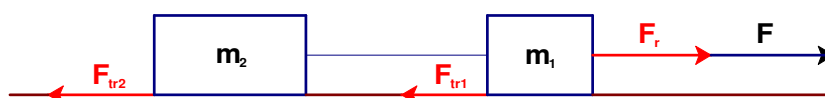
gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite (normalne) komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Kada je tijelo na horizontalnoj podlozi sila trenja iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$



Rezultantna sila  $F_r$  koja cijelom sustavu daje akceleraciju  $a$  iznosi

$$F_r = (m_1 + m_2) \cdot a,$$

a dobije se kao razlika vučne sile  $F$  na prvo tijelo i trenja oba tijela:

$$F_r = F - F_{tr1} - F_{tr2} \Rightarrow F_r = F - \mu_1 \cdot G_1 - \mu_2 \cdot G_2 \Rightarrow F_r = F - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g - \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_r = F - (\mu_1 \cdot m_1 + \mu_2 \cdot m_2) \cdot g.$$

Akceleracija  $a$  sustava pa time i drugog tijela iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F_r = (m_1 + m_2) \cdot a, \\ F_r = F - (\mu_1 \cdot m_1 + \mu_2 \cdot m_2) \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = F - (\mu_1 \cdot m_1 + \mu_2 \cdot m_2) \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = F - (\mu_1 \cdot m_1 + \mu_2 \cdot m_2) \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{F - (\mu_1 \cdot m_1 + \mu_2 \cdot m_2) \cdot g}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{30 \text{ N} - (0.3 \cdot 3 \text{ kg} + 0.2 \cdot 6 \text{ kg}) \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3 \text{ kg} + 6 \text{ kg}} = 1.044 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

### Vježba 211

Dva tijela masa  $m_1 = 6 \text{ kg}$  i  $m_2 = 12 \text{ kg}$  leže na horizontalnoj podlozi. Tijela su međusobno vezana nerastezljivom niti zanemarive mase. Faktori trenja između tijela i podloge su  $\mu_1 = 0.3$  i  $\mu_2 = 0.2$ . Kolika je akceleracija drugog tijela, ako prvo povlačimo konstantnom silom od  $60 \text{ N}$ ? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $1.044 \text{ m/s}^2$ .

### Zadatak 212 (Nela, gimnazija)

Tijelo mase  $5 \text{ kg}$  visi na užetu koje može izdržati težinu od  $500 \text{ N}$ . Ako se hvatište užeta počne ubrzavati prema gore akceleracijom koja se povećava od nule linearno svake sekunde za  $g$ , nakon koliko vremena će užo puknuti? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 212

$$m = 5 \text{ kg}, \quad F_n = 500 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t_n = ?$$

Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila (drugi Newtonov poučak):

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Nakon prve sekunde akceleracija tijela iznosi:

$$t_1 = 1 \text{ s} \Rightarrow a_1 = g + g \Rightarrow a_1 = 2 \cdot g.$$

Nakon druge sekunde akceleracija tijela iznosi:

$$t_2 = 2 \text{ s} \Rightarrow a_2 = g + 2 \cdot g \Rightarrow a_2 = 3 \cdot g.$$

Nakon treće sekunde akceleracija tijela iznosi:

$$t_3 = 3 \text{ s} \Rightarrow a_3 = g + 3 \cdot g \Rightarrow a_3 = 4 \cdot g.$$

⋮  
⋮  
⋮

Nakon  $n$ -te sekunde akceleracija tijela iznosi:

$$t_n = n \text{ s} \Rightarrow a_n = g + n \cdot g \Rightarrow a_n = (n+1) \cdot g.$$

Uporabom drugog Newtonovog poučka dobije se:

$$F_n = m \cdot a_n \Rightarrow F_n = m \cdot (n+1) \cdot g \Rightarrow F_n = m \cdot (n+1) \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \frac{F_n}{m \cdot g} = n+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{F_n}{m \cdot g} - 1.$$

Vrijeme nakon kojeg će užo puknuti iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} t_n = n \text{ s} \\ n = \frac{F_n}{m \cdot g} - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow t_n = \left( \frac{F_n}{m \cdot g} - 1 \right) \text{ s} = \left( \frac{500 \text{ N}}{5 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} - 1 \right) \text{ s} = 9.19 \text{ s}.$$

### Vježba 212

Tijelo mase 5 kg visi na užetu koje može izdržati težinu od 1000 N. Ako se hvatište užeta počne ubrzavati prema gore akceleracijom koja se povećava od nule linearno svake sekunde za  $g$ , nakon koliko vremena će užo puknuti? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 19.39 s.

### Zadatak 213 (Hrvoje, gimnazija)

Na tijelo mase 1 kg, koje miruje, počinje djelovati sila od 1 N. Nakon vremena od 1 s sila se poveća na 2 N. Koliki put tijelo prijeđe za vrijeme od 2 sekunde nakon početka gibanja?

#### Rješenje 213

$$m = 1 \text{ kg}, \quad F_1 = 1 \text{ N}, \quad t_1 = 1 \text{ s}, \quad F_2 = 2 \text{ N}, \quad t_2 = 1 \text{ s}, \quad s = ?$$

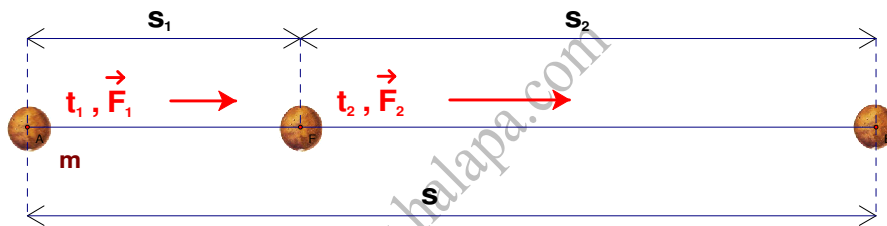
Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = a \cdot t, \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje su  $v$  i  $s$  brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje jest gibanje sa stalnim ubrzanjem (akceleracijom). Ako tijelo ima početnu brzinu  $v_0$ , a akceleracija je pozitivna, formula za prijeđeni put  $s$  glasi:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$



Akceleracije u prvoj i drugoj sekundi iznose:

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = m \cdot a_1 \\ F_2 = m \cdot a_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{F_1}{m} \\ a_2 = \frac{F_2}{m} \end{array} \right\}.$$

Prijeđeni put u prvoj sekundi iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{F_1}{m} \\ s_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1}{m} \cdot t_1^2.$$

Nakon prve sekunde tijelo ima brzinu:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = a_1 \cdot t_1 \\ a_1 = \frac{F_1}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 = \frac{F_1}{m} \cdot t_1.$$

Put prijeđen u drugoj sekundi ( $v_1$  je početna brzina) iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = \frac{F_1}{m} \cdot t_1, \quad a_2 = \frac{F_2}{m} \\ s_2 = v_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_2 = \frac{F_1}{m} \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_2}{m} \cdot t_2^2.$$

Ukupni put je:

$$s = s_1 + s_2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1}{m} \cdot t_1^2 + \frac{F_1}{m} \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_2}{m} \cdot t_2^2 \Rightarrow s = \frac{1}{m} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot t_1^2 + F_1 \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot t_2^2 \right) = \\ = \frac{1}{1 \text{ kg}} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ N} \cdot (1 \text{ s})^2 + 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ s} \cdot 1 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ N} \cdot (1 \text{ s})^2 \right) = 2.5 \text{ m}.$$

### Vježba 213

Na tijelo mase 1 kg, koje miruje, počinje djelovati sila od 2 N. Nakon vremena od 1 s sila se poveća na 4 N. Koliki put tijelo prijeđe za vrijeme od 2 sekunde nakon početka gibanja?

**Rezultat:** 5 m.

### Zadatak 214 (Iva, gimnazija)

Automobil vozi brzinom 50 km/h. Pošto je 5 sekundi kočio, brzina mu se smanjila na 20 km/h.

Nadi:

- akceleraciju ako je gibanje bilo jednoliko usporeno,
- put prevaljen u petoj sekundi.

### Rješenje 214

$$v_1 = 50 \text{ km/h} = [50 : 3.6] = 13.89 \text{ m/s}, \quad \Delta t = 5 \text{ s}, \quad v_2 = 20 \text{ km/h} = [20 : 3.6] = 5.56 \text{ m/s}, \\ a = ?, \quad \Delta s_{5-4} = ?$$

- Srednja akceleracija je omjer razlike brzina  $\Delta v$  u nekom vremenskom intervalu  $\Delta t$  i toga vremenskog intervala:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Trenutna akceleracija  $a$  je omjer promjene brzine  $\Delta v$  u neizmjerljivo malom vremenskom intervalu (trenutku)  $\Delta t$  i toga trenutka. Kada razmatramo slučajeve gibanja pri kojima se vrijednost akceleracije neće mijenjati, onda je:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Kada se tijelo giba pravocrtno, vrijedi:

- akceleracija pozitivna,  $a > 0 \Rightarrow$  tijelo ubrzava
- akceleracija negativna,  $a < 0 \Rightarrow$  tijelo usporava

Akceleracija automobila iznosi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{5.56 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 13.89 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} = -1.67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{akceleracija negativna,} \\ \text{automobil usporava} \end{array} \right.$$

- Računamo put prevaljen u petoj sekundi:

Put prevaljen u petoj sekundi jednak je razlici puta koji je automobil prešao za prvih 5 sekundi i puta koji je automobil prešao za prve 4 sekunde:

$$\Delta s_{5-4} = s_5 - s_4 \Rightarrow \Delta s_{5-4} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (5 \text{ s})^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (4 \text{ s})^2 \Rightarrow \Delta s_{5-4} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (25 \text{ s}^2 - 16 \text{ s}^2) = \\ = \frac{1}{2} \cdot 1.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 9 \text{ s}^2 = 7.65 \text{ m}.$$

### Vježba 214

Automobil vozi brzinom 50 km/h. Pošto je 10 sekundi kočio, brzina mu se smanjila na 20 km/h. Nadi akceleraciju ako je gibanje bilo jednoliko usporeno.

**Rezultat:**  $-0.83 \text{ m/s}^2$ .

### Zadatak 215 (Iva, gimnazija)

Koliki priklon ima ravnina prema horizontalnoj ravni ako kuglici koja se kotrlja niz nju treba pet puta više vremena nego kad bi padala niz visinu te kosine?

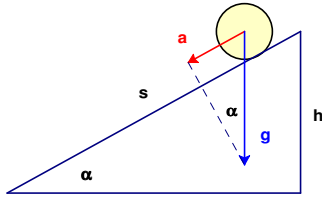
#### Rješenje 215

$$t_2 = 5 \cdot t_1, \quad \alpha = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}},$$

gdje je  $s$  put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .



Sa slike vidi se:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{a}{g} \\ \sin \alpha = \frac{h}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = g \cdot \sin \alpha \\ h = s \cdot \sin \alpha \end{array} \right\}.$$

Vrijeme  $t_1$  gibanja kuglice niz kosinu iznosi:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}.$$

Vrijeme  $t_2$  slobodnog pada kuglice niz visinu kosine iznosi:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}.$$

Budući da kuglici kad se kotrlja niz kosinu treba pet puta više vremena nego kad bi padala niz visinu te kosine, slijedi:

$$\begin{aligned} t_1 = 5 \cdot t_2 &\Rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad /: 2 \Rightarrow \frac{2 \cdot s}{a} = 25 \cdot \frac{2 \cdot h}{g} \quad /: 2 \Rightarrow \frac{s}{a} = 25 \cdot \frac{h}{g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{s}{g \cdot \sin \alpha} = 25 \cdot \frac{s \cdot \sin \alpha}{g} \Rightarrow \frac{s}{g \cdot \sin \alpha} = 25 \cdot \frac{s \cdot \sin \alpha}{g} \quad /: \frac{g}{s} \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} = 25 \cdot \frac{\sin \alpha}{1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 25 \cdot \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow 25 \cdot \sin^2 \alpha = 1 \quad /: 25 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{25} \quad /: \sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{25}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \alpha = 0.2 \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} 0.2 \Rightarrow \alpha = 11.54^\circ. \end{aligned}$$

### Vježba 215

Koliki priklon ima ravnina prema horizontalnoj ravni ako kuglici koja se kotrlja niz nju treba deset puta više vremena nego kad bi padala niz visinu te kosine?

**Rezultat:**  $5.74^\circ$ .

### Zadatak 216 (Mario, gimnazija)

Dvije teške kugle bacimo vertikalno uvis jednakim početnim brzinama, jednu za drugom u vremenskom razmaku 2 s. Kugle se sastanu dvije sekunde pošto je bačena druga kugla. Odredi početnu brzinu kugala. Otpor zraka zanemarimo. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 216

$$\Delta t = 2 \text{ s}, \quad t = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato mu je put  $s$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan ovim izrazom

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Budući da su se kugle sastale dvije sekunde pošto je bačena druga kugla, vremena kugala do susreta u zraku su:

- prva kugla :  $t_1 = t + \Delta t = 2 \text{ s} + 2 \text{ s} = 4 \text{ s}$
- druga kugla :  $t_2 = t = 2 \text{ s}$ .

Početna brzina  $v_0$  kugala je:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \\ s_2 &= v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{kuglice su se sastale} \\ s_1 = s_2 \end{array} \right] \Rightarrow v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot 4^2 = v_0 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot 2^2 \Rightarrow 4 \cdot v_0 - 8 \cdot g = 2 \cdot v_0 - 2 \cdot g \Rightarrow 4 \cdot v_0 - 2 \cdot v_0 = -2 \cdot g + 8 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot v_0 = 6 \cdot g \quad / : 2 \Rightarrow v_0 = 3 \cdot g \Rightarrow v_0 = 3 \cdot 10 \Rightarrow v_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**Pozor!**

Jednadžbu smo rješavali bez pisanja jedinica uz fizikalne veličine. Tek u rezultatu stavili smo jedinicu za brzinu, m/s.

### Vježba 216

Dvije teške kugle bacimo vertikalno uvis jednakim početnim brzinama, jednu za drugom u vremenskom razmaku 3 s. Kugle se sastanu tri sekunde pošto je bačena druga kugla. Odredi početnu brzinu kugala. Otpor zraka zanemarimo.

**Rezultat:** 45 m/s.

### Zadatak 217 (Mario, gimnazija)

Elastična kugla padne na zemlju s visine 49 m. Pošto je udarila o zemlju, odbija se vertikalno uvis brzinom koja je jednaka  $\frac{3}{5}$  kojom je pala. Nađi visinu na koju se digla kugla pošto se odbila.

### Rješenje 217

$$s = 49 \text{ m}, \quad v_1 = \frac{3}{5} \cdot v_0, \quad s_1 = ?$$

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato su mu brzina  $v$  i put  $s$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dani ovim izrazima

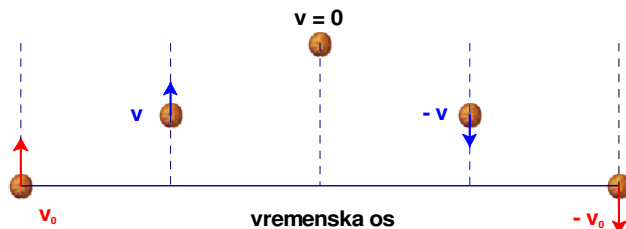
$$v = v_0 - g \cdot t, \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Najviši domet  $H$  što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je  $v = 0$ . Onda je

$$t = \frac{v_0}{g}, \quad H = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

Za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.

Kod vertikalnog hica su početna brzina  $v_0$  i brzina pri padu tijela natrag na zemlju iste po iznosu, a suprotnih smjerova.





Iz formule za početnu brzinu  $v_0$  izračunamo brzinu  $v_1$  kojom se tijelo, nakon udara o zemlju, odbilo vertikalno uvis:

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot s} \\ v_1 = \frac{3}{5} \cdot v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot s}$$

Visina na koju se digla kugla, pošto se odbila, iznosi:

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \Rightarrow s_1 = \frac{\left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot s}\right)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow s_1 = \frac{9}{25} \cdot \frac{2 \cdot g \cdot s}{2 \cdot g} \Rightarrow s_1 = \frac{9}{25} \cdot s = 17.64 \text{ m.}$$

### Vježba 217

Elastična kugla padne na zemlju s visine 98 m. Pošto je udarila o zemlju, odbija se vertikalno uvis brzinom koja je jednaka  $\frac{3}{5}$  kojom je pala. Nađi visinu na koju se digla kugla pošto se odbila.

**Rezultat:** 35.28 m.

### Zadatak 218 (Tomy, gimnazija)

Tane i zvuk koji je pritom nastao dopru istodobno do visine 510 m. Kolikom je brzinom izašlo tane iz cijevi ako je brzina zvuka 340 m/s? Otpor zraka zanemarimo. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 218

$$s = 510 \text{ m}, \quad v = 340 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Srednja brzina  $\bar{v}$  tijela u vremenskom intervalu  $\Delta t$  jest omjer dijela puta  $\Delta s$ , što ga je tijelo prešlo za to vrijeme i vremenskog razmaka  $\Delta t$ :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \bar{v} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Ako je taj omjer stalan za svaki  $\Delta s$  i odgovarajući  $\Delta t$  duž nekog puta  $s$ , onda kažemo da se na tom putu tijelo giba jednoliko te vrijedi:

$$v = \frac{s}{t}, \quad s = v \cdot t.$$

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato mu je put  $s$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan ovim izrazom

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Budući da se zvuk giba jednoliko (stalnom brzinom  $v$ ), vrijeme za koje tane i zvuk istodobno dopru do visine  $s$ , iznosi:

$$s = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v}.$$

Računamo brzinu  $v_0$  kojom je tane izašlo iz cijevi:

$$\begin{aligned} s &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow s + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t \Rightarrow v_0 \cdot t = s + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad /: t \Rightarrow v_0 = \frac{s}{t} + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_0 = v + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{s}{v} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{510 \text{ m}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 347.36 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

### Vježba 218

Tane i zvuk koji je pritom nastao dopru istodobno do visine 1020 m. Kolikom je brzinom izašlo tane iz cijevi ako je brzina zvuka 340 m/s? Otpor zraka zanemarimo. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 354.72 m/s.

### Zadatak 219 (Neven, gimnazija)

Tijelo A bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom  $v_0$ . Tijelo B pada po istom pravcu s visine  $d$  početnom brzinom 0. Nađi funkciju koja prikazuje ovisnost udaljenosti  $y$  između tijela A i B u ovisnosti o vremenu  $t$  ako pretpostavimo da su se tijela počela gibati istodobno.

### Rješenje 219

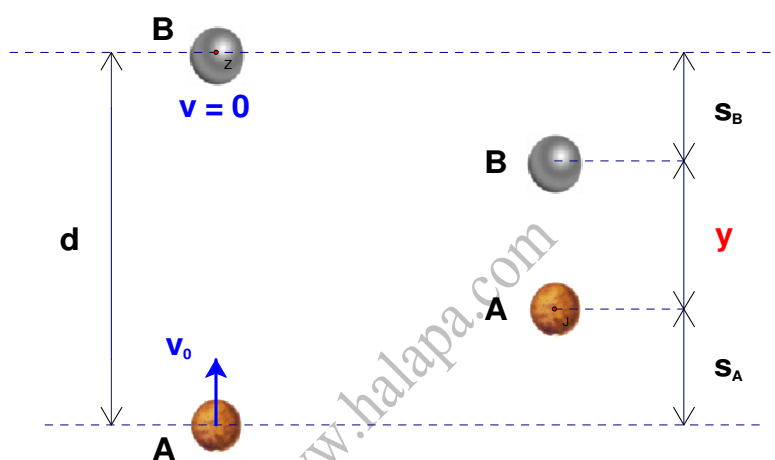
$$v_0, \quad d, \quad t, \quad y = f(t)$$

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato mu je put  $s$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan ovim izrazom

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Slobodni pad je gibanje koje izvodi tijelo kada pada u blizini površine Zemlje stalnim ubrzanjem sile teže,  $g$ .

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$



Put  $s_A$  što ga prijeđe tijelo A pri vertikalnom hicu iznosi:

$$s_A = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Put  $s_B$  što ga prijeđe tijelo B pri slobodnom padu iznosi:

$$s_B = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Funkcija koja prikazuje ovisnost udaljenosti  $y$  između tijela A i B u ovisnosti o vremenu  $t$ , ako pretpostavimo da su se tijela počela gibati istodobno, iznosi:

$$\begin{aligned} y &= d - (s_A + s_B) \Rightarrow y = d - \left( v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right) \Rightarrow y = d - v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = d - v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow y = d - v_0 \cdot t. \end{aligned}$$

### Vježba 219

Tijelo A bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom  $v_0$ . Tijelo B pada po istom pravcu s visine  $d$  početnom brzinom  $v$ . Nađi funkciju koja prikazuje ovisnost udaljenosti  $y$  između tijela A i B u ovisnosti o vremenu  $t$  ako pretpostavimo da su se tijela počela gibati istodobno.

**Rezultat:**  $y = d - (v_0 + v) \cdot t.$

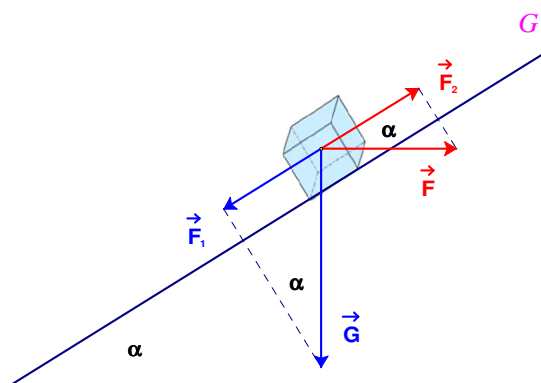
### Zadatak 220 (Irena, gimnazija)

Predmet mase 4 kg miruje na glatkoj kosini nagiba  $60^\circ$ . Horizontalna sila  $F$  sprečava ga da klizi. Nadi silu  $F$ . ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 220

$$m = 4 \text{ kg}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.



$$G = m \cdot g.$$

Sa slike vidi se:

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{F} \Rightarrow F_2 = F \cdot \cos \alpha.$$

Sila  $F_1$  jedna je od komponenta sile teže  $G$  i izvodi gibanje predmeta niz kosinu. Sila  $F_2$  jedna je od komponenta horizontalne sile  $F$  i izvodi gibanje predmeta uz kosinu. Budući da predmet

miruje na kosini (ne klizi), sile  $F_1$  i  $F_2$  iste su po iznosu, a suprotnih smjerova:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow G \cdot \sin \alpha = F \cdot \cos \alpha \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha = F \cdot \cos \alpha \quad /: \cos \alpha \Rightarrow F = m \cdot g \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha = 4 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 67.97 \text{ N}.$$

### Vježba 220

Predmet mase 8 kg miruje na glatkoj kosini nagiba  $60^\circ$ . Horizontalna sila  $F$  sprečava ga da klizi. Nadi silu  $F$ . ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 135.93 N.