

Zadatak 081 (Lana, gimnazija)

Srednje vrijeme života π – mezona je 10^{-7} s. Giba se brzinom 99% brzine svjetlosti.

a) Koju udaljenost prijeđe čestica prije raspada u vlastitom sustavu?

b) Koju udaljenost prijeđe čestica u sustavu mirnog motritelja prije raspada? (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m / s)

Rješenje 081

$$\Delta t_0 = 10^{-7} \text{ s}, \quad v = \frac{99}{100} \cdot c = 0.99 \cdot c, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}, \quad s_0 = ?, \quad s = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Veza između vremenskog intervala Δt_0 u sustavu S_0 , koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S , i vremenskog intervala Δt u sustavu S , određena je izrazom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je c brzina svjetlosti. Ta se pojava zove dilatacija vremena.

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

a) Udaljenost s_0 koju prijeđe čestica prije raspada u vlastitom sustavu iznosi:

$$s_0 = v \cdot \Delta t_0 \Rightarrow s_0 = 0.99 \cdot c \cdot \Delta t_0 = 0.99 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^{-7} \text{ s} = 29.7 \text{ m}.$$

b) Udaljenost s koju prijeđe čestica prije raspada u sustavu mirnog motritelja je:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ s = v \cdot \Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow s = v \cdot \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow s = v \cdot \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow s = 0.99 \cdot c \cdot \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.99 \cdot c}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s = 0.99 \cdot c \cdot \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.99 \cdot c}{c}\right)^2}} \Rightarrow s = 0.99 \cdot c \cdot \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 0.99^2}} =$$
$$= 0.99 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{10^{-7} \text{ s}}{\sqrt{1 - 0.99^2}} = 210.54 \text{ m}.$$

Vježba 081

Srednje vrijeme života π – mezona je $0.1 \mu\text{s}$. Giba se brzinom 99% brzine svjetlosti. Koju udaljenost prijeđe čestica u sustavu mirnog motritelja prije raspada? (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m / s)

Rezultat: 210.54 m.

Zadatak 082 (Lana, gimnazija)

Vlastito vrijeme života μ – mezona je $2.2 \mu\text{s}$. Odredi minimalnu brzinu mezona koji su nastali u atmosferi na 20 km nadmorske visine i uspjeli doći do tla prije raspada. (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m / s)

Rješenje 082

$\Delta t_0 = 2.2 \mu\text{s} = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $s = 20 \text{ km} = 2 \cdot 10^4 \text{ m}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $v = ?$
 Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Veza između vremenskog intervala Δt_0 u sustavu S_0 , koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S , i vremenskog intervala Δt u sustavu S , određena je izrazom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gdje je c brzina svjetlosti. Ta se pojava zove dilatacija vremena.
 Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow v = \frac{s}{t}$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

$$\left. \begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ v &= \frac{s}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \frac{s}{\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \Rightarrow v = \frac{\frac{s}{1}}{\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \Rightarrow v = \frac{s \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\Delta t_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{s \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\Delta t_0} \cdot \frac{\Delta t_0}{s} \Rightarrow \frac{v \cdot \Delta t_0}{s} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v \cdot \Delta t_0}{s} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v \cdot \Delta t_0}{s} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2 \cdot (\Delta t_0)^2}{s^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2 \cdot (\Delta t_0)^2}{s^2} + \frac{v^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 \cdot \left(\frac{(\Delta t_0)^2}{s^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 1 \Rightarrow v^2 \cdot \frac{c^2 \cdot (\Delta t_0)^2 + s^2}{s^2 \cdot c^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 \cdot \frac{c^2 \cdot (\Delta t_0)^2 + s^2}{s^2 \cdot c^2} = 1 \cdot \frac{s^2 \cdot c^2}{c^2 \cdot (\Delta t_0)^2 + s^2} \Rightarrow v^2 = \frac{s^2 \cdot c^2}{c^2 \cdot (\Delta t_0)^2 + s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{s^2 \cdot c^2}{c^2 \cdot (\Delta t_0)^2 + s^2} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{s^2 \cdot c^2}{c^2 \cdot (\Delta t_0)^2 + s^2}} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{s^2 \cdot c^2}}{\sqrt{c^2 \cdot (\Delta t_0)^2 + s^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{s \cdot c}{\sqrt{c^2 \cdot (\Delta t_0)^2 + s^2}} \Rightarrow v = \frac{s \cdot c}{\sqrt{(c \cdot \Delta t_0)^2 + s^2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}\right)^2 + \left(2 \cdot 10^4 \text{ m}\right)^2}} = 299836783.3 \text{ m}.$$

Vježba 082

Vlastito vrijeme života μ – mezona je 220 ns. Odredi minimalnu brzinu mezona koji su nastali u atmosferi na 20 km nadmorske visine i uspjeli doći do tla prije raspada. (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rezultat: 299836783.3 m.

Zadatak 083 (Ivan, gimnazija)

Koliko se vode može zagrijati od ledišta do vrelišta energijom koja se oslobodi u eksploziji nuklearne bombe ako je ukupna masa produkta iza eksplozije manja za 1.5 g od početne mase nuklearnog goriva? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4.19 \cdot 10^3 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}$, brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rješenje 083

$t_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ledište vode, $t_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ vrelište vode, $\Delta m = 1.5 \text{ g} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$,
 $c = 4.19 \cdot 10^3 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $m = ?$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

U specijalnoj teoriji relativnosti Einstein je pokazao da se masa i energija ne mogu očuvati odvojeno već se može govoriti samo o očuvanju ukupne mase i energije sustava. Ekvivalentnost mase i energije dana je relacijom

$$E = m \cdot c^2.$$

u kojoj je m masa tijela, a c brzina svjetlosti.

Toplina Q je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a ΔT promjena temperature.

Masa vode koja se može zagrijati od ledišta do vrelišta energijom koja se oslobodi u eksploziji nuklearne bombe iznosi:

$$\begin{aligned} Q = E &\Rightarrow m \cdot c \cdot \Delta t = \Delta m \cdot c^2 \Rightarrow m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = \Delta m \cdot c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) &= \Delta m \cdot c^2 \cdot \frac{1}{m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)} \Rightarrow m = \frac{\Delta m \cdot c^2}{c \cdot (t_2 - t_1)} = \\ &= \frac{1.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{4.19 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (100 - 0) \text{ K}} = 322195704.1 \text{ kg} \approx 3.22 \cdot 10^8 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Vježba 083

Koliko se vode može zagrijati od ledišta do vrelišta energijom koja se oslobodi u eksploziji nuklearne bombe ako je ukupna masa produkta iza eksplozije manja za 0.0015 kg od početne mase nuklearnog goriva? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4.19 \cdot 10^3 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}$), brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$)

Rezultat: $3.22 \cdot 10^8 \text{ kg}$.

Zadatak 084 (Robert, tehnička škola)

Godišnja potrošnja energije u nekoj zemlji je reda veličine 10^{17} J . Kada bi se materija mogla potpuno pretvoriti u energiju kolika bi masa bila potrebna za proizvodnju te energije? (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$)

Rješenje 084

$$E = 10^{17} \text{ J}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}, \quad m = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

U specijalnoj teoriji relativnosti Einstein je pokazao da se masa i energija ne mogu očuvati odvojeno već se može govoriti samo o očuvanju ukupne mase i energije sustava. Ekvivalentnost mase i energije dana je relacijom

$$E = m \cdot c^2.$$

u kojoj je m masa tijela, a c brzina svjetlosti.

$$\begin{aligned} E = m \cdot c^2 &\Rightarrow m \cdot c^2 = E \Rightarrow m \cdot c^2 = E / \frac{1}{c^2} \Rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \\ &= \frac{10^{17} \text{ J}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1.11 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Vježba 084

Godišnja potrošnja energije u nekoj zemlji je reda veličine 10^{14} kJ . Kada bi se materija mogla potpuno pretvoriti u energiju kolika bi masa bila potrebna za proizvodnju te energije? (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$)

Rezultat: 1.11 kg .

Zadatak 085 (Robert, tehnička škola)

Koliko se puta poveća masa elektrona kad prođe razlikom potencijala 10^6 V ? (masa elektrona u mirovanju $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, naboj elektrona $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$)

Rješenje 085

$$U = 10^6 \text{ V}, \quad m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad Q = e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s},$$

$$\frac{m}{m_0} = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Ako tijelo u stanju mirovanja ima masu m_0 , a kad se giba brzinom v masu m , onda je njegova kinetička energija

$$E_k = (m - m_0) \cdot c^2.$$

Razlika potencijala ($\varphi_1 - \varphi_2$) naziva se naponom U i možemo ga izračunati kao

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Rad što se utroši pri prijelazu naboja Q iz točke potencijala φ_1 u točku potencijala φ_2 jednak je promjeni potencijalne energije naboja, tj.

$$W = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow W = Q \cdot U.$$

U električnom polju elektron je postigao kinetičku energiju E_k koja je jednaka radu sile električnog polja W:

$$\left. \begin{aligned} W &= Q \cdot U \\ E_k &= (m - m_0) \cdot c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} W &= e \cdot U \\ E_k &= (m - m_0) \cdot c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow [E_k = W] \Rightarrow (m - m_0) \cdot c^2 = e \cdot U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m - m_0) \cdot c^2 = e \cdot U \cdot \frac{1}{c} \Rightarrow m - m_0 = \frac{e \cdot U}{c^2} \Rightarrow m - m_0 = \frac{e \cdot U}{c^2} \cdot \frac{1}{m_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m_0} - 1 = \frac{e \cdot U}{m_0 \cdot c^2} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{e \cdot U}{m_0 \cdot c^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^6 \text{ V}}{9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} + 1 \Rightarrow \frac{m}{m_0} = 2.95 \Rightarrow \frac{m}{m_0} \approx 3 \text{ puta.}$$

Vježba 085

Koliko se puta poveća masa elektrona kad prođe razlikom potencijala 10^3 kV? (masa elektrona u mirovanju $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, naboj elektrona $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C, brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rezultat: 3 puta.

Zadatak 086 (Maki, gimnazija)

Kolikom brzinom bi se trebao gibati inercijski sustav da vrijeme u njemu teče upola sporije? (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rješenje 086

$$\Delta t = 2 \cdot \Delta t_0, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Veza između vremenskog intervala Δt_0 u sustavu S_0 , koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S , i vremenskog intervala Δt u sustavu S , određena je izrazom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je c brzina svjetlosti. Ta se pojava zove dilatacija vremena.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow [\Delta t = 2 \cdot \Delta t_0] \Rightarrow 2 \cdot \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \cdot \Delta t_0 &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad / \cdot \frac{1}{\Delta t_0} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] &\Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad / 2 \Rightarrow \frac{1}{4} = 1-\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} &= 1-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1}-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{4-1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \quad / \cdot c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{3}{4} \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = \frac{3}{4} \cdot c^2 \quad / \sqrt{} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot c^2} \Rightarrow v = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{3} = \\ &= \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{2} \cdot \sqrt{3} = 2.6 \cdot 10^8 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Vježba 086

Kolikom brzinom bi se trebao gibati inercijski sustav da vrijeme u njemu teče četiri puta sporije? (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rezultat: $v = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{15} = 2.90 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Zadatak 087 (Maki, gimnazija)

Kako teče vrijeme u koordinatnom sustavu vezanom za foton? (brzina svjetlosti u vakuumu c)

Rješenje 087

$$c, \quad v = c, \quad \Delta t = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Veza između vremenskog intervala Δt_0 u sustavu S_0 , koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S , i vremenskog intervala Δt u sustavu S , određena je izrazom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je c brzina svjetlosti. Ta se pojava zove dilatacija vremena.

Budući da se foton giba brzinom svjetlosti (samo tada egzistira), tj. da je $v = c$, slijedi:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow [v=c] \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{0} = \infty. \end{aligned}$$

U sustavu vezanom za foton gubi se pojam vremena.

Pozor! Korektno zapisano:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} = \infty.$$

Vježba 087

Kako teče vrijeme u koordinatnom sustavu vezanom za česticu koja se giba brzinom svjetlosti? (brzina svjetlosti u vakuumu c)

Rezultat: Gubi se pojam vremena.

Zadatak 088 (Maki, gimnazija)

Kolikom se brzinom mora gibati proton da njegova ukupna energija bude dva puta veća nego u mirovanju? (brzina svjetlosti u vakuumu c)

Rješenje 088

$$E = E_0, \quad c, \quad v = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Jedan je od osnovnih rezultata specijalne teorije relativnosti promjena mase s brzinom:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je m masa tijela u gibanju, m_0 masa mirovanja, v brzina tijela i c brzina svjetlosti u vakuumu. U specijalnoj teoriji relativnosti Einstein je pokazao da se masa i energija ne mogu očuvati odvojeno već se može govoriti samo o očuvanju ukupne mase i energije sustava. Ekvivalentnost mase i energije dana je relacijom

$$E = m \cdot c^2$$

u kojoj je m masa tijela, a c brzina svjetlosti.

Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$E = 2 \cdot E_0 \Rightarrow m \cdot c^2 = 2 \cdot m_0 \cdot c^2 \Rightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 = 2 \cdot m_0 \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 = 2 \cdot m_0 \cdot c^2 \quad / \cdot \frac{1}{m_0 \cdot c^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \quad / \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad / 2 \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{4-1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \quad / \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = \frac{3}{4} \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{3}{4} \cdot c^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot c^2} \Rightarrow v = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{2} \cdot \sqrt{3} = 2.6 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

Vježba 088

Kolikom se brzinom mora gibati proton da njegova ukupna energija bude četiri puta veća nego u mirovanju? (brzina svjetlosti u vakuumu c)

Rezultat: $v = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{15} = 2.90 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Zadatak 089 (XY, maturantica)

Svemirski brod prolazi pored Zemlje brzinom $0.8 \cdot c$. Duljina svemirskog broda u smjeru gibanja, koju izmjeri posada broda, iznosi 50 m. Koliku će duljinu svemirskog broda izmjeriti promatrač na Zemlji? (brzina svjetlosti u vakuumu c)

Rješenje 089

$v = 0.8 \cdot c, \quad l_0 = 50 \text{ m}, \quad l = ?$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Kontrakcija duljina jedan je od temeljnih zaključaka teorije relativnosti, prema kojemu se dimenzije tijela ne mogu apsolutno odrediti. Geometrijske izmjere ovise o stanju gibanja sustava u kojem se mjere.

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

gdje je l_0 vlastita duljina (duljina u sustavu koji se giba istom brzinom kao i mjereni predmet), l duljina mjerena iz sustava koji miruje.

Računamo duljinu svemirskog broda koju je izmjerio promatrač na Zemlji.

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.8 \cdot c}{c}\right)^2} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.8 \cdot c}{c}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - 0.8^2} = 50 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - 0.64} = 30 \text{ m}.$$

Vježba 089

Svemirski brod prolazi pored Zemlje brzinom $0.6 \cdot c$. Duljina svemirskog broda u smjeru gibanja, koju izmjeri posada broda, iznosi 50 m. Koliku će duljinu svemirskog broda izmjeriti promatrač na Zemlji? (brzina svjetlosti u vakuumu c)

Rezultat: 40 m.

Zadatak 090 (Maro, elektrostrojarska škola)

Elektron ima brzinu $0.99 \cdot c$. Kolika je njegova kinetička energija? (masa elektrona u mirovanju $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rješenje 090

$v = 0.99 \cdot c, \quad m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad E_k = ?$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Ako tijelo u stanju mirovanja ima masu m_0 , a kad se giba brzinom v masu m , onda je njegova kinetička energije

$$E_k = (m - m_0) \cdot c^2 \Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Kinetička energija iznosi:

$$E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.99 \cdot c}{c}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.99 \cdot c}{c}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.99^2}} - 1 \right) = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.99^2}} - 1 \right) = 4.99 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

Vježba 090

Elektron ima brzinu $0.999 \cdot c$. Kolika je njegova kinetička energija? (masa elektrona u mirovanju $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rezultat: $1.75 \cdot 10^{-12} \text{ J}$.

Zadatak 091 (Biba, gimnazija)

Kojom se brzinom giba čestica, ako joj je ukupna relativistička energija dva puta veća od energije mirovanja? (brzina svjetlosti u praznini c)

Rješenje 091

$$E = 2 \cdot E_0, \quad c, \quad v = ?$$

Jedan je od osnovnih rezultata specijalne teorije relativnosti promjena mase i brzine. Masa tijela koje se giba veća je od mase tijela koje miruje.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je m masa u gibanju, m_0 masa mirovanja, v brzina tijela, c brzina svjetlosti. Općenito, masa tijela m i energija povezane su relacijom

$$E = m \cdot c^2.$$

Ukupna relativistička energija čestice je

$$E = m \cdot c^2,$$

gdje je m masa čestice u gibanju.

Energija čestice u mirovanju je

$$E = m_0 \cdot c^2,$$

gdje je m_0 masa čestice u mirovanju. Prema uvjetu zadatka dobije se:

$$2 \cdot E_0 = E \Rightarrow 2 \cdot m_0 \cdot c^2 = m \cdot c^2 \Rightarrow 2 \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 \cdot \frac{1}{m_0 \cdot c^2} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{4-1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = \frac{3}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot c^2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c.$$

Vježba 091

Kojom se brzinom giba čestica, ako joj je energija mirovanja dva puta manja od ukupne relativističke energije? (brzina svjetlosti u praznini c)

Rezultat: $v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c.$

Zadatak 092 (Biba, gimnazija)

Izračunati količinu gibanja i kinetičku energiju elektrona koji se giba brzinom $0.85 \cdot c$. (masa elektrona u mirovanju $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rješenje 092

$$v = 0.85 \cdot c, \quad m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad p = ?, \quad E_k = ?$$

Ako je brzina v čestice mase mirovanja m_0 usporediva s brzinom svjetlosti (relativistička čestica), količina gibanja čestice je

$$p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ako tijelo u stanju mirovanja ima masu m_0 , a kad se giba brzinom v masu m, onda je njegova kinetička energija jednaka razlici između ukupne relativističke energije E i energije mirovanja E_0 .

$$E_k = E - E_0 \Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Računamo količinu gibanja.

$$p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow p = \frac{m_0 \cdot c \cdot \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow p = \frac{m_0 \cdot c \cdot \frac{0.85 \cdot c}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.85 \cdot c}{c}\right)^2}} \Rightarrow p = \frac{m_0 \cdot c \cdot \frac{0.85 \cdot c}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.85 \cdot c}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{0.85 \cdot m_0 \cdot c}{\sqrt{1-0.85^2}} = \frac{0.85 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{1-0.85^2}} = 4.41 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Računamo kinetičku energiju.

$$\begin{aligned}
 E_k &= m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.85 \cdot c}{c}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.85 \cdot c}{c}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.85^2}} - 1 \right) = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.85^2}} - 1 \right) = 7.37 \cdot 10^{-14} \text{ J}.
 \end{aligned}$$

Vježba 092

Izračunati količinu gibanja elektrona koji se giba brzinom $0.95 \cdot c$. (masa elektrona u mirovanju $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rezultat: $8.31 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadatak 093 (Mario, gimnazija)

Kolikom se brzinom giba tijelo čija je masa za mirnog promatrača 4 kg , ako je masa mirovanja tijela 2.4 kg ? (brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rješenje 093

$$m = 4 \text{ kg}, \quad m_0 = 2.4 \text{ kg}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Jedan je od osnovnih rezultata specijalne teorije relativnosti promjena mase i brzine. Masa tijela koje se giba veća je od mase tijela koje miruje.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je m masa u gibanju, m_0 masa mirovanja, v brzina tijela, c brzina svjetlosti.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{m_0} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{m_0}{m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{m_0}{m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{m_0} \Rightarrow \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \cdot \frac{1}{c^2} \Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \right) \Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \right) \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow v = \sqrt{c^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \right)} \Rightarrow v = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2} =
 \end{aligned}$$

$$= c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2.4 \text{ kg}}{4 \text{ kg}}\right)^2} = 0.8 \cdot c.$$

Vježba 093

Kolikom se brzinom giba tijelo čija je masa za mirnog promatrača 8 kg, ako je masa mirovanja tijela 4.8 kg? (brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$)

Rezultat: $0.8 \cdot c.$

www.halapa.com