Zadatak 401 (Danijel, veleučilište)

Na optičku rešetku konstante 2.2 μm okomito pada monokromatska svjetlost. Odredite valnu duljinu ove svjetlosti, ako je kut između maksimuma prvog i drugog reda spektra 15°.

Rješenje 401

$d = 2.2\ \mu m = 2.2 \cdot 10^{-6}\ m, \quad \alpha, \quad \Delta\alpha = 15°, \quad \lambda = ?$

Optička rešetka sastoji se od ekvidistantnih tijesno poredanih pukotina. Udaljenost između dviju pukotina zove se konstanta rešetke. Maksimum rasvjete dobit ćemo interferencijom u smjerovima koji zatvaraju kut α_k s okomicom na optičku mrežicu, tj. ako je

$$k \cdot \lambda = d \cdot \sin \alpha_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Napišimo jednadžbe za maksimum prvog (k = 1) i drugog (k = 2) reda.

$$d \cdot \sin(\alpha) = \lambda \quad , \quad d \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha) = 2 \cdot \lambda.$$

Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} d \cdot \sin(\alpha) = \lambda \\ d \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha) = 2 \cdot \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{d \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha)}{d \cdot \sin(\alpha)} = \frac{2 \cdot \lambda}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha)}{d \cdot \sin(\alpha)} = \frac{2 \cdot \lambda}{\lambda} \Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\Delta\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\Delta\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2 \Rightarrow \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\Delta\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\Delta\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\Delta\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\Delta\alpha) = 2 \Rightarrow \cos(\Delta\alpha) + ctg(\alpha) \cdot \sin(\Delta\alpha) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(15°) + ctg(\alpha) \cdot \sin(15°) = 2 \Rightarrow ctg(\alpha) \cdot \sin(15°) = 2 - \cos(15°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ctg(\alpha) \cdot \sin(15°) = 2 - \cos(15°) \ / \cdot \frac{1}{\sin(15°)} \Rightarrow ctg(\alpha) = \frac{2 - \cos(15°)}{\sin(15°)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = ctg^{-1}\left(\frac{2 - \cos(15°)}{\sin(15°)}\right) \Rightarrow \text{DEG} \Rightarrow \alpha = 14°.$$

Valna duljina svjetlosti je

$$\lambda = d \cdot \sin(\alpha) = 2.2 \cdot 10^{-6}\ m \cdot \sin(14°) = \text{DEG} = 5.32 \cdot 10^{-7}\ m = 532 \cdot 10^{-9}\ m = 532\ nm.$$

Vježba 401

Na optičku rešetku konstante 2.2 μm okomito pada monokromatska svjetlost. Odredite valnu duljinu ove svjetlosti, ako je kut između maksimuma prvog i drugog reda spektra 10°.

Rezultat: 371 nm.

Zadatak 402 (Petra, maturantica)

Apsolutno crno tijelo zagrijemo s temperature T na temperaturu 2 · T. Izračunajte početnu temperaturu T ako je maksimum izračene energije pri temperaturi 2 · T na valnoj duljini 580 nm.

Rješenje 402

$2 \cdot T, \quad \lambda_m = 580\ nm = 5.8 \cdot 10^{-7}\ m, \quad T = ?$

Wienov zakon

Valna duljina kojoj pripada maksimum zračenja λ_m je to manja što je temperatura tijela viša. Wilhem Wien teorijskim je putem našao da vrijedi zakon

$$\lambda_m \cdot T = 2.897 \cdot 10^{-3} \; K \cdot m,$$

gdje je λ_m valna duljina za koju je intenzitet zračenja maksimalan ako tijelo ima temperaturu T.

$$\lambda_m \cdot 2 \cdot T = 2.897 \cdot 10^{-3} \; K \cdot m \;\Rightarrow\; \lambda_m \cdot 2 \cdot T = 2.897 \cdot 10^{-3} \; K \cdot m \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot \lambda_m} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; T = \frac{2.897 \cdot 10^{-3} \; K \cdot m}{2 \cdot \lambda_m} = \frac{2.897 \cdot 10^{-3} \; K \cdot m}{2 \cdot 5.8 \cdot 10^{-7} \; m} = 2497.41 \; K.$$

Vježba 402

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 403 (Roky, maturant)

Monokromatska se svjetlost ogiba na optičkoj rešeci pod kutom 21° 15' u spektru prvog reda. Koliki je kut ogiba te svjetlosti u spektru drugog reda?

Rješenje 403

α_1 = 21° 15', k_1 = 1, k_2 = 2, α_2 = ?

Optička rešetka sastoji se od ekvidistantnih tijesno poredanih pukotina. Udaljenost između dviju pukotina zove se konstanta rešetke. Maksimum rasvjete dobit ćemo interferencijom u smjerovima koji zatvaraju kut α_k s okomicom na optičku mrežicu, tj. ako je

$$k \cdot \lambda = d \cdot \sin \alpha_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

$$\left.\begin{aligned} d \cdot \sin(\alpha_1) &= 1 \cdot \lambda \\ d \cdot \sin(\alpha_2) &= 2 \cdot \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} d \cdot \sin(\alpha_1) &= \lambda \\ d \cdot \sin(\alpha_2) &= 2 \cdot \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d \cdot \sin(\alpha_2)}{d \cdot \sin(\alpha_1)} = \frac{2 \cdot \lambda}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d \cdot \sin(\alpha_2)}{d \cdot \sin(\alpha_1)} = \frac{2 \cdot \lambda}{\lambda} \Rightarrow \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} = 2 \Rightarrow \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} = 2 \; / \cdot \sin(\alpha_1) \Rightarrow \sin(\alpha_2) = 2 \cdot \sin(\alpha_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \sin^{-1}(2 \cdot \sin(\alpha_1)) \Rightarrow \alpha_2 = \sin^{-1}(2 \cdot \sin(21^\circ 15')) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 46^\circ 27'.$$

Vježba 403

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 404 (Roky, maturant)

Optička rešetka ima 500 zareza na 1 mm. Okomito na rešetku pada paralelni snop svjetlosti valne duljine 400 nm i 410 nm. Koliki je kutni razmak između maksimuma prvog reda za te dvije linije?

Rješenje 404

n = 500, l = 1 mm = 10^{-3} m, λ = 400 nm = 4 · 10^{-7} m, λ' = 410 nm = 4.1 · 10^{-7} m, $\Delta\alpha$ = ?

Optička rešetka sastoji se od ekvidistantnih tijesno poredanih pukotina. Udaljenost između dviju pukotina zove se konstanta rešetke. Maksimum rasvjete dobit ćemo interferencijom u smjerovima koji zatvaraju kut α_k s okomicom na optičku mrežicu, tj. ako je

$$k \cdot \lambda = d \cdot \sin \alpha_k , \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots ,\ n.$$

Konstanta rešetke je

$$d = \frac{l}{n} = \frac{10^{-3}\ m}{500} = 2 \cdot 10^{-6}\ m.$$

Na optičku rešetku upadaju dvije različite duljine vala pa ćemo u spektrima svakog reda, osim nultog, dobiti po dvije linije. Iz uvjeta za maksimum rasvjete dobivamo za spektar prvog reda (k = 1) kutove pod kojima se vidi maksimum za valne duljine λ i λ'.

$$\left.\begin{array}{l} d \cdot \sin\left(\alpha_1\right) = 1 \cdot \lambda \\ d \cdot \sin\left(\alpha_1 '\right) = 1 \cdot \lambda ' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \cdot \sin\left(\alpha_1\right) = \lambda \\ d \cdot \sin\left(\alpha_1 '\right) = \lambda ' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \cdot \sin\left(\alpha_1\right) = \lambda \ / \cdot \frac{1}{d} \\ d \cdot \sin\left(\alpha_1 '\right) = \lambda ' \ / \cdot \frac{1}{d} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin\left(\alpha_1\right) = \frac{\lambda}{d} \\ \sin\left(\alpha_1 '\right) = \frac{\lambda '}{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{d}\right) \\ \alpha_1 ' = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda '}{d}\right) \end{array}\right\}.$$

Kutni razmak je

$$\Delta\alpha = \alpha_1 ' - \alpha_1 \ \Rightarrow \ \Delta\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda '}{d}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{d}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \Delta\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{4.1 \cdot 10^{-7}\ m}{2 \cdot 10^{-6}\ m}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{4 \cdot 10^{-7}\ m}{2 \cdot 10^{-6}\ m}\right) \ \Rightarrow$$  $$\Rightarrow \ \Delta\alpha = 17'33''.$$

Vježba 404

Optička rešetka ima 500 zareza na 1 mm. Okomito na rešetku pada paralelni snop svjetlosti valne duljine 400 nm i 4120 nm. Koliki je kutni razmak između maksimuma drugog reda za te dvije linije?

Rezultat: $\Delta\alpha = 37'36''.$

Zadatak 405 (Lana, maturantica)

Simetrična bikonveksna leća indeksa loma 1.5 daje jasnu realnu sliku kada je predmet udaljen 25 cm od leće, a slika 40 cm od leće. Nađite polumjer zakrivljenosti leće.

Rješenje 405

$R_1 = R_2 = R$ simetrična bikonveksna leća, n = 1.5, a = 25 cm = 0.25 m, b = 40 cm = = 0.4 m, R = ?

Leće su prozirna tijela, omeđena dvjema sfernim plohama, od kojih jedna može biti ravnina. Leće širokog ruba jesu divergentne (ili konkavne, ili rastresne), a leće tankog ruba konvergentne (ili konveksne, ili sabirne). Jednadžba je tanke leće

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je a udaljenost predmeta i b udaljenost slike od leće, a f fokalna daljina leće.
Jednadžba je tanke leće

$$\frac{1}{f} = \left(n - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

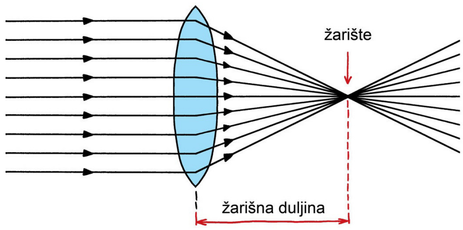
gdje je f fokalna daljina leće, n relativni indeks loma leće (prema sredstvu u kojemu se nalazi leća), a

R_1 i R_2 jesu polumjeri zakrivljenosti sfernih ploha leće.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}\\ \frac{1}{f}=(n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{b+a}{a\cdot b}=\frac{1}{f}\\ \frac{1}{f}=(n-1)\cdot\frac{2}{R}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a+b}{a\cdot b}=(n-1)\cdot\frac{2}{R}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{a\cdot b}=(n-1)\cdot\frac{2}{R}\ /\cdot\frac{R\cdot a\cdot b}{a+b}\Rightarrow R=2\cdot(n-1)\cdot\frac{a\cdot b}{a+b}=$$

$$=2\cdot(1.5-1)\cdot\frac{0.25\ m\cdot 0.4\ m}{0.25\ m+0.4\ m}=0.1538\ m=15.38\ cm.$$



Vježba 405

Simetrična bikonveksna leća indeksa loma 1.3 daje jasnu realnu sliku kada je predmet udaljen 25 cm od leće, a slika 40 cm od leće. Nađite polumjer zakrivljenosti leće.

Rezultat: 9.23 cm.

Zadatak 406 (Damir, maturant)

Udaljenost između predmeta i zastora na optičkoj klupi je 90 cm. Između njih je konvergentna leća žarišne daljine $\frac{80}{9}$ cm. Odredite položaj leće pri kojem je slika najoštrija.

Rješenje 406

d = 90 cm = 0.9 m, $f=\frac{80}{9}\ cm=\frac{0.8}{9}\ m=\frac{4}{45}\ m,$ a = ?, b = ?

Leće su prozirna tijela, omeđena dvjema sfernim plohama, od kojih jedna može biti ravnina. Leće širokog ruba jesu divergentne (ili konkavne, ili rastresne), a leće tankog ruba konvergentne (ili konveksne, ili sabirne). Jednadžba je tanke leće

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

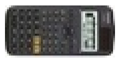
gdje je a udaljenost predmeta i b udaljenost slike od leće, a f fokalna daljina leće.

$$\left.\begin{array}{l}a+b=d\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}b=d-a\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{d-a}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{d-a}=\frac{1}{f}\ /\cdot a\cdot f\cdot(d-a)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\cdot(d-a)+a\cdot f=a\cdot(d-a)\Rightarrow f\cdot d-f\cdot a+a\cdot f=a\cdot d-a^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\cdot d-f\cdot a+a\cdot f=a\cdot d-a^2\Rightarrow f\cdot d=a\cdot d-a^2\Rightarrow a^2-d\cdot a+f\cdot d=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-0.9\cdot a+\frac{4}{45}\cdot 0.9=0\Rightarrow a^2-0.9\cdot a+0.08=0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2-0.9\cdot a+0.08=0\\ a=1\ ,\ b=-0.9\ ,\ c=0.08\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow$$  $$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = 0.8 \ m = 80 \ cm \\ a_2 = 0.1 \ m = 10 \ cm \end{array} \right\}.$$

Postoje dva rješenja. Odgovarajuće udaljenosti slike od leće su:

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = d - a_1 \\ b_2 = d - a_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b_1 = 90 \ cm - 80 \ cm \\ b_2 = 90 \ cm - 10 \ cm \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b_1 = 10 \ cm \\ b_2 = 80 \ cm \end{array} \right\}.$$

Vježba 406

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 407 (Damir, maturant)

Udaljenost predmeta od zastora na optičkoj klupi je 1 m. Odredite minimalnu jakost konvergentne leće pomoću koje se dobije oštra slika predmeta.

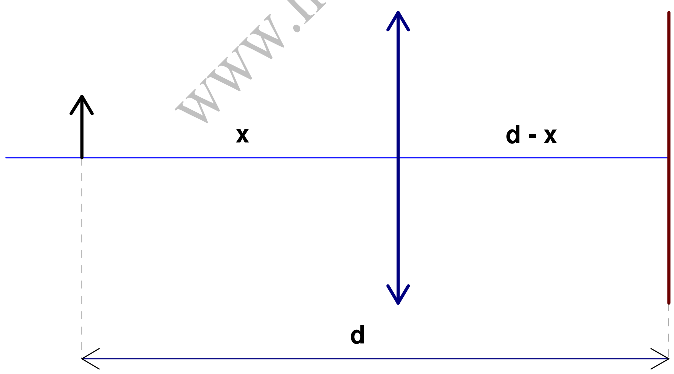
Rješenje 407

d = 1 m, C = ?

Leće su prozirna tijela, omeđena dvjema sfernim plohama, od kojih jedna može biti ravnina. Leće širokog ruba jesu divergentne (ili konkavne, ili rastresne), a leće tankog ruba konvergentne (ili konveksne, ili sabirne). Jednadžba je tanke leće

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = C,$$

gdje je a udaljenost predmeta i b udaljenost slike od leće, a C jakost ili konvergencija leće (recipročna vrijednost fokalne daljine). Mjerna jedinica jakosti leće je recipročni metar ili dioptrija, m^{-1}. Prema dogovoru dioptrija je **pozitivna** za sabirne (konvergentne, ispupčene, konveksne) leće, a negativna za rastresne (divergentne, udubljene, konkavne) leće.



Pretpostavimo da se predmet mora nalaziti na udaljenosti x od leće kako bismo dobili oštru sliku. Iz skice vidi se:

$$a = x \ , \ b = d - x.$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = C \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} = C \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} = C \ / \cdot x \cdot (d-x) \Rightarrow d - x + x = C \cdot x \cdot (d-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d - x + x = C \cdot x \cdot d - C \cdot x^2 \Rightarrow d = C \cdot x \cdot d - C \cdot x^2 \Rightarrow C \cdot x^2 - C \cdot d \cdot x + d = 0.$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu po nepoznanici x. Da bi x bio realan broj diskriminanta ove jednadžbe mora biti nenegativna.

$$C \cdot x^2 - C \cdot d \cdot x + d = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C \cdot x^2 - C \cdot d \cdot x + d = 0 \\ a = C \ , \ b = -C \cdot d \ , \ c = d \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{diskriminanta nenegativna} \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-C\cdot d\right)^2-4\cdot C\cdot d\geq 0 \Rightarrow C^2\cdot d^2-4\cdot C\cdot d\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjeti}\\ C>0\ ,\ \ d>0\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C^2\cdot d^2-4\cdot C\cdot d\geq 0\ /\cdot\frac{1}{C\cdot d^2} \Rightarrow C-\frac{4}{d}\geq 0 \Rightarrow C\geq\frac{4}{d} \Rightarrow C\geq\frac{4}{1\ m} \Rightarrow C\geq 4\ m^{-1}.$$

Vježba 407

Udaljenost predmeta od zastora na optičkoj klupi je 2 m. Odredite minimalnu jakost konvergentne leće pomoću koje se dobije oštra slika predmeta.

Rezultat: $C \geq 2\ m^{-1}$.

Zadatak 408 (Tony, gimnazija)

Dokažite da je pomak zrake svjetlosti δ kad prođe ta zraka kroz planparalelnu ploču debljine d jednak

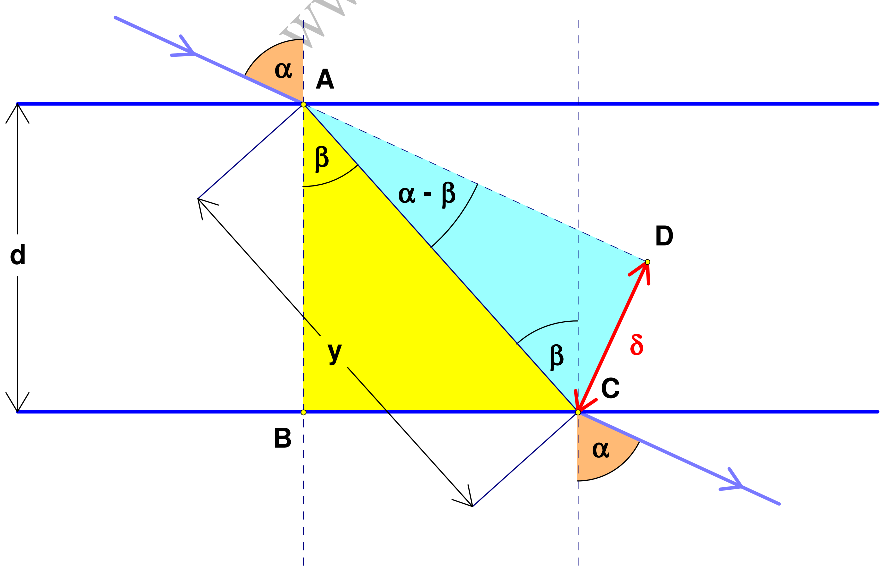
$$\delta=\frac{d\cdot\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\cos\left(\beta\right)},$$

gdje je α kut upadanja, β kut loma zrake.

Rješenje 408

d, α, β, δ = ?

Planparalelna ploča je homogeno prozirno optičko sredstvo, omeđeno dvjema ravnim usporednim plohama. Zraka svjetlosti lomi se dvaput prolazeći kroz planparalelnu ploču. Nakon prelamanja na graničnim površinama ploče, zraka izlazi bez promjene smjera pomaknuta paralelno samoj sebi.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.



Promatramo pravokutne trokute ΔABC i ΔCD.

Trokut ABC

$$\cos\left(\beta\right)=\frac{d}{y} \Rightarrow \cos\left(\beta\right)=\frac{d}{y}\ /\cdot\frac{y}{\cos\left(\beta\right)} \Rightarrow y=\frac{d}{\cos\left(\beta\right)}.$$

Trokut ACD

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{\delta}{y} \Rightarrow \frac{\delta}{y}=\sin(\alpha-\beta) \Rightarrow \frac{\delta}{y}=\sin(\alpha-\beta) \;/\cdot y \Rightarrow \delta=y\cdot\sin(\alpha-\beta).$$

Iz sustava dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{d}{\cos(\beta)} \\ \delta=y\cdot\sin(\alpha-\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right] \Rightarrow \delta=\frac{d\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\beta)}.$$

Vježba 408

Odmor!

Rezultat: …