

Zadatak 061 (Lana, gimnazija)

Promatrač gleda raketu i ustanovi da je raketa duljine L skraćena 2%. Kojom se brzinom u odnosu na promatrača giba raketa?

Rješenje 061

$$l_0 = L, \quad l = L - 2\% \cdot L = L - \frac{2}{100} \cdot L = L - 0.02 \cdot L = 0.98 \cdot L, \quad v = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Kontrakcija duljina jedan je od temeljnih zaključaka teorije relativnosti, prema kojemu se dimenzije tijela ne mogu apsolutno odrediti. Geometrijske izmjere ovise o stanju gibanja sustava u kojem se mjere.

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

gdje je l_0 vlastita duljina (duljina u sustavu koji se giba istom brzinom kao i mjereni predmet), l duljina mjerena iz sustava koji miruje, c brzina svjetlosti, v brzina gibanja predmeta.

Kontrakcija dužine zbiva se samo u smjeru relativnog gibanja, a nema je u smjerovima okomitim na smjer gibanja.

$$\begin{aligned} l &= l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 0.98 \cdot L = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 0.98 \cdot L = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{L} \Rightarrow 0.98 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0.98 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{0.98} \Rightarrow 0.98^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 \Rightarrow 0.98^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - 0.98^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - 0.9604 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 0.0396 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 0.0396 \cdot \frac{1}{c^2} \Rightarrow v^2 = 0.0396 \cdot c^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = 0.0396 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\quad}} \Rightarrow v = \sqrt{0.0396 \cdot c^2} \Rightarrow v = \sqrt{0.0396} \cdot \sqrt{c^2} \Rightarrow v = 0.2 \cdot c. \end{aligned}$$

Vježba 061

Promatrač gleda raketu i ustanovi da je raketa duljine L skraćena 3%. Kojom se brzinom u odnosu na promatrača giba raketa?

Rezultat: $v = 0.24 \cdot c$.

Zadatak 062 (Lana, gimnazija)

Kolikom se brzinom mora gibati neko tijelo da odgovarajuća vrijednost γ bude 1% veća od vrijednosti γ kada tijelo miruje? (brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rješenje 062

$$\gamma, \quad \gamma_1 = \gamma + 1\% \cdot \gamma = \gamma + \frac{1}{100} \cdot \gamma = \gamma + 0.01 \cdot \gamma = 1.01 \cdot \gamma, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Lorentzov faktor koristi se u specijalnoj teoriji relativnosti i definira

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gdje je v brzina tijela, c brzina svjetlosti. Faktor se rabi u specijalnoj teoriji relativnosti za dilataciju vremena, kontrakciju dužine i relativističku masu.

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Kada tijelo miruje brzina je jednaka nuli pa Lorentzov faktor γ ima vrijednost 1.

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ v = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{0}{c^2}}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{1} \Rightarrow \gamma = 1.$$

Kada se tijelo giba brzinom v vrijednost Lorentzova faktora poveća se za 1% pa slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_1 = 1.01 \cdot \gamma, \quad \gamma = 1 \\ \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \gamma_1 = 1.01 \cdot 1 \\ \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \gamma_1 = 1.01 \\ \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right\} \Rightarrow 1.01 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow \frac{1}{1.01} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{1.01} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad / \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1.01} \right)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{1.01^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{1.01^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.01^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{1.01^2 - 1}{1.01^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{1.01^2 - 1}{1.01^2} \quad / \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = \frac{1.01^2 - 1}{1.01^2} \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{1.0201 - 1}{1.0201} \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = \frac{0.0201}{1.0201} \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = \frac{0.0201}{1.0201} \cdot c^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{0.0201}{1.0201} \cdot c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{0.0201}{1.0201}} \cdot \sqrt{c^2} \Rightarrow v = 0.14 \cdot c \Rightarrow v = 0.14 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 4.2 \cdot 10^7 \frac{m}{s}.$$

Vježba 062

Kolikom se brzinom mora gibati neko tijelo da odgovarajuća vrijednost γ bude 2% veća od vrijednosti γ kada tijelo miruje? (brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rezultat: $v = 0.197 \cdot c \Rightarrow v = 5.91 \cdot 10^7 \frac{m}{s}.$

Zadatak 063 (Matija, srednja škola)

Mioni u laboratorijskome sustavu gibaju se brzinom $0.9 \cdot c$ i imaju vrijeme poluraspada $1.44 \cdot 10^{-5}$ s. Koliko je vrijeme poluraspada miona u sustavu u kojemu miruju? (brzina svjetlosti u praznini c)

Rješenje 063

$$v = 0.9 \cdot c, \quad T = 1.44 \cdot 10^{-5} \text{ s}, \quad T_0 = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Veza između vremenskog intervala Δt_0 u sustavu S_0 , koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S , i

vremenskog intervala Δt u sustavu S, određena je izrazom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je c brzina svjetlosti. Ta se pojava zove dilatacija vremena.

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T \Rightarrow \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow T_0 = T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_0 &= T \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1.44 \cdot 10^{-5} \text{ s} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.9 \cdot c}{c}\right)^2} = 1.44 \cdot 10^{-5} \text{ s} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.9 \cdot c}{c}\right)^2} = \\ &= 1.44 \cdot 10^{-5} \text{ s} \cdot \sqrt{1 - 0.9^2} = 6.28 \cdot 10^{-6} \text{ s} \approx 0.63 \cdot 10^{-5} \text{ s}. \end{aligned}$$

Vježba 063

Mioni u laboratorijskome sustavu gibaju se brzinom $0.95 \cdot c$ i imaju vrijeme poluraspada $1.44 \cdot 10^{-5}$ s. Koliko je vrijeme poluraspada miona u sustavu u kojemu miruju? (brzina svjetlosti u praznini c)

Rezultat: $4.50 \cdot 10^{-6}$ s.

Zadatak 064 (992, gimnazija)

Svemirski brod putuje brzinom $0.6 \cdot c$ u odnosu prema Zemlji. Nakon kojeg će vremenskog intervala u sustavu broda putnikov sat zaostajati jednu sekundu za satom na Zemlji?

Rješenje 064

$$v = 0.6 \cdot c, \quad \Delta t = 1 \text{ s}, \quad t_0 = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Veza između vremenskog intervala Δt_0 u sustavu S_0 , koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S, i vremenskog intervala Δt u sustavu S, određena je izrazom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

gdje je c brzina svjetlosti. Ta se pojava zove dilatacija vremena.

Označimo slovima:

- t_0 – vrijeme koje pokazuje putnikov sat u svemirskom brodu
- t – vrijeme koje pokazuje sat na Zemlji.

Budući da putnikov sat zaostaje za Δt za satom na Zemlji, vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \Delta t &= t - t_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - t_0 \Rightarrow \Delta t = t_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) = \Delta t \Rightarrow t_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) = \Delta t \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{\Delta t}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1} \Rightarrow t_0 = \frac{1 \text{ s}}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6 \cdot c}{c}\right)^2}} - 1} \Rightarrow t_0 = \frac{1 \text{ s}}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6 \cdot c}{c}\right)^2}} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{1 \text{ s}}{\frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} - 1} \Rightarrow t_0 = \frac{1 \text{ s}}{\frac{1}{\sqrt{1-0.36}} - 1} \Rightarrow t_0 = \frac{1 \text{ s}}{\frac{1}{\sqrt{0.64}} - 1} \Rightarrow t_0 = \frac{1 \text{ s}}{\frac{1}{0.8} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{1 \text{ s}}{1.25 - 1} \Rightarrow t_0 = \frac{1 \text{ s}}{0.25} \Rightarrow t_0 = 4 \text{ s.}$$

Vježba 064

Svemirski brod putuje brzinom $0.01 \cdot c$ u odnosu prema Zemlji. Nakon kojeg će vremenskog intervala u sustavu broda putnikova ura zaostajati jednu sekundu za urom na Zemlji?

Rezultat: 20000 s.

Zadatak 065 (Stela, maturantica)

Blizanac A krene svemirskim brodom dok blizanac B ostane na Zemlji. Nakon nekog vremena ponovno se sastanu na Zemlji.

- A. Za blizanca A proteklo je više vremena. B. Za blizanca B proteklo je više vremena.
C. Za oba je blizanca proteklo jednako vrijeme.

Rješenje 065

c – brzina svjetlosti u vakuumu

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Veza između vremenskog intervala Δt_0 u sustavu S_0 , koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S , i vremenskog intervala Δt u sustavu S , određena je izrazom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

gdje je c brzina svjetlosti. Ta se pojava zove dilatacija vremena.

Mehaničke veličine (duljina, vrijeme, masa) nemaju apsolutno značenje već ovise od relativne brzine inercijskog sustava. Vremenski interval Δt_0 neće biti isti po trajanju za promatrača u drugom inercijskom sustavu S_0 koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S .

U bržem sustavu vrijeme sporije teče.

Blizanac A proveo je neko vrijeme u vrlo brzom svemirskom brodu koji se gibao brzinom bliskom brzini svjetlosti pa njemu vrijeme sporije teče. Vrativši se na Zemlju zatekao bi svog brata blizanca kao starca. Blizancu B proteklo je više vremena. Odgovor je pod B.



Vježba 065

Blizanac A krene svemirskim brodom dok blizanac B ostane na Zemlji. Nakon nekog vremena ponovno se sastanu na Zemlji.

- A. Za blizanca A proteklo je manje vremena. B. Za blizanca B proteklo je manje vremena.
C. Za oba je blizanca proteklo jednako vrijeme.

Rezultat: A.

Zadatak 066 (Stela, maturantica)

Raketa se giba prema nepomičnoj motriteljici brzinom v u smjeru paralelnom duljini rakete. Nepomična motriteljica mjeri duljinu rakete i zaključuje da je ona duga 20 m. Dječak koji miruje u odnosu na raketu zaključit će da je duljina rakete:

- A. manja od 20 m B. jednaka 20 m C. veća od 20 m
D. ispravno je ili A. ili C., ovisno od toga je li motriteljica obavila mjerenje dok se raketa približavala ili dok se udaljavala

Rješenje 066

$$v, \quad l_0 = 20 \text{ m}, \quad c, \quad l = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Kontrakcija duljina jedan je od temeljnih zaključaka teorije relativnosti, prema kojemu se dimenzije tijela ne mogu apsolutno odrediti. Geometrijske izmjere ovise o stanju gibanja sustava u kojem se mjere.

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

gdje je l_0 vlastita duljina (duljina u sustavu koji se giba istom brzinom kao i mjereni predmet), l duljina mjerena iz sustava koji miruje, c brzina svjetlosti, v brzina gibanja predmeta.

Kontrakcija dužine zbiva se samo u smjeru relativnog gibanja, a nema je u smjerovima okomitim na smjer gibanja.

Ako štap ima vlastitu duljinu l_0 u referentnom sustavu S_0 , za promatrača u drugom inercijskom sustavu S koji se giba brzinom v u odnosu na S_0 u smjeru duljine štapa, štap će imati duljinu l . Duljina štapa je najveća u referentnom sustavu u kome štap miruje. Štap koji se relativno prema promatraču giba brzinom v izgleda kraći

$$l < l_0.$$

Budući da dječak miruje u odnosu na raketu zaključit će da je njezina duljina veća od 20 m. Odgovor je pod C.

Vježba 066

Raketa se giba prema nepomičnoj motriteljici brzinom v u smjeru paralelnom duljini rakete. Nepomična motriteljica mjeri duljinu rakete i zaključuje da je ona duga 40 m. Dječak koji miruje u odnosu na raketu zaključit će da je duljina rakete:

A. manja od 40 m B. jednaka 40 m C. veća od 40 m

D. ispravno je ili A. ili C., ovisno od toga je li motriteljica

obavila mjerenje dok se raketa približavala ili dok se udaljavala

Rezultat: C.

Zadatak 067 (Max, gimnazija)

Kolikom se brzinom giba tijelo, ako je Lorentzov faktor $\gamma = 4$? (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rješenje 067

$$\gamma = 4, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Lorentzov faktor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gdje je v brzina tijela, c brzina svjetlosti u vakuumu.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{\gamma} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad / \cdot c^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{c^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4^2}} \Rightarrow v = 0.968 \cdot c. \end{aligned}$$

Vježba 067

Kolikom se brzinom giba tijelo, ako je Lorentzov faktor $\gamma = 5$?

Rezultat: $v = 0.980 \cdot c$.

Zadatak 068 (Max, gimnazija)

Pri kojoj brzini rakete vremenski interval za mirnog motritelja na Zemlji postaje dva puta veći od vremenskog intervala putnika u raketi?

Rješenje 068

$$\Delta t = 2 \cdot \Delta t_0, \quad c, \quad v = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Veza između vremenskog intervala Δt_0 u sustavu S_0 , koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S , i

vremenskog intervala Δt u sustavu S, određena je izrazom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je c brzina svjetlosti. Ta se pojava zove dilatacija vremena.

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 2 \cdot \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 2 \cdot \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\Delta t_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{4-1}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = \frac{3}{4} \cdot c^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot c^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow v = 0.866 \cdot c. \end{aligned}$$

Vježba 068

Pri kojoj brzini rakete vremenski interval za mirnog motritelja na Zemlji postaje tri puta veći od vremenskog intervala putnika u raketi?

Rezultat: $v = 0.943 \cdot c$.

Zadatak 069 (Max, gimnazija)

Svemirski brod vlastite duljine 300 m prođe za 0.750 μs pokraj promatrača na Zemlji. Kolika je brzina broda za promatrača na Zemlji? ($c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

A. $v \approx 0.8 \cdot c$ B. $v \approx 0.7 \cdot c$ C. $v \approx 0.6 \cdot c$ D. $v \approx 0.5 \cdot c$

Rješenje 069

$l_0 = 300 \text{ m}$, $\Delta t = 0.750 \mu\text{s} = 7.5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $v = ?$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Kontrakcija duljina jedan je od temeljnih zaključaka teorije relativnosti, prema kojemu se dimenzije tijela ne mogu apsolutno odrediti. Geometrijske izmjere ovise o stanju gibanja sustava u kojem se mjere.

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

gdje je l_0 vlastita duljina (duljina u sustavu koji se giba istom brzinom kao i mjereni predmet), l duljina mjerena iz sustava koji miruje, c brzina svjetlosti, v brzina gibanja predmeta.

Kontrakcija dužine zbiva se samo u smjeru relativnog gibanja, a nema je u smjerovima okomitim na smjer gibanja.

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

$$\left. \begin{aligned} l &= v \cdot \Delta t \\ l &= l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v \cdot \Delta t = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v \cdot \Delta t = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v \cdot \Delta t)^2 = \left(l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 \Rightarrow v^2 \cdot (\Delta t)^2 = l_0^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Rightarrow v^2 \cdot (\Delta t)^2 = l_0^2 - l_0^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 \cdot (\Delta t)^2 + l_0^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} = l_0^2 \Rightarrow v^2 \cdot \left((\Delta t)^2 + \frac{l_0^2}{c^2} \right) = l_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 \cdot \left((\Delta t)^2 + \frac{l_0^2}{c^2} \right) = l_0^2 \quad / \cdot \frac{1}{(\Delta t)^2 + \frac{l_0^2}{c^2}} \Rightarrow v^2 = \frac{l_0^2}{(\Delta t)^2 + \frac{l_0^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{l_0^2}{(\Delta t)^2 + \left(\frac{l_0}{c} \right)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{l_0^2}{(\Delta t)^2 + \left(\frac{l_0}{c} \right)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{l_0^2}{(\Delta t)^2 + \left(\frac{l_0}{c} \right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{l_0}{\sqrt{(\Delta t)^2 + \left(\frac{l_0}{c} \right)^2}} = \frac{300 \text{ m}}{\sqrt{\left(7.5 \cdot 10^{-7} \text{ s} \right)^2 + \left(\frac{300 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right)^2}} = 2.4 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= \left[2.4 \cdot 10^8 : 3 \cdot 10^8 \right] = 0.8 \cdot c.$$

Vježba 069

Svemirski brod vlastite duljine 0.3 km prođe za 0.750 μs pokraj promatrača na Zemlji. Kolika je brzina broda za promatrača na Zemlji? ($c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

- A. $v \approx 0.8 \cdot c$ B. $v \approx 0.7 \cdot c$ C. $v \approx 0.6 \cdot c$ D. $v \approx 0.5 \cdot c$

Rezultat: A.

Zadatak 070 (Ante, srednja škola)

Čestica se giba brzinom $v = \frac{3}{4} \cdot c$. Koliko puta je masa čestice veća od njezine mase u mirovanju?

Rješenje 070

$$v = \frac{3}{4} \cdot c = 0.75 \cdot c, \quad \frac{m}{m_0} = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Jedan je od osnovnih rezultata specijalne teorije relativnosti promjena mase s brzinom:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je m masa tijela u gibanju, m_0 masa mirovanja, v brzina tijela i c brzina svjetlosti u vakuumu.

$$\begin{aligned} \frac{m}{m_0} &= \frac{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{m_0} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{m_0}{\frac{m_0}{1}} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{m_0}{\frac{m_0}{1}} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.75 \cdot c}{c}\right)^2}} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.75 \cdot c}{c}\right)^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.75^2}} \Rightarrow \frac{m}{m_0} \approx 1.5. \end{aligned}$$

Vježba 070

Čestica se giba brzinom $v = \frac{1}{4} \cdot c$. Koliko puta je masa čestice veća od njezine mase u mirovanju?

Rezultat: 1.03.

Zadatak 071 (Ante, srednja škola)

Kolikom se brzinom giba tijelo, čija je masa za mirnog promatrača $m = 4.0$ kg, ako je masa tog tijela u mirovanju $m_0 = 2.4$ kg?

Rješenje 071

$$m = 4.0 \text{ kg}, \quad m_0 = 2.4 \text{ kg}, \quad v = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Jedan je od osnovnih rezultata specijalne teorije relativnosti promjena mase s brzinom:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je m masa tijela u gibanju, m_0 masa mirovanja, v brzina tijela i c brzina svjetlosti u vakuumu.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{m_0} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{m_0}{m} &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{m_0}{m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \quad / \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right) \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{c^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right)} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = \\ &= c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2.4 \text{ kg}}{4.0 \text{ kg}}\right)^2} = 0.8 \cdot c. \end{aligned}$$

Vježba 071

Kolikom se brzinom giba tijelo, čija je masa za mirnog promatrača $m = 400$ dag, ako je masa tog tijela u mirovanju $m_0 = 240$ dag?

Rezultat: $0.8 \cdot c$.

Zadatak 072 (Ivica, srednja škola)

Odredi energiju koja odgovara masi protona koji miruje. (masa protona $m = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg, brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rješenje 072

$$m = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad E = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

U specijalnoj teoriji relativnosti Einstein je pokazao da se masa i energija ne mogu očuvati odvojeno već se može govoriti samo o očuvanju ukupne mase i energije sustava. Ekvivalentnost mase i energije dana je relacijom

$$E = m \cdot c^2.$$

u kojoj je m masa tijela, a c brzina svjetlosti.

Elektronvolt je jedinica za energiju. Energiju 1 eV dobije čestica nabijena istim električnim nabojem kao što ga ima elektron ($1.602 \cdot 10^{-19}$ C) kada prođe električnim poljem razlike potencijala 1 V:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

$$\begin{aligned} E = m \cdot c^2 &= 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1.50534 \cdot 10^{-10} \text{ J} = \\ &= \left[1.50534 \cdot 10^{-10} : 1.602 \cdot 10^{-19}\right] = 9.4 \cdot 10^8 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Vježba 072

Odredi energiju koja odgovara masi protona koji miruje. (masa protona $m = 1.6726 \cdot 10^{-30}$ t, brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rezultat: $9.4 \cdot 10^8 \text{ eV}$.

Zadatak 073 (Ivica, srednja škola)

Kolikoj promjeni mase odgovara promjena energije 4.19 J? (brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rješenje 073

$$\Delta E = 4.19 \text{ J}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad \Delta m = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

U specijalnoj teoriji relativnosti Einstein je pokazao da se masa i energija ne mogu očuvati odvojeno već se može govoriti samo o očuvanju ukupne mase i energije sustava. Ekvivalentnost mase i energije dana je relacijom

$$E = m \cdot c^2.$$

u kojoj je m masa tijela, a c brzina svjetlosti.

$$\begin{aligned} \Delta E = \Delta m \cdot c^2 &\Rightarrow \Delta m \cdot c^2 = \Delta E \Rightarrow \Delta m \cdot c^2 = \Delta E \cdot \frac{1}{c^2} \Rightarrow \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \\ &= \frac{4.19 \text{ J}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 4.66 \cdot 10^{-17} \text{ kg}. \end{aligned}$$

Vježba 073

Kolikoj promjeni mase odgovara promjena energije 8.38 J? (brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rezultat: $9.31 \cdot 10^{-17} \text{ kg}$.

Zadatak 074 (Arijana, srednja škola)

Astronaut leti u raketi brzinom jednakom $0.8 \cdot c$ relativno prema Zemlji. Nakon što je u raketi prošlo 30 godina, koliko je vremena proteklo na Zemlji?

Rješenje 074

$$v = 0.8 \cdot c, \quad \Delta t_0 = 30 \text{ god}, \quad \Delta t = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Veza između vremenskog intervala Δt_0 u sustavu S_0 , koji se giba brzinom v u odnosu na sustav S , i vremenskog intervala Δt u sustavu S , određena je izrazom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je c brzina svjetlosti. Ta se pojava zove dilatacija vremena.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.8 \cdot c}{c}\right)^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.8 \cdot c}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 0.64}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{0.36}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{0.6} = \frac{30 \text{ god}}{0.6} = 50 \text{ god.}$$



Vježba 074

Astronaut leti u raketi brzinom jednakom $0.8 \cdot c$ relativno prema Zemlji. Nakon što su u raketi prošle 24 godine, koliko je vremena proteklo na Zemlji?

Rezultat: 40 god.

Zadatak 075 (Roby, gimnazija)

Odredite energiju mirovanja, masu, brzinu i količinu gibanja elektrona kinetičke energije $6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J}$. (masa elektrona $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rješenje 075

$$E_k = 6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J}, \quad m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad E_0 = ?, \quad m = ?,$$

$$v = ?, \quad p = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Jedan je od osnovnih rezultata specijalne teorije relativnosti promjena mase s brzinom. Masa tijela koje se giba veća je od mase tijela koje miruje.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je m masa tijela u gibanju, m_0 masa mirovanja, v brzina tijela i c brzina svjetlosti.

Ako tijelo u stanju mirovanja ima masu m_0 , a kad se giba brzinom v masu m , onda je njegova kinetička energija

$$E_k = E - E_0 \Rightarrow E_k = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 \Rightarrow E_k = (m - m_0) \cdot c^2 \Rightarrow E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

gdje je:

$E = m \cdot c^2$ ukupna energija tijela mase mirovanja m_0 koje se giba brzinom v ,

$E_0 = m_0 \cdot c^2$ energija mirovanja tijela.

Relativistička količina gibanja čestice mase mirovanja m_0 koja se giba brzinom v je

$$p = m \cdot v \Rightarrow p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v.$$

- Energija mirovanja elektrona iznosi:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 8.199 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

- Masa elektrona kinetičke energije E_k iznosi:

$$\begin{aligned} E_k = E - E_0 &\Rightarrow E_k = m \cdot c^2 - E_0 \Rightarrow m \cdot c^2 - E_0 = E_k \Rightarrow m \cdot c^2 = E_k + E_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot c^2 = E_k + E_0 \quad / \cdot \frac{1}{c^2} \Rightarrow m = \frac{E_k + E_0}{c^2} = \\ &= \frac{6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J} + 8.199 \cdot 10^{-14} \text{ J}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 8.189 \cdot 10^{-30} \text{ kg}. \end{aligned}$$

- Brzina elektrona kinetičke energije E_k iznosi:

$$\begin{aligned} E_k &= m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \Rightarrow E_k = E_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_k = E_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad / \cdot \frac{1}{E_0} \Rightarrow \frac{E_k}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{E_k}{E_0} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{E_k}{E_0} + \frac{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{E_k + E_0}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow \frac{E_0}{E_k + E_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{E_0}{E_k + E_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad / ^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{E_0}{E_k + E_0} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{E_0^2}{(E_k + E_0)^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{E_0^2}{(E_k + E_0)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1} - \frac{E_0^2}{(E_k + E_0)^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{(E_k + E_0)^2 - E_0^2}{(E_k + E_0)^2} \Rightarrow \left[a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} &= \frac{(E_k + E_0 - E_0) \cdot (E_k + E_0 + E_0)}{(E_k + E_0)^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{(E_k + E_0 - E_0) \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}{(E_k + E_0)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}{(E_k + E_0)^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}{(E_k + E_0)^2} \cdot c^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \frac{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}{(E_k + E_0)^2} \Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \frac{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}{(E_k + E_0)^2} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = \sqrt{c^2 \cdot \frac{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}{(E_k + E_0)^2}} \Rightarrow v = c \cdot \frac{\sqrt{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}}{E_k + E_0} = \\ &= 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J} \cdot (6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J} + 2 \cdot 8.199 \cdot 10^{-14} \text{ J})}}{6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J} + 8.199 \cdot 10^{-14} \text{ J}} = 2.98 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

- Količina gibanja elektrona kinetičke energije E_k iznosi:

$$\begin{aligned} p = m \cdot v &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{E_k + E_0}{c^2} \\ v = c \cdot \frac{\sqrt{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}}{E_k + E_0} \end{array} \right] \Rightarrow p = \frac{E_k + E_0}{c^2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}}{E_k + E_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow p = \frac{E_k + E_0}{c^2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}}{E_k + E_0} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{E_k \cdot (E_k + 2 \cdot E_0)}}{c} = \\ &= \frac{\sqrt{6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J} \cdot (6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J} + 2 \cdot 8.199 \cdot 10^{-14} \text{ J})}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2.44 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Vježba 075

Odredite masu elektrona koji ima kinetičku energiju $3.2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$. (masa elektrona $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rezultat: $4.47 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$.

Zadatak 076 (Roby, gimnazija)

Pri kojoj će brzini čestice relativistička kinetička energija biti dva put veća od energije mirovanja? (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rješenje 076

$$E_k = 2 \cdot E_0, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Jedan je od osnovnih rezultata specijalne teorije relativnosti promjena mase s brzinom. Masa tijela koje se giba veća je od mase tijela koje miruje.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je m masa tijela u gibanju, m_0 masa mirovanja, v brzina tijela i c brzina svjetlosti.

Ako tijelo u stanju mirovanja ima masu m_0 , a kad se giba brzinom v masu m , onda je njegova kinetička energija

$$E_k = E - E_0 \Rightarrow E_k = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2,$$

gdje je:

$E = m \cdot c^2$ ukupna energija tijela mase mirovanja m_0 koje se giba brzinom v ,

$E_0 = m_0 \cdot c^2$ energija mirovanja tijela.

$$E_k = 2 \cdot E_0 \Rightarrow E - E_0 = 2 \cdot E_0 \Rightarrow E = 2 \cdot E_0 + E_0 \Rightarrow E = 3 \cdot E_0 \Rightarrow m \cdot c^2 = 3 \cdot m_0 \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot c^2 = 3 \cdot m_0 \cdot c^2 \quad /: c^2 \Rightarrow m = 3 \cdot m_0 \Rightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3 \cdot m_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3 \cdot m_0 \quad /: m_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3 \Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{3} \quad / \quad \sqrt{\quad} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{1} \Rightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \frac{1-9}{9} \Rightarrow -\frac{v^2}{c^2} = -\frac{8}{9} \Rightarrow -\frac{v^2}{c^2} = -\frac{8}{9} \quad / \cdot (-c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{8}{9} \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = \frac{8}{9} \cdot c^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{8}{9} \cdot c^2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot c \Rightarrow v = \frac{\sqrt{4 \cdot 2}}{3} \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot c = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 2.83 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

Vježba 076

Pri kojoj će brzini čestice energija mirovanja biti dva put manja od relativističke kinetičke energije? (brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m / s)

Rezultat: $2.83 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Zadatak 077 (Ivan, gimnazija)

Koliku će duljinu štapa mjeriti miran promatrač sa Zemlje ako se štap nalazi u letjelici koja se giba pored Zemlje brzinom $0.8 \cdot c$? Vlastita duljina štapa iznosi 10 cm. Štap je položen svojom duljinom u smjeru gibanja letjelice.

- A. 0 cm B. 6 cm C. 10 cm D. 16.67 cm

Rješenje 077

$$v = 0.8 \cdot c, \quad l_0 = 10 \text{ cm}, \quad l = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Kontrakcija duljina jedan je od temeljnih zaključaka teorije relativnosti, prema kojemu se dimenzije tijela ne mogu apsolutno odrediti. Geometrijske izmjere ovise o stanju gibanja sustava u kojem se mjere.

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

gdje je l_0 vlastita duljina (duljina u sustavu koji se giba istom brzinom kao i mjereni predmet), l duljina mjerena iz sustava koji miruje, c brzina svjetlosti, v brzina gibanja predmeta.

Kontrakcija dužine zbiva se samo u smjeru relativnog gibanja, a nema je u smjerovima okomitim na smjer gibanja.

$$\begin{aligned} l &= l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.8 \cdot c}{c}\right)^2} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.8 \cdot c}{c}\right)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - 0.8^2} = 10 \text{ cm} \cdot \sqrt{1 - 0.64} = 10 \text{ cm} \cdot \sqrt{0.36} = 10 \text{ cm} \cdot 0.6 = 6 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B

Vježba 077

Koliku će duljinu štapa mjeriti miran promatrač sa Zemlje ako se štap nalazi u letjelici koja se giba pored Zemlje brzinom c ? Vlastita duljina štapa iznosi 10 cm. Štap je položen svojom duljinom u smjeru gibanja letjelice.

- A. 0 cm B. 6 cm C. 10 cm D. 16.67 cm

Rezultat: A.

Zadatak 078 (Rada, gimnazija)

Dva svemirska broda gibaju se jedan prema drugom. Promatrač na Zemlji izmjeri brzinu prvog broda $0.75 \cdot c$, a drugog $0.85 \cdot c$. Kolika je brzina drugog broda u odnosu na prvi? (c je brzina svjetlosti)

Rješenje 078

$$v_1 = 0.75 \cdot c, \quad v_2 = 0.85 \cdot c, \quad v_r = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

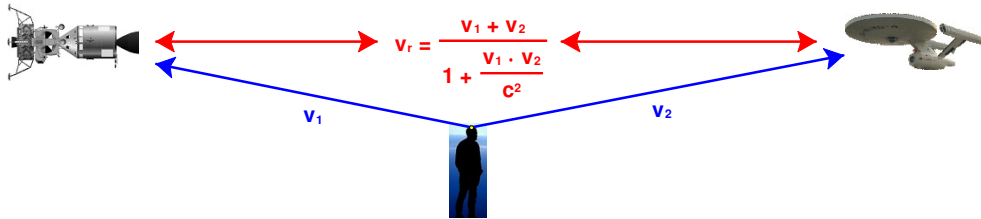
U specijalnoj teoriji relativnosti brzina približavanja jedne rakete drugoj (relativna brzina) je:

$$v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}},$$

gdje je v_1 brzina prve rakete, v_2 brzina druge rakete, c brzina svjetlosti.

$$v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} \Rightarrow v_r = \frac{0.75 \cdot c + 0.85 \cdot c}{1 + \frac{0.75 \cdot c \cdot 0.85 \cdot c}{c^2}} \Rightarrow v_r = \frac{1.6 \cdot c}{1 + \frac{0.6375 \cdot c^2}{c^2}} \Rightarrow v_r = \frac{1.6 \cdot c}{1 + \frac{0.6375 \cdot c^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_r = \frac{1.6 \cdot c}{1 + 0.6375} \Rightarrow v_r = \frac{1.6 \cdot c}{1.6375} \Rightarrow v_r = 0.977 \cdot c.$$



Vježba 078

Dvije rakete gibaju se jedna prema drugoj brzinama $0.75 \cdot c$ u odnosu na promatrača koji miruje. Odredite brzinu približavanja raketa na temelju klasične i relativističke formule slaganja brzina.

Rezultat: Klasična teorija: $v = v_1 + v_2 = \dots = 1.5 \cdot c$.

Relativistička teorija: $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} = \dots = 0.96 \cdot c$.

Zadatak 079 (Rada, gimnazija)

Pokraj mirnog promatrača prolazi jezgra brzinom $0.8 \cdot c$. U jednom trenutku jezgra emitira česticu brzinom $0.7 \cdot c$. Brzina je zadana u odnosu na jezgro. Kolika je brzina čestice za mirnog promatrača? Brzina jezgre ne mijenja se emitiranjem čestice. (c je brzina svjetlosti)

Rješenje 079

$$v_1 = 0.8 \cdot c, \quad v_r = 0.7 \cdot c, \quad v_2 = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

U specijalnoj teoriji relativnosti brzina približavanja jedne rakete drugoj (relativna brzina) je:

$$v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}},$$

gdje je v_1 brzina prve rakete, v_2 brzina druge rakete, c brzina svjetlosti.

$$v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} \Rightarrow v_r = \frac{v_1 + v_2}{\frac{1}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}} \Rightarrow v_r = \frac{v_1 + v_2}{\frac{c^2 + v_1 \cdot v_2}{c^2}} \Rightarrow v_r = \frac{c^2 \cdot (v_1 + v_2)}{c^2 + v_1 \cdot v_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_r = \frac{c^2 \cdot v_1 + c^2 \cdot v_2}{c^2 + v_1 \cdot v_2} \Rightarrow v_r = \frac{c^2 \cdot v_1 + c^2 \cdot v_2}{c^2 + v_1 \cdot v_2} \cdot \frac{1}{1} \cdot (c^2 + v_1 \cdot v_2) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v_r \cdot (c^2 + v_1 \cdot v_2) = c^2 \cdot v_1 + c^2 \cdot v_2 \Rightarrow v_r \cdot c^2 + v_r \cdot v_1 \cdot v_2 = c^2 \cdot v_1 + c^2 \cdot v_2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow v_r \cdot v_1 \cdot v_2 - c^2 \cdot v_2 = c^2 \cdot v_1 - v_r \cdot c^2 \Rightarrow v_2 \cdot (v_r \cdot v_1 - c^2) = c^2 \cdot (v_1 - v_r) \Rightarrow \\
&\Rightarrow v_2 \cdot (v_r \cdot v_1 - c^2) = c^2 \cdot (v_1 - v_r) \cdot \frac{1}{v_r \cdot v_1 - c^2} \Rightarrow v_2 = \frac{c^2 \cdot (v_1 - v_r)}{v_r \cdot v_1 - c^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow v_2 = \frac{c^2 \cdot (0.8 \cdot c - 0.7 \cdot c)}{0.7 \cdot c \cdot 0.8 \cdot c - c^2} \Rightarrow v_2 = \frac{c^2 \cdot 0.1 \cdot c}{0.56 \cdot c^2 - c^2} \Rightarrow v_2 = \frac{c^2 \cdot 0.1 \cdot c}{-0.44 \cdot c^2} \Rightarrow v_2 = \frac{c^2 \cdot 0.1 \cdot c}{-0.44 \cdot c^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow v_2 = \frac{0.1 \cdot c}{-0.44} \Rightarrow v_2 = -0.227 \cdot c.
\end{aligned}$$

Vježba 079

Pokraj mirnog promatrača prolazi jezgra brzinom $0.8 \cdot c$. U jednom trenutku jezgra emitira česticu brzinom $0.6 \cdot c$. Brzina je zadana u odnosu na jezgru. Kolika je brzina čestice za mirnog promatrača? Brzina jezgre ne mijenja se emitiranjem čestice. (c je brzina svjetlosti)

Rezultat: $-0.417 \cdot c$.

Zadatak 080 (Vesna, gimnazija)

Da bi znale odrediti relativne brzine, rakete sa strane imaju nacrtane mjerne štapove duljine 1 m. Promatrač u raketi A izmjeri da je štap na raketi B dug 0.93 m. Kolika je relativna brzina kojom se rakete mimoilaze? Koju će duljinu štapa na raketi A izmjeriti promatrač u raketi B? (c je brzina svjetlosti)

Rješenje 080

$$l_0 = 1 \text{ m}, \quad l = 0.93 \text{ m}, \quad c, \quad v = ?$$

Specijalna teorija relativnosti

- Svi zakoni fizike su invarijantni (nepromjenljivi, isti) u odnosu na svaki inercijski sustav.
- Brzina elektromagnetskih valova u vakuumu je invarijantna (nepromjenljiva, ista) u odnosu na svaki inercijski sustav i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Kontrakcija duljina jedan je od temeljnih zaključaka teorije relativnosti, prema kojemu se dimenzije tijela ne mogu apsolutno odrediti. Geometrijske izmjere ovise o stanju gibanja sustava u kojem se mjere.

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

gdje je l_0 vlastita duljina (duljina u sustavu koji se giba istom brzinom kao i mjereni predmet), l duljina mjerena iz sustava koji miruje, c brzina svjetlosti, v brzina gibanja predmeta.

Kontrakcija dužine zbiva se samo u smjeru relativnog gibanja, a nema je u smjerovima okomitim na smjer gibanja.

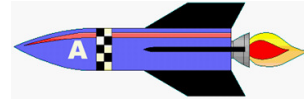
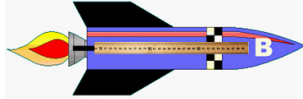
Neka je v relativna brzina kojom se rakete mimoilaze. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
l &= l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{l_0} \Rightarrow \frac{l}{l_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{l}{l_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{l_0} \Rightarrow \\
\Rightarrow \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 &= 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} \cdot c \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.93 \text{ m}}{1 \text{ m}}\right)^2} = 0.37 \cdot c.$$

Duljina štapa na raketi A koju izmjeri promatrač u raketi B jednaka je duljini štapa na raketi B koju izmjeri promatrač u raketi A. Provjerimo to računski!

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.37 \cdot c}{c}\right)^2} \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.37 \cdot c}{c}\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow l = l_0 \cdot \sqrt{1 - 0.37^2} = 1 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - 0.37^2} = 0.93 \text{ m}.$$



Vježba 080

Da bi znale odrediti relativne brzine, rakete sa strane imaju nacrtane mjerne štapove duljine 10 dm. Promatrač u raketi A izmjeri da je štap na raketi B dug 93 cm. Kolika je relativna brzina kojom se rakete mimoilaze? Koju će duljinu štapa na raketi A izmjeriti promatrač u raketi B? (c je brzina svjetlosti)

Rezultat: $0.37 \cdot c$, 0.93 m .

www.halapa.com