

Zadatak 001 (Ivan, gimnazija)

Jedan blizanac odmah nakon rođenja ulazi u raketu. Koliko je vremena prošlo na Zemlji, ako je u raketi prošlo 10 godina? Brzina rakete je 280 000 km/s, a brzina svjetlosti 300 000 km/s.

Rješenje 001

$$t' = 10 \text{ godina}, \quad v = 280\,000 \text{ km/s}, \quad c = 300\,000 \text{ km/s}, \quad t = ?$$

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{10 \text{ godina}}{\sqrt{1 - \left(\frac{280\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}}\right)^2}} = \frac{10 \text{ godina}}{\sqrt{1 - \left(\frac{14}{15}\right)^2}} = 27.85 \text{ godina}.$$

Vježba 001

Jedan blizanac odmah nakon rođenja ulazi u raketu. Koliko je vremena prošlo na Zemlji, ako je u raketi prošlo 20 godina? Brzina rakete je 270 000 km/s, a brzina svjetlosti 300 000 km/s.

Rezultat: 45.88 godina.

Zadatak 002 (Ivan, gimnazija)

Raketa se giba brzinom $v = 0.99 \cdot c$ (c je brzina svjetlosti u vakuumu) u odnosu na nepokretnog motritelja na Zemlji. Ako je duljina predmeta 1 m u raketi, u smjeru gibanja rakete, kolika je to duljina za motritelja na Zemlji?

Rješenje 002

$$l' = 1 \text{ m}, \quad v = 0.99 \cdot c, \quad l = ?$$

$$l = l' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l' \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.99 \cdot c}{c}\right)^2} = 1 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - 0.99^2} \approx 0.14 \text{ m} = 14 \text{ cm}.$$

Vježba 002

Raketa se giba brzinom $v = 0.9 \cdot c$ (c je brzina svjetlosti u vakuumu) u odnosu na nepokretnog motritelja na Zemlji. Ako je duljina predmeta 2 m u raketi, u smjeru gibanja rakete, kolika je to duljina za motritelja na Zemlji?

Rezultat: 0.87 m = 87 cm.

Zadatak 003 (Ivan, gimnazija)

Raketa se giba brzinom $v = 0.99c$ (c je brzina svjetlosti u vakuumu) u odnosu na nepokretnog motritelja na Zemlji. Gustoća mjedi u raketi je 8 500 kg/m³. Kolika je gustoća mjedi za motritelja na Zemlji?

Rješenje 003

$$v = 0.99c, \quad \rho' = 8\,500 \text{ kg/m}^3, \quad \rho = ?$$

Masa i obujam za mirnog motritelja računaju se po formulama:

$$m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad V = V' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Gustoća za motritelja na Zemlji računa se: $\rho = \frac{m}{V}.$

Gustoća u raketi: $\rho' = \frac{m'}{V'}.$

Sada je:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{m'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{V' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m'}{V' \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{m'}{V'} \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \rho' \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \rho' \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 8500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{1}{1-0.99^2} = 8500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 50.25 = 427125 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Gustoća mjedi za motritelja na Zemlji je 427 125 kg/m³.

Vježba 003

Raketa se giba brzinom $v = 0.9c$ (c je brzina svjetlosti u vakuumu) u odnosu na nepokretnog motritelja na Zemlji. Gustoća mjedi u raketi je 6 500 kg/m³. Kolika je gustoća mjedi za motritelja na Zemlji?

Rezultat: 34 190 kg/m³.

Zadatak 004 (Anela, gimnazija)

Kolika je brzina elektrona, čija je masa 10% veća od mase mirovanja, ako je c brzina svjetlosti u vakuumu?

Rješenje 004

$$m = m_0 + 10\% \cdot m_0 = m_0 + 0.10 \cdot m_0 = 1.1 \cdot m_0, \quad v = ?$$

Jedan je od osnovnih rezultata specijalne teorije relativnosti promjena mase s brzinom:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

gdje je m masa tijela u gibanju, m_0 masa mirovanja, v brzina tijela i c brzina svjetlosti u vakuumu.

Zato je:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1.1 \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad /: m_0 \Rightarrow 1.1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1.1} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1.21} \Rightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1.21} - 1 \Rightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \frac{-0.21}{1.21} \quad / \cdot (-c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \frac{0.21}{1.21} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = 0.417 \cdot c.$$

Vježba 004

Kolika je brzina elektrona, čija je masa 20% veća od mase mirovanja, ako je c brzina svjetlosti u vakuumu?

Rezultat: $v = 0.553 \cdot c$.

Zadatak 005 (Vanja, gimnazija)

Kolikom bi se brzinom trebao gibati neki inercijalni sustav pa da vrijeme u njemu teče upola sporije?

Rješenje 005

$$\Delta t' = 2 \cdot \Delta t, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Označimo s Δt vremenski interval u sustavu koji miruje, a s $\Delta t'$ vremenski interval u inercijalnom sustavu koji se giba brzinom v u odnosu na prvi sustav. Iz **Lorentzovih transformacija** slijedi:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Zbog uvjeta zadatka

$$\Delta t' = 2 \cdot \Delta t,$$

dalje pišemo:

$$2 \cdot \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad /: \Delta t \Rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \quad /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad / \cdot c \Rightarrow v = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 2.6 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

Vježba 005

Kolikom bi se brzinom trebao gibati neki inercijalni sustav pa da vrijeme u njemu teče tri puta sporije?

Rezultat: $v = 2.83 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$

Zadatak 006 (Vanja, gimnazija)

Dva se inercijalna sustava S i S' jedan prema drugome gibaju uzduž osi x konstantnom brzinom 0.9c. Štap se nalazi u sustavu S' između točaka A(0 m, 0 m, 0 m) i B(1 m, 1 m, 0 m). Kolika je duljina štapa izmjerena iz sustava S?

Rješenje 006

$$v = 0.9c, \quad A(0, 0, 0) = A(x'_1, y'_1, z'_1), \quad B(1, 1, 0) = B(x'_2, y'_2, z'_2), \quad d = ?$$

Duljina štapa u sustavu S' (vlastita duljina) je

$$d_0 = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2} \approx 1.41 \text{ m}.$$

Budući da se kontrakcija opaža samo u smjeru relativnog gibanja, to će motritelj iz sustava S izmjeriti:

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (1-0) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.9c}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - 0.9^2} = \sqrt{1 - 0.81} = 0.44 \text{ m},$$

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1 = 1 - 0 = 1 \text{ m}, \quad z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1 = 0 - 0 = 0 \text{ m}.$$

Tada duljina štapa izmjerena iz sustava S iznosi:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(0.44)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1.1936} \approx 1.09 \text{ m}.$$

Vježba 006

Dva se inercijalna sustava S i S' jedan prema drugome gibaju uzduž osi x konstantnom brzinom 0.9c. Štap se nalazi u sustavu S' između točaka A(0 m, 0 m, 0 m) i B(1 m, 1 m, 1 m). Kolika je duljina štapa izmjerena iz sustava S?

Rezultat: $d = 1.48 \text{ m}.$

Zadatak 007 (Vanja, gimnazija)

Izračunaj količinu gibanja i kinetičku energiju elektrona koji se giba brzinom $v = 0.85c$ (gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu).

Rješenje 007

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v = 0.85c = 0.85 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2.55 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad p = ?,$$

$$E_k = ?$$

Količina gibanja elektrona je $p = m \cdot v$, gdje je

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

pa se dobije

$$p = m \cdot v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot v = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.85c}{c}\right)^2}} \cdot 2.55 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{\sqrt{1 - 0.85^2}} \cdot 2.55 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4.41 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Možemo računati i ovako:

$$\begin{aligned} p = m \cdot v &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot v = m_0 \cdot c \cdot \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{0.85}{\sqrt{1 - 0.85^2}} = \\ &= 2.73 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{0.85}{\sqrt{1 - 0.85^2}} = 4.41 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Ukupna energija tijela mase mirovanja m_0 koje se giba brzinom v iznosi:

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2,$$

gdje je $m_0 \cdot c^2 = E_0$ energija mirovanja tijela. U relativističkoj mehanici pod kinetičkom energijom podrazumijeva se razlika između ukupne energije E tijela i energije mirovanja E_0 . Kinetička energija je:

$$\begin{aligned} E_k = E - E_0 &= m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) = \\ &= 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.85c}{c}\right)^2}} - 1 \right) = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.85^2}} - 1 \right) = \\ &= 8.19 \cdot 10^{-14} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.85^2}} - 1 \right) = 7.36 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 73.6 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 73.6 \text{ fJ}. \end{aligned}$$

Vježba 007

Izračunaj količinu gibanja i kinetičku energiju elektrona koji se giba brzinom $v = 0.9c$ (gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu).

Rezultat: $p = 5.64 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$, $E_k = 1.0599 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 105.99 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 105.99 \text{ fJ}$.

Zadatak 008 (Vanja, gimnazija)

Raketa se giba u odnosu na motritelja u nepokretnom koordinatnom sustavu brzinom $v = 0.95c$ (gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu). Ako je duljina rakete l_0 , izračunajte koliko je skraćenje (kontrakcija) duljine rakete u smjeru gibanja, za motritelja u sustavu koji miruje.

Rješenje 008

$$v = 0.95c, \quad l_0, \quad l = ?$$

Duljina rakete u smjeru gibanja za mirnog motritelja iznosi:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.95c}{c}\right)^2} = l_0 \cdot \sqrt{1 - 0.95^2} = 0.31 \cdot l_0.$$

Vježba 008

Raketa se giba u odnosu na motritelja u nepokretnom koordinatnom sustavu brzinom $v = 0.99c$ (gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu). Ako je duljina rakete l_0 , izračunajte koliko je skraćenje (kontrakcija) duljine rakete u smjeru gibanja, za motritelja u sustavu koji miruje.

Rezultat: $0.14 \cdot l_0$.

Zadatak 009 (Petra, gimnazija)

Kako teče vrijeme u koordinatnom sustavu vezanom za foton?

Rješenje 009

$$v = c, \quad \Delta t, \quad \Delta t' = ?$$

Budući da se foton giba brzinom svjetlosti (i da samo tada egzistira), iz relacije

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dobije se

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{\Delta t}{0} = \infty.$$

Znači da se u sustavu vezanom za foton gubi pojam vremena.

Vježba 009

Kolika je masa fotona elektromagnetskog zračenja frekvencije $0.5 \cdot 10^{15}$ Hz?

Rezultat:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Einsteinova relacija} \\ E = m \cdot c^2 \\ \text{Planckova relacija} \\ E = h \cdot \nu \end{array} \right\} \Rightarrow m \cdot c^2 = h \cdot \nu \Rightarrow m = \frac{h \cdot \nu}{c^2} = 3.7 \cdot 10^{-36} \text{ kg}.$$

Zadatak 010 (Petra, gimnazija)

Kolika energija odgovara masi elektrona u mirovanju?

Rješenje 010

$$m = m_0 = m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad E = ?$$

Iz Einsteinove relacije

$$E = m \cdot c^2$$

uzimajući da je $m = m_0$ slijedi

$$E = m \cdot c^2 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 82 \text{ fJ}.$$

Vježba 010

Kolika energija odgovara masi protona u mirovanju? ($m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg)

Rezultat: $1.51 \cdot 10^{-10}$ kg.

Zadatak 011 (Vanja, gimnazija)

Odredi energiju mirovanja i masu elektrona kinetičke energije $6.55 \cdot 10^{-13}$ J.

Rješenje 011

$$E_k = 6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J}, \quad m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad E_0 = ?, \quad m = ?$$

Energija mirovanja elektrona je:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 8.19 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Ukupna energija tijela mase mirovanja m_0 koje se giba brzinom v iznosi:

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je $E_0 = m_0 \cdot c^2$ energija mirovanja tijela. Kinetička energija je:

$$E_k = E - E_0 = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2.$$

Sada se masa m lako izračuna. Iz $E_k = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$ dobivamo:

$$m = \frac{E_k + E_0}{c^2} = \frac{6.55 \cdot 10^{-13} \text{ J} + 8.19 \cdot 10^{-14} \text{ J}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2} = 8.19 \cdot 10^{-30} \text{ kg} = \frac{8.19 \cdot 10^{-30} \text{ kg}}{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \approx 9 \cdot m_0.$$

Vježba 011

Odredi energiju mirovanja i masu elektrona kinetičke energije $1.31 \cdot 10^{-12} \text{ J}$.

Rezultat: $1.55 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \approx 17m_0$.

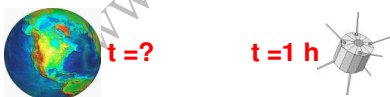
Zadatak 012 (Vanja, gimnazija)

Zemljin satelit giba se brzinom $v = 8 \text{ km/s}$. Za koliko je dulje zemaljsko vrijeme od 1 sata u satelitu?

Rješenje 012

$$v = 8 \text{ km/s} = 8000 \text{ m/s}, \quad c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad t' = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}, \quad \Delta t = ?$$

Zemaljsko vrijeme dulje je za:



$$\Delta t = t' \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = t' \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} - 1 \right) = 3600 \text{ s} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{8000}{3 \cdot 10^8} \right)^2}} - 1 \right) = 1.44 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1.44 \mu\text{s}.$$

Vježba 012

Zemljin satelit giba se brzinom $v = 8 \text{ km/s}$. Za koliko je dulje zemaljsko vrijeme od 2 sata u satelitu?

Rezultat: $2.88 \mu\text{s}$.

Zadatak 013 (Mira, gimnazija)

Dvije se rakete gibaju jedna prema drugoj brzinama $v_1 = v_2 = 0.75 \cdot c$ u odnosu na mirnog motritelja na Zemlji. Kolika je brzina približavanja raketa u: 1. klasičnoj mehanici, 2. relativističkoj mehanici?

Rješenje 013

$$v_1 = v_2 = 0.75 \cdot c, \quad v_r = ?$$

1. klasična mehanika



U klasičnoj mehanici brzina približavanja jedne rakete drugoj (relativna brzina) je:

$$v_r = v_1 + v_2 = 0.75 \cdot c + 0.75 \cdot c = 1.5 \cdot c,$$

gdje je $c = 3 \cdot 10^8$ m/s brzina svjetlosti u vakuumu.

Napomena:

Rezultat je u suprotnosti sa rezultatima specijalne teorije relativnosti, po kojoj je najveća brzina tijela u prirodi c , bez obzira na usvojeni referentni sustav.

2. relativistička mehanika



U specijalnoj teoriji relativnosti brzina približavanja jedne rakete drugoj (relativna brzina) je:

$$v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} = \frac{0.75 \cdot c + 0.75 \cdot c}{1 + \frac{0.75 \cdot c \cdot 0.75 \cdot c}{c^2}} = \frac{1.5 \cdot c}{1 + \frac{0.5625 \cdot c^2}{c^2}} = \frac{1.5 \cdot c}{1.5625} = 0.96 \cdot c,$$

gdje je $c = 3 \cdot 10^8$ m/s brzina svjetlosti u vakuumu.

Vježba 013

Dvije se rakete gibaju jedna prema drugoj brzinama $v_1 = v_2 = 0.9 \cdot c$ u odnosu na mirnog motritelja na Zemlji. Kolika je brzina približavanja raketa u: 1. klasičnoj mehanici 2. relativističkoj mehanici?

Rezultat: 1. klasična mehanika: $v_r = 1.8 \cdot c$, 2. relativistička mehanika: $v_r = 0.994 \cdot c$.

Zadatak 014 (Mira, gimnazija)

Kolika je količina gibanja elektrona kada se giba brzinom $v = 0.8 \cdot c$? (Masa elektrona u mirovanju je $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, a brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rješenje 014

$$v = 0.8 \cdot c = 0.8 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2.4 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad p = ?$$

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & p &= m \cdot v \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = v \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = v \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} =$$

$$= 2.4 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2.4 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2}} = 2.4 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2.4}{3}\right)^2}} = 3.64 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 014

Kolika je količina gibanja elektrona kada se giba brzinom $v = 0.9 \cdot c$? (Masa elektrona u mirovanju je $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, a brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rezultat: $5.64 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadatak 015 (Ivan, gimnazija)

Kolikom se brzinom giba tijelo, čija je masa za mirnog motritelja $m = 4$ kg, ako je masa tijela u mirovanju $m_0 = 2.4$ kg? ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s)

Rješenje 015

$$m = 4 \text{ kg}, \quad m_0 = 2.4 \text{ kg}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0}{m} \quad / \quad ^2 \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \Rightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 - 1 \quad / \quad \cdot (-c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \right] \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{c^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \right]} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2} =$$

$$= 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2.4 \text{ kg}}{4 \text{ kg}} \right)^2} = 2.4 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

Vježba 015

Kolikom se brzinom giba tijelo, čija je masa za mirnog motritelja $m = 2 \text{ kg}$, ako je masa tijela u mirovanju $m_0 = 1.2 \text{ kg}$? ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rezultat: $2.4 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Zadatak 016 (Marko, gimnazija)

Kako teče vrijeme u koordinatnom sustavu vezanom za foton?

Rješenje 016

$v = c, \quad \Delta t = ?$



Uporabom Lorentzove transformacije za vrijeme dobije se:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je Δt_0 vremenski interval u sustavu koji miruje, Δt vremenski interval u sustavu koji se giba brzinom v u odnosu na prvi sustav. Budući da se foton giba brzinom svjetlosti (i da samo tada egzistira) slijedi:

$$v = c \quad \text{i} \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{0}} = \infty.$$

U sustavu vezanom za foton gubi se pojam vremena.

Vježba 016

Raketa se giba u odnosu na mirnog motritelja brzinom $0.95 \cdot c$ (gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu). Koliko je vremena proteklo u sustavu vezanom za raketu ako je u sustavu motritelja prošao 1 sat?

Rezultat: 0.32 h .

Zadatak 017 (Rex, gimnazija)

Kolika je brzina čestice pri kojoj je njezin relativistički impuls dva puta veći od njezinog klasičnog impulsa?

Rješenje 017

$n = 2, \quad v = ?$

$$\frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = n \cdot m_0 \cdot v \Rightarrow \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \cdot m_0 \cdot v \Rightarrow \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \cdot m_0 \cdot v \quad / \cdot \frac{1}{m_0 \cdot v} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad / 2 \Rightarrow 1 = 4 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \quad / \cdot c^2 \Rightarrow v^2 = \frac{3}{4} \cdot c^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot c^2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c \Rightarrow v = 0.866 \cdot c.$$

Vježba 017

Kolika je brzina čestice pri kojoj je njezin relativistički impuls tri puta veći od njezinog klasičnog impulsa?

Rezultat: $0.94 \cdot c$.

Zadatak 018 (Rex, gimnazija)

Kolika greška nastaje ako se zbroj brzina $v_1 = \frac{2}{3} \cdot c$ i $v_2 = \frac{1}{3} \cdot c$, umjesto relativistički promatra klasično?

Rješenje 018

$$v_1 = \frac{2}{3} \cdot c, \quad v_2 = \frac{1}{3} \cdot c, \quad p = ?$$

Relativna brzina u klasičnom smislu iznosi:

$$v_r = v_1 + v_2 \Rightarrow v_r = \frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot c \Rightarrow v_r = c.$$

Relativna brzina u relativističkom smislu je:

$$v_r' = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} \Rightarrow v_r' = \frac{\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot c}{1 + \frac{\frac{2}{3} \cdot c \cdot \frac{1}{3} \cdot c}{c^2}} \Rightarrow v_r' = \frac{c}{1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{c^2}{c^2}} \Rightarrow v_r' = \frac{c}{1 + \frac{2}{9}} \Rightarrow v_r' = \frac{c}{\frac{11}{9}} \Rightarrow v_r' = \frac{9}{11} \cdot c.$$

Za nastalu grešku dobije se:

$$p = \frac{v_r - v_r'}{v_r} \cdot 100\% \Rightarrow p = \frac{c - \frac{9}{11} \cdot c}{c} \cdot 100\% \Rightarrow p = \frac{2}{11} \cdot 100\% \Rightarrow p = \frac{2}{11} \cdot 100\% \Rightarrow p = 18.18\%.$$

Vježba 018

Kolika greška nastaje ako se zbroj brzina $v_1 = \frac{4}{5} \cdot c$ i $v_2 = \frac{1}{5} \cdot c$, umjesto relativistički promatra klasično?

Rezultat: 13.79% .

Zadatak 019 (Rex, gimnazija)

U procesu nestajanja para elektron – pozitron nastaju dva γ – fotona, koji se gibaju po istom pravcu u suprotnim smjerovima. Kolika je brzina jednog γ – fotona u odnosu na drugi?

Rješenje 019

$$v_1 = v_2 = c, \quad v_r = ?$$

Relativna brzina jednog fotona u odnosu na drugi iznosi:

$$v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} \Rightarrow v_r = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} \Rightarrow v_r = \frac{2 \cdot c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} \Rightarrow v_r = \frac{2 \cdot c}{1 + 1} \Rightarrow v_r = \frac{2 \cdot c}{2} \Rightarrow v_r = c.$$

Vježba 019

U procesu nestajanja para elektron – pozitron nastaju dva γ – fotona, koji se gibaju po istom pravcu u suprotnim smjerovima. Kolika je relativna brzina γ – fotona?

Rezultat: c .

Zadatak 020 (Rex, gimnazija)

Kod koje se vrijednosti brzine v relativistička masa m razlikuje od mase mirovanja m_0 za milijunti dio?

Rješenje 020

$$\frac{\Delta m}{m} = 10^{-6}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ gdje je } m_0 \text{ masa mirovanja, } m \text{ masa čestice brzine } v.$$

Računamo brzinu v:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m}{m} = 10^{-6} &\Rightarrow \frac{m - m_0}{m} = 10^{-6} \Rightarrow \frac{m}{m} - \frac{m_0}{m} = 10^{-6} \Rightarrow 1 - \frac{m_0}{m} = 10^{-6} \Rightarrow -\frac{m_0}{m} = 10^{-6} - 1 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{m_0}{m} = 1 - 10^{-6} &\Rightarrow \frac{m_0}{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = 1 - 10^{-6} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - 10^{-6} \quad / \cdot 2 \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - 2 \cdot 10^{-6} + 10^{-12} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zanemarimo } 10^{-12} \text{ jer} \\ \text{je jako mala vrijednost} \end{array} \right] \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - 2 \cdot 10^{-6} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - 2 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{v^2}{c^2} = -2 \cdot 10^{-6} \quad / \cdot (-c^2) &\Rightarrow v^2 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot c^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 10^{-6} \cdot c^2} \Rightarrow v = c \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow v = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2} &= 424\,264.07 \frac{m}{s} \approx 424 \frac{km}{s}. \end{aligned}$$

Vježba 020

Kod koje se vrijednosti brzine v relativistička masa m razlikuje od mase mirovanja m_0 za deseti dio?

Rezultat: $0.44 \cdot c$.