Zadatak 301 (Davor, srednja škola)

Do koje se temperature može na Mjesecu (gdje nema zraka) ugrijati crna površina tla kad je Sunce u zenitu ako svaki m^2 površine primi energiju 1.35 kW? (Stefan – Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W / ($m^2 \cdot K^4$))

Rješenje 301

$A = 1\ m^2$, $P = 1.35\ kW = 1350\ W$, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ W / (m^2 \cdot K^4)$, $T = ?$

Štefan-Boltzmannov zakon

Toplinska energija koju zrači površina apsolutno crnog tijela u jedinici vremena određuje se zakonom:

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4,$$

gdje je P snaga zračenja, T temperatura tijela, A površina tijela i σ Stefan-Boltzmannova konstanta

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}.$$

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4 \Rightarrow \sigma \cdot A \cdot T^4 = P \Rightarrow \sigma \cdot A \cdot T^4 = P \ / \cdot \frac{1}{\sigma \cdot A} \Rightarrow T^4 = \frac{P}{\sigma \cdot A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^4 = \frac{P}{\sigma \cdot A} \ / \sqrt[4]{\ } \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma \cdot A}} = \sqrt[4]{\frac{1350\ W}{5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 1\ m^2}} = 392.81\ K.$$

Vježba 301

Do koje se temperature može na Mjesecu (gdje nema zraka) ugrijati crna površina tla kad je Sunce u zenitu ako svaki 100 dm^2 površine primi energiju 1.35 kW? (Stefan – Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W / ($m^2 \cdot K^4$))

Rezultat: 392.81 K.

Zadatak 302 (Davor, srednja škola)

Odredi snagu zračenja apsolutno crnog tijela s površine 1 cm^2 ako je poznato da je najveća energija zračenja na valnoj duljini $4.84 \cdot 10^{-5}$ cm. (Stefan – Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W / ($m^2 \cdot K^4$))

Rješenje 302

$A = 1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$, $\lambda_m = 4.84 \cdot 10^{-5}\ cm = 4.84 \cdot 10^{-7}\ m$, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ W / (m^2 \cdot K^4)$, $P = ?$

Stefan-Boltzmannov zakon

Toplinska energija koju zrači površina apsolutno crnog tijela u jedinici vremena određuje se zakonom:

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4,$$

gdje je P snaga zračenja, T temperatura tijela, A površina tijela i σ Stefan-Boltzmannova konstanta

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}.$$

Prema Wienovu zakonu umnožak apsolutne temperature T i valne duljine λ_m kojoj pripada najveća energija zračenja u spektru apsolutno crnog tijela jednak je stalnoj veličini, tj.

$$\lambda_m \cdot T = C = 2.9 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_m \cdot T = C \\ P = \sigma \cdot A \cdot T^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_m \cdot T = C \ / \cdot \frac{1}{\lambda_m} \\ P = \sigma \cdot A \cdot T^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T = \frac{C}{\lambda_m} \\ P = \sigma \cdot A \cdot T^4 \end{array}\right\} \Rightarrow P = \sigma \cdot A \cdot \left(\frac{C}{\lambda_m}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[C = 2.9 \cdot 10^{-3} \; m \cdot K \right] \Rightarrow P = \sigma \cdot A \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^{-3} \; m \cdot K}{\lambda_m} \right)^4 =$$

$$= 5.67 \cdot 10^{-8} \; \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 10^{-4} \; m^2 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^{-3} \; m \cdot K}{\lambda_m} \right)^4 = 7307.92 \; W \approx 7.3 \cdot 10^3 \; W.$$

Vježba 302

Odredi snagu zračenja apsolutno crnog tijela s površine 100 mm^2 ako je poznato da je najveća energija zračenja na valnoj duljini 4.84 · 10^{-5} cm. (Stefan – Boltzmannova konstanta σ = 5.67 · 10^{-8} W / (m^2 · K^4))

Rezultat: 7.3 · 10^3 W.

Zadatak 303 (Josip, srednja škola)

Usporedni snop rentgenskih zraka ogiba se na nekom kristalu. Valna duljina zraka je 1.539 · 10^{-10} m. Koliki je kut sjaja prvog reda ako je daljina mrežnih ravnina kristala 2 · 10^{-10} m?

Rješenje 303

λ = 1.539 · 10^{-10} m, k = 1, d = 2 · 10^{-10} m, Θ =?

Kristali ogibaju rentgenske zrake kao prostorne optičke rešetke. Smjer u kojem se otklanjaju rentgenske zrake dan je Braggovom (Bregovom) jednadžbom:

$$2 \cdot d \cdot \sin \Theta = k \cdot \lambda,$$

gdje je d razmak između dviju mrežnih ravnina u kristalu, Θ polovina kuta otklona (kut sjaja), k prirodni broj, a λ duljina vala rentgenskih zraka.

$$2 \cdot d \cdot \sin \Theta = k \cdot \lambda \Rightarrow \left[k = 1 \right] \Rightarrow 2 \cdot d \cdot \sin \Theta = \lambda \Rightarrow 2 \cdot d \cdot \sin \Theta = \lambda \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \Theta = \frac{\lambda}{2 \cdot d} \Rightarrow \Theta = \sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{2 \cdot d} \right) \Rightarrow \Theta = \sin^{-1} \left(\frac{1.539 \cdot 10^{-10} \; m}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-10} \; m} \right) \Rightarrow \Theta = 22^\circ 37' 42''.$$

Vježba 303

Usporedni snop rentgenskih zraka ogiba se na nekom kristalu. Valna duljina zraka je 1.539 · 10^{-8} cm. Koliki je kut sjaja prvog reda ako je daljina mrežnih ravnina kristala 2 · 10^{-8} cm?

Rezultat: 22º 37' 42".

Zadatak 304 (Antonio, gimnazija)

Kad se usporedni snop rentgenskih zraka ogiba na kristalu kuhinjske soli, dobiva se maksimum prvog reda pri kutu sjaja 6º 50'. Nađi valnu duljinu usporednih rentgenskih zraka ako je razmak između mrežnih ravnina kristala 2.81 · 10^{-8} cm.

Rješenje 304

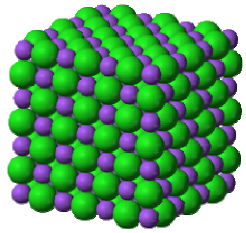
k = 1, Θ = 6º 50', d = 2.81 · 10^{-8} cm = 2.81 · 10^{-10} m, λ = ?

Kristali ogibaju rentgenske zrake kao prostorne optičke rešetke. Smjer u kojem se otklanjaju rentgenske zrake dan je Braggovom (Bregovom) jednadžbom:

$$2 \cdot d \cdot \sin \Theta = k \cdot \lambda,$$

gdje je d razmak između dviju mrežnih ravnina u kristalu, Θ polovina kuta otklona (kut sjaja), k prirodni broj, a λ duljina vala rentgenskih zraka.

$$2 \cdot d \cdot \sin \Theta = k \cdot \lambda \Rightarrow [k = 1] \Rightarrow 2 \cdot d \cdot \sin \Theta = \lambda \Rightarrow \lambda = 2 \cdot d \cdot \sin \Theta =$$
$$= 2 \cdot 2.81 \cdot 10^{-10} \ m \cdot \sin\left(6^{\circ} 50'\right) = 6.69 \cdot 10^{-11} \ m = 0.669 \cdot 10^{-8} \ cm.$$



Vježba 304

Kad se usporedni snop rentgenskih zraka ogiba na kristalu kuhinjske soli, dobiva se maksimum prvog reda pri kutu sjaja 6º 50'. Nađi valnu duljinu usporednih rentgenskih zraka ako je razmak između mrežnih ravnina kristala $2.81 \cdot 10^{-9}$ dm.

Rezultat: $0.669 \cdot 10^{-8}$ cm.

Zadatak 305 (Antonio, gimnazija)

Aluminij kristalizira u kubičnoj rešetki. Kad se usporedni snop rentgenskih zraka valne duljine $\lambda = 1.539 \cdot 10^{-8}$ cm ogiba u kristalu, dobiva se maksimum prvog reda pri kutu sjaja 22º 20'. Kolika je udaljenost mrežnih ravnina kristala?

Rješenje 305

$\lambda = 1.539 \cdot 10^{-8}$ cm $= 1.539 \cdot 10^{-10}$ m, $\quad k = 1, \quad \Theta = 22º\ 20', \quad d = ?$

Kristali ogibaju rentgenske zrake kao prostorne optičke rešetke. Smjer u kojem se otklanjaju rentgenske zrake dan je Braggovom (Bregovom) jednadžbom:

$$2 \cdot d \cdot \sin \Theta = k \cdot \lambda,$$

gdje je d razmak između dviju mrežnih ravnina u kristalu, Θ polovina kuta otklona (kut sjaja), k prirodni broj, a λ duljina vala rentgenskih zraka.

$$2 \cdot d \cdot \sin \Theta = k \cdot \lambda \Rightarrow [k = 1] \Rightarrow 2 \cdot d \cdot \sin \Theta = \lambda \Rightarrow 2 \cdot d \cdot \sin \Theta = \lambda \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin \Theta} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \Theta} = \frac{1.539 \cdot 10^{-10} \ m}{2 \cdot \sin\left(22^{\circ} 20'\right)} = 2.03 \cdot 10^{-10} \ m.$$

Vježba 305

Aluminij kristalizira u kubičnoj rešetki. Kad se usporedni snop rentgenskih zraka valne duljine $\lambda = 1.539 \cdot 10^{-9}$ dm ogiba u kristalu, dobiva se maksimum prvog reda pri kutu sjaja 22º 20'. Kolika je udaljenost mrežnih ravnina kristala?

Rezultat: $2.03 \cdot 10^{-10}$ m.

Zadatak 306 (Asterix, gimnazija)

Koliku energiju zrači Sunce u jednoj minuti ako je temperatura na površini Sunca 5800 K? Zračenje Sunca smatramo približno jednakim zračenju apsolutno crnog tijela. Polumjer Sunca je 695000000 metara.

Rješenje 306

$t = 1$ min $= 60$ s, $\quad T = 5800$ K, $\quad r = 695000000$ m $= 6.95 \cdot 10^{8}$ m, $\quad E = ?$

Stefan-Boltzmannov zakon

Toplinska energija koju zrači površina apsolutno crnog tijela u jedinici vremena određuje se zakonom:

$$P = \sigma \cdot S \cdot T^4,$$

gdje je P snaga zračenja, T temperatura tijela, S površina tijela i σ Stefan-Boltzmannova konstanta

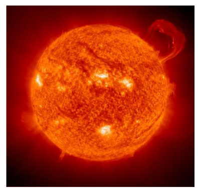
$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}.$$

Formula za oplošje kugle polumjera r:

$$S = 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

Snaga je brzina vršenja rada ili prijenosa energije. Ne misli se na brzinu gibanja u prostoru, nego na brzinu promjene funkcije koja ovisi o vremenu (vršenje rada ili prijenos energije).

$$P = \frac{W}{t} \quad , \quad P = \frac{E}{t} \Rightarrow E = P \cdot t.$$



Ako pretpostavimo da je Sunce kugla polumjera r, a njegovo zračenje smatramo približno jednakim zračenju apsolutno crnog tijela možemo napisati:

$$\left. \begin{array}{l} S = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \\ P = \sigma \cdot S \cdot T^4 \\ E = P \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P = \sigma \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot T^4 \\ E = P \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow E = \sigma \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot T^4 \cdot t =$$

$$= 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 4 \cdot \left(6.95 \cdot 10^8 \ m\right)^2 \cdot \pi \cdot \left(5800 \ K\right)^4 \cdot 60 \ s = 2.34 \cdot 10^{28} \ J.$$

Vježba 306

Koliku energiju zrači Sunce u jednoj minuti ako je temperatura na površini Sunca 5800 K? Zračenje Sunca smatramo približno jednakim zračenju apsolutno crnog tijela. Polumjer Sunca je 695000 kilometara.

Rezultat: $2.34 \cdot 10^{28}$ J.

Zadatak 307 (Krešimir, srednja škola)

Kada zrake svjetlosti padnu na vodu pod kutom 40º, kut loma iznosi 30º. Kolika je brzina svjetlosti u vodi? (brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8$ m / s)

Rješenje 307

$\alpha = 40^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $c = 3 \cdot 10^8$ m / s, $v = ?$

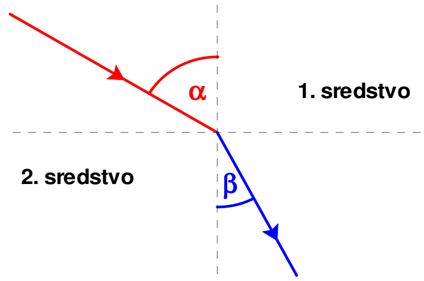
Pri prijelazu svjetlosti iz jednog optičkog sredstva u drugo frekvencija ostaje nepromijenjena, a valna se duljina i brzina mijenjaju. Apsolutni indeks loma n nekog prozirnog sredstva jednak je kvocijentu brzine svjetlosti u vakuumu c i brzine svjetlosti v u tom sredstvu.

$$n = \frac{c}{v}.$$

Kad svjetlost prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugo, mijenja smjer. Upadna zraka, okomica na granicu sredstva u upadnoj točki i lomljena zraka leže u istoj ravnini. Omjer sinusa kuta upadanja α i sinusa kuta loma β stalan je broj koji nazivamo indeksom loma n. Upadni kut α i kut loma β vezani su jednadžbom (Snelliusov zakona):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Ako je prvo sredstvo vakuum (zrak), tada indeks loma nazivamo apsolutnim indeksom loma n.



$$\left.\begin{matrix} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \\ n = \frac{c}{v} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v} \; / \cdot \frac{v \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow v = c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} =$$

$$= 3 \cdot 10^{8} \; \frac{m}{s} \cdot \frac{\sin 30^{\circ}}{\sin 40^{\circ}} = 2.33 \cdot 10^{8} \; \frac{m}{s}.$$

Vježba 307

Kada zrake svjetlosti padnu na vodu pod kutom 35º, kut loma iznosi 25º. Kolika je brzina svjetlosti u vodi? (brzina svjetlosti u praznini $c = 3 \cdot 10^8$ m / s)

Rezultat: $2.21 \cdot 10^8$ m / s.

Zadatak 308 (Ana, gimnazija)

U retrovizoru oblika konveksnog zrcala vidi se slika automobila koji je udaljen 100 m od tjemena zrcala. Koliko je linearno povećanje ako je polumjer zrcala 10 m?

Rješenje 308

x = 100 m, R = 10 m, γ = ?

Zrake koje padaju na sferno zrcalo usporedno s osi sijeku se u točki koja se zove fokus F ili žarište zrcala. Fokus leži na osi zrcala. Udaljenost f fokusa od tjemena jest fokalna ili žarišna daljina:

$$f = \frac{R}{2},$$

gdje je R polumjer sfernog zrcala.
Sferno zrcalo je dio kugline površine, tj. ono je kalota kugle. Jednadžba sfernog zrcala daje svezu između udaljenosti predmeta i slike od sfernog zrcala i fokalne daljine.
Uzmemo li kao ishodište tjeme zrcala i označimo li sa x udaljenost predmeta od tjemena, sa x' udaljenost slike od tjemena, sa f žarišnu ili fokalnu daljinu zrcala, vrijedi jednadžba:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}.$$

Udaljenost virtualnih slika i polumjer zakrivljenosti konveksnog zrcala imaju negativan predznak.
Povećanje zrcala γ zovemo omjerom između veličine slike y' i veličine predmeta y:

$$\gamma = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}.$$

Kad je γ negativan, slika je obrnuta. Kad je γ pozitivan, slika je uspravna.
Budući da je zrcalo konveksno, njegova žarišna ili fokalna daljina je negativna.

$$f=-\frac{R}{2}=-\frac{10\ m}{2}=-5\ m.$$

Računamo x' udaljenost slike od tjemena zrcala.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{x'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{x'}=\frac{x-f}{f\cdot x}\Rightarrow\left[\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\right]\Rightarrow x'=\frac{f\cdot x}{x-f}=$$

$$=\frac{-5\ m\cdot 100\ m}{100\ m-(-5\ m)}=\frac{-500\ m^2}{100\ m+5\ m}=\frac{-500\ m^2}{105\ m}=\frac{-500\ m^2}{105\ m}=-\frac{100}{21}\ cm.$$

Linearno povećanje iznosi:

$$\gamma=-\frac{x'}{x}=-\frac{-\frac{100}{21}\ cm}{100\ m}=\frac{\frac{100}{21}\ cm}{\frac{100}{1}\ cm}=\frac{\frac{100}{21}\ cm}{\frac{100}{1}\ cm}=\frac{1}{21}=0.048.$$

Vježba 308

U retrovizoru oblika konveksnog zrcala vidi se slika automobila koji je udaljen 1000 dm od tjemena zrcala. Koliko je linearno povećanje ako je polumjer zrcala 100 dm?

Rezultat: 0.048.

Zadatak 309 (Natko, gimnazija)

Predmet i realna slika međusobno su udaljeni 60 cm. Slika je 2 puta veća od predmeta. Kolika je žarišna daljina zrcala?

Rješenje 309

x' – x = 60 cm, $\frac{y'}{y}=-2$ slika je realna, f = ?

Sferno zrcalo je dio kugline površine, tj. ono je kalota kugle. Jednadžba sfernog zrcala daje svezu između udaljenosti predmeta i slike od sfernog zrcala i fokalne daljine.
Uzmemo li kao ishodište tjeme zrcala i označimo li sa x udaljenost predmeta od tjemena, sa x' udaljenost slike od tjemena, sa f žarišnu ili fokalnu daljinu zrcala, vrijedi jednadžba:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f}.$$

Udaljenost virtualnih slika i polumjer zakrivljenosti konveksnog zrcala imaju negativan predznak.
U izraze koji se odnose na sferna zrcala s negativnim predznakom uvrštavamo:

- udaljenost virtualne slike od tjemena zrcala
- žarišnu daljinu konveksnog zrcala
- veličinu obrnute slike (realne slike).

Povećanje zrcala γ zovemo omjerom između veličine slike y' i veličine predmeta y:

$$\gamma=\frac{y'}{y}=-\frac{x'}{x}.$$

Kad je γ negativan, slika je obrnuta. Kad je γ pozitivan, slika je uspravna.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y'}{y}=-\frac{x'}{x}\\ x'-x=60\ cm\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}\\ x'-x=60\ cm\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-\frac{x'}{x}=-2\\ x'-x=60\ cm\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-\frac{x'}{x}=-2\ /\cdot(-x)\\ x'-x=60\ cm\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x' = 2 \cdot x \\ x' - x = 60\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot x - x = 60\ cm \Rightarrow x = 60\ cm.$$

Računamo f žarišnu daljinu.

$$\left.\begin{array}{l} x' = 2 \cdot x \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot x} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{2+1}{2 \cdot x} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{3}{2 \cdot x} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{3}{2 \cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}\right] \Rightarrow f = \frac{2 \cdot x}{3} = \frac{2 \cdot 60\ cm}{3} = 40\ cm.$$

Vježba 309

Predmet i realna slika međusobno su udaljeni 6 dm. Slika je 2 puta veća od predmeta. Kolika je žarišna daljina zrcala?

Rezultat: 4 dm.

Zadatak 310 (Natko, gimnazija)

Slika predmeta dobivena tankom lećom jakosti 5 dpt vidi se na zastoru. Na kojoj udaljenosti od leće su postavljeni predmet i zastor, ako je predmet visok 5 cm, a njegova slika 10 cm?

Rješenje 310

$C = 5$ dpt $= 5$ m^{-1}, $y = 5$ cm, $y' = -10$ cm slika je realna, $x = ?$, $x' = ?$

Leće su prozirna tijela, omeđena dvjema sfernim plohama, od kojih jedna može biti ravnina. Leće širokog ruba jesu divergentne (ili konkavne, ili rastresne), a leće tankog ruba konvergentne (ili konveksne, ili sabirne). Jakost ili konvergencija leće C dana je jednadžbom

$$C = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'},$$

gdje je x udaljenost predmeta i x' udaljenost slike od leće.

Sabirne (konvergentne, konveksne) leće imaju pozitivnu optičku jakost, a rastresne (divergentne) leće imaju negativnu dioptrijsku jakost.

Povećanje, tj. omjer između veličine slike y' i predmeta y iznosi:

$$\gamma = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}.$$

$$-\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \Rightarrow -\frac{x'}{x} = \frac{-10\ cm}{5\ cm} \Rightarrow -\frac{x'}{x} = \frac{-10\ cm}{5\ cm} \Rightarrow -\frac{x'}{x} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x'}{x} = -2\ / \cdot (-x) \Rightarrow x' = 2 \cdot x.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} x' = 2 \cdot x \\ C = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow C = \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot x} \Rightarrow C = \frac{2+1}{2 \cdot x} \Rightarrow C = \frac{3}{2 \cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{2 \cdot x}\ / \cdot \frac{x}{C} \Rightarrow x = \frac{3}{2 \cdot C} = \frac{3}{2 \cdot 5\ m^{-1}} = 0.3\ m = 30\ cm.$$

Računamo x'.

$$\left.\begin{array}{l} x = 30\ cm \\ x' = 2 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow x' = 2 \cdot 30\ cm = 60\ cm.$$

Vježba 310

Slika predmeta dobivena tankom lećom jakosti 5 dpt vidi se na zastoru. Na kojoj udaljenosti od leće su postavljeni predmet i zastor, ako je predmet visok 0.5 dm, a njegova slika 1 dm?

Rezultat: 3 dm, 6 dm.

Zadatak 311 (Ivan, gimnazija)

Na koju udaljenost od divergentne leće žarišne daljine 10 cm moramo postaviti predmet da bismo dobili tri puta umanjenu sliku?

Rješenje 311

f = – 10 cm divergentna leća, $\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}$, x = ?

Leće su prozirna tijela, omeđena dvjema sfernim plohama, od kojih jedna može biti ravnina. Leće širokog ruba jesu divergentne (ili konkavne, ili rastresne), a leće tankog ruba konvergentne (ili konveksne, ili sabirne). Jednadžba je tanke leće

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f},$$

gdje je x udaljenost predmeta i x' udaljenost slike od leće, a f fokalna daljina leće. Udaljenost je virtualne slike, kao i fokalna daljina divergentne leće negativna ($x' < 0, f < 0$).
Povećanje, tj. omjer između veličine slike y' i predmeta y iznosi:

$$\gamma = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}.$$

$$-\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \Rightarrow -\frac{x'}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{x'}{x} = \frac{1}{3} \; / \cdot (-x) \Rightarrow x' = -\frac{x}{3}.$$

Računamo x.

$$\left. \begin{array}{l} x' = -\frac{x}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{3}{x} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1-3}{x} = \frac{1}{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{x} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{2}{x} \; / \cdot f \cdot x \Rightarrow x = -2 \cdot f = -2 \cdot (-10 \; cm) = 20 \; cm.$$

Vježba 311

Na koju udaljenost od divergentne leće žarišne daljine 1 dm moramo postaviti predmet da bismo dobili tri puta umanjenu sliku?

Rezultat: 2 dm.

Zadatak 312 (Ivan, gimnazija)

Na koju udaljenost od konveksnog sfernog zrcala treba postaviti predmet da njegova slika bude 1 m udaljena od zrcala? Polumjer zakrivljenosti zrcala je 2.5 m.

Rješenje 312

x' = – 1 m konveksno sferno zrcalo, R = 2.5 m, x = ?

Sferno zrcalo je dio kugline površine, tj. ono je kalota kugle. Jednadžba sfernog zrcala daje svezu između udaljenosti predmeta i slike od sfernog zrcala i fokalne daljine.
Uzmemo li kao ishodište tjeme zrcala i označimo li sa x udaljenost predmeta od tjemena, sa x' udaljenost slike od tjemena, sa f žarišnu ili fokalnu daljinu zrcala, vrijedi jednadžba:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}.$$

Udaljenost virtualnih slika i polumjer zakrivljenosti konveksnog zrcala imaju negativan predznak.
U izraze koji se odnose na sferna zrcala s negativnim predznakom uvrštavamo:

- udaljenost virtualne slike od tjemena zrcala
- žarišnu daljinu konveksnog zrcala
- veličinu obrnute slike (realne slike).

Budući da je zrcalo konveksno, njegova žarišna ili fokalna daljina je negativna.

$$f=-\frac{R}{2}=-\frac{2.5\ m}{2}=-1.25\ m.$$

Računamo x udaljenost predmeta od tjemena zrcala.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f}\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}=\frac{1}{f}-\frac{1}{x'}\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}=\frac{x'-f}{f\cdot x'}\ \Rightarrow\ \left[\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \Rightarrow\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\right]\ \Rightarrow\ x=\frac{f\cdot x'}{x'-f}=$$

$$=\frac{-1.25\ m\cdot(-1\ m)}{-1\ m-(-1.25\ m)}=\frac{1.25\ m^2}{-1\ m+1.25\ m}=\frac{1.25\ m^2}{0.25\ m}=\frac{-1.25\ m^2}{0.25\ m}=5\ m.$$

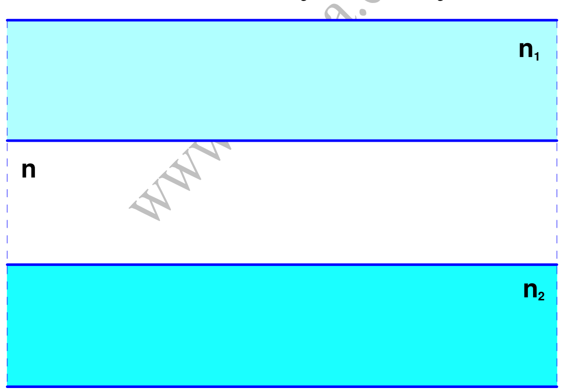
Vježba 312

Na koju udaljenost od konveksnog sfernog zrcala treba postaviti predmet da njegova slika bude 10 dm udaljena od zrcala? Polumjer zakrivljenosti zrcala je 25 dm.

Rezultat: 50 dm.

Zadatak 313 (Domagoj, gimnazija)

Između dvije usporedne staklene planparalelne ploče, indeksa loma n_1 i n_2, nalazi se sloj tekućine indeksa loma n. Pokažite da na lom zraka svjetlosti ne utječe tekućina između ploča.



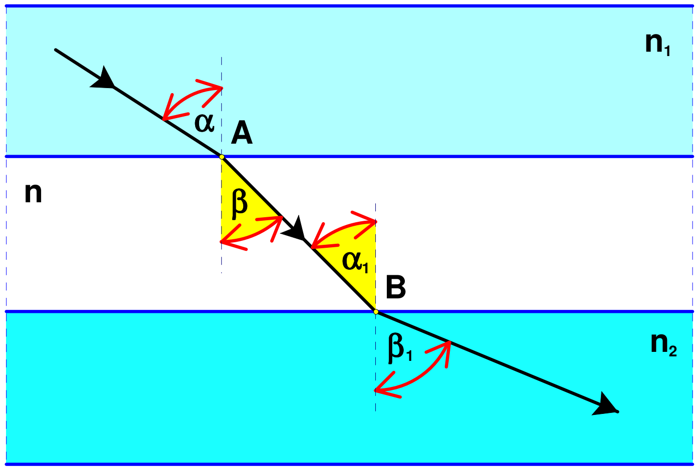
Rješenje 313

n_1, n_2, n

Kad svjetlost prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugo, mijenja smjer. Upadna zraka, okomica na granicu sredstva u upadnoj točki i lomljena zraka leže u istoj ravnini. Omjer sinusa kuta upadanja α i sinusa kuta loma β stalan je broj koji nazivamo indeksom loma. Upadni kut α i kut loma β vezani su jednadžbom (Snelliusov zakona):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1},$$

gdje su n_1 i n_2 indeksi loma prvog i drugog sredstva.



Uporabom zakona loma:

- za graničnu plohu staklo – voda (točka A) dobije se

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n}{n_1}$$

- za graničnu plohu voda – staklo (točka B) dobije se

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}=\frac{n_2}{n}.$$

Budući da su kutovi β i $α_1$ međusobno jednaki (kutovi s paralelnim kracima), slijedi:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}&=\frac{n}{n_1}\\ \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}&=\frac{n_2}{n}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[\beta=\alpha_1\right]\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}&=\frac{n}{n_1}\\ \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}&=\frac{n_2}{n}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{pomnožimo}\\ \text{jednadžbe}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}=\frac{n}{n_1}\cdot\frac{n_2}{n}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cancel{\sin\alpha_1}}\cdot\frac{\cancel{\sin\alpha_1}}{\sin\beta_1}=\frac{\cancel{n}}{n_1}\cdot\frac{n_2}{\cancel{n}}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Dakle, sloj tekućine neće utjecati na uvjete loma svjetlosti. Izuzetak je totalna refleksija na prvoj graničnoj plohi između stakla i tekućine.

Vježba 313

Između dvije usporedne staklene planparalelne ploče, indeksa loma n i n_1, nalazi se sloj tekućine indeksa loma n_2. Pokažite da na lom zraka svjetlosti ne utječe tekućina između ploča.

Rezultat: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta_1}=\dfrac{n_1}{n}.$

Zadatak 314 (Mirela, gimnazija)

Za koliko se pomakne zraka svjetlosti koja pada na planparalelnu staklenu ploču debelu 8 cm pod kutom od 60º? (indeks loma stakla n = 1.5)

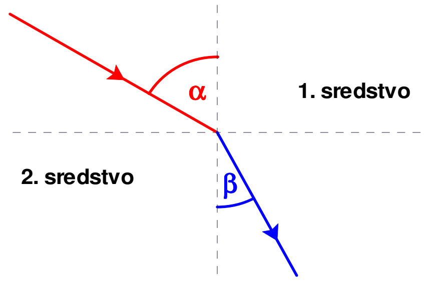
Rješenje 314

d = 8 cm = 0.08 m, α = 60º, n = 1.5, δ = ?

Kad svjetlost prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugo, mijenja smjer. Upadna zraka, okomica na granicu sredstva u upadnoj točki i lomljena zraka leže u istoj ravnini. Omjer sinusa kuta upadanja α i sinusa kuta loma β stalan je broj koji nazivamo indeksom loma n. Upadni kut α i kut loma β vezani su jednadžbom (Snelliusov zakona):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Ako je prvo sredstvo vakuum (zrak), tada indeks loma nazivamo apsolutnim indeksom loma n.



Planparalelna ploča je homogeno, optičko sredstvo, omeđeno dvjema ravnim paralelnim plohama. Zraka svjetlosti izlazi bez promjene smjera, samo je pomaknuta usporedno samoj sebi. Pomak δ zrake svjetlosti koja pada na planparalelnu ploču debljine d pod kutom α računa se po formuli

$$\delta = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta},$$

gdje je β kut loma zrake.
Najprije moramo izračunati kut loma β.

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \;/\cdot \frac{\sin \beta}{n} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right) =$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sin 60^\circ}{1.5}\right) = 35^\circ 16'.$$

Pomak zrake svjetlosti je

$$\delta = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = \frac{0.08\ m \cdot \sin\left(60^\circ - 35^\circ 16'\right)}{\cos 35^\circ 16'} = 0.041\ m = 4.1\ cm.$$

Vježba 314

Za koliko se pomakne zraka svjetlosti koja pada na planparalelnu staklenu ploču debelu 0.8 dm pod kutom od 60º? (indeks loma stakla n = 1.5)

Rezultat: 4.1 cm.

Zadatak 315 (Vjekoslav, gimnazija)

Zraka svjetlosti prolazi kroz planparalelnu ploču i pomakne se za 0.66 mm. Kolika je debljina ploče ako je kut upada 45º? (indeks loma stakla n = 1.5)

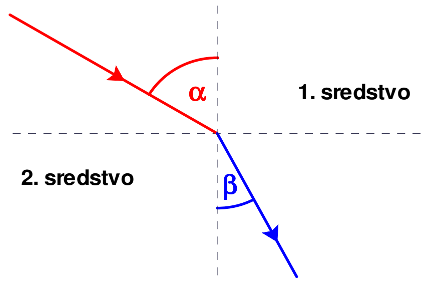
Rješenje 315

$\delta = 0.66\ mm = 6.6 \cdot 10^{-4}\ m, \quad \alpha = 45^\circ, \quad n = 1.5, \quad d = ?$

Kad svjetlost prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugo, mijenja smjer. Upadna zraka, okomica na granicu sredstva u upadnoj točki i lomljena zraka leže u istoj ravnini. Omjer sinusa kuta upadanja α i sinusa kuta loma β stalan je broj koji nazivamo indeksom loma n. Upadni kut α i kut loma β vezani su jednadžbom (Snelliusov zakona):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Ako je prvo sredstvo vakuum (zrak), tada indeks loma nazivamo apsolutnim indeksom loma n.



Planparalelna ploča je homogeno, optičko sredstvo, omeđeno dvjema ravnim paralelnim plohama. Zraka svjetlosti izlazi bez promjene smjera, samo je pomaknuta usporedno samoj sebi. Pomak δ zrake svjetlosti koja pada na planparalelnu ploču debljine d pod kutom α računa se po formuli

$$\delta = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta},$$

gdje je β kut loma zrake.
Najprije moramo izračunati kut loma β.

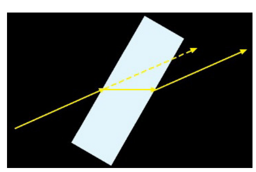
$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \; / \cdot \frac{\sin \beta}{n} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right) =$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sin 45^\circ}{1.5}\right) = 28^\circ 7'32''.$$

Debljina planparalelne ploče iznosi:

$$\delta = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \Rightarrow \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = \delta \Rightarrow \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = \delta \; / \cdot \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{\delta \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{6.6 \cdot 10^{-4} \, m \cdot \cos 28^\circ 7'32''}{\sin\left(45^\circ - 28^\circ 7'32''\right)} = 2.01 \cdot 10^{-3} \, m = 2.01 \, mm.$$



Vježba 315

Zraka svjetlosti prolazi kroz planparalelnu ploču i pomakne se za 0.066 cm. Kolika je debljina ploče ako je kut upada 45º? (indeks loma stakla n = 1.5)

Rezultat: 2.01 mm.

Zadatak 316 (Darko, gimnazija)

Dokažite da za planparalelnu ploču vrijedi formula $\delta = d \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}\right),$

gdje je δ pomak (udaljenost upadne i izlazne zrake), d debljina ploče, α kut upada, n indeks loma optičkog sredstva.

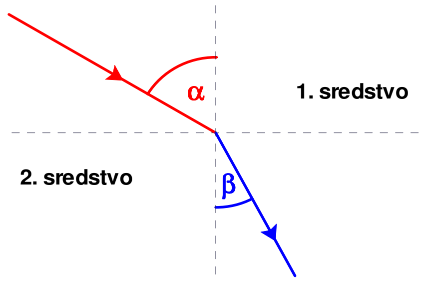
Rješenje 316

δ, d, α, n

Kad svjetlost prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugo, mijenja smjer. Upadna zraka, okomica na granicu sredstva u upadnoj točki i lomljena zraka leže u istoj ravnini. Omjer sinusa kuta upadanja α i sinusa kuta loma β stalan je broj koji nazivamo indeksom loma n. Upadni kut α i kut loma β vezani su jednadžbom (Snelliusov zakona):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n.$$

Ako je prvo sredstvo vakuum (zrak), tada indeks loma nazivamo apsolutnim indeksom loma n.



Planparalelna ploča je homogeno, optičko sredstvo, omeđeno dvjema ravnim paralelnim plohama. Zraka svjetlosti izlazi bez promjene smjera, samo je pomaknuta usporedno samoj sebi. Pomak δ zrake svjetlosti koja pada na planparalelnu ploču debljine d pod kutom α računa se po formuli

$$\delta=\frac{d\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta},$$

gdje je β kut loma zrake.
Najprije izračunamo cos β.

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ \Rightarrow\ n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ /\cdot\frac{\sin\beta}{n}\ \Rightarrow\ \sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{kvadriramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}\ /^{2}\ \Rightarrow\ \sin^2\beta=\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)^2\Rightarrow\ \sin^2\beta=\frac{\sin^2\alpha}{n^2}\ \Rightarrow\ \left[\cos^2\beta+\sin^2\beta=1\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos^2\beta+\frac{\sin^2\alpha}{n^2}=1\ \Rightarrow\ \cos^2\beta=1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}\ \Rightarrow\ \cos^2\beta=1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos\beta=\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}.$$

Dalje slijedi:

$$\delta=\frac{d\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}\ \Rightarrow\ \delta=d\cdot\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}\ \Rightarrow\ \delta=d\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \delta=d\cdot\left(\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}\right)\Rightarrow\ \delta=d\cdot\left(\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \delta=d\cdot\left(\sin\alpha-\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}\right)\Rightarrow\ \begin{bmatrix}\sin\beta=\dfrac{\sin\alpha}{n}\\ \cos\beta=\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{n^2}}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \delta = d\cdot\left(\sin\alpha - \frac{\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{n}}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}}\right) \Rightarrow\ \delta = d\cdot\left(\sin\alpha - \frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{n\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \delta = d\cdot\left(\sin\alpha - \frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sqrt{n^2\cdot\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}\right)}}\right) \Rightarrow\ \delta = d\cdot\left(\sin\alpha - \frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \delta = d\cdot\sin\alpha\cdot\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right).$$

Vježba 316

Ne trebate ništa dokazivati.

Rezultat: Odmorite se! ☺

Zadatak 317 (Maturantica, gimnazija)

Kugla polumjera 10 cm ima temperaturu 227 ºC. Kolika se energija izrači s ove kugle tijekom 100 s ako je smatramo apsolutno crnim tijelom ($\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W · m^{-2} · K^{-4})

Rješenje 317

r = 10 cm = 0.10 m, t = 227 ºC => T = 273.15 + t => T = (273.15 + 227) K = = 500.15 K, t = 100 s, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W · m^{-2} · K^{-4}, E = ?

Štefan-Boltzmannov zakon

Toplinska energija koju zrači površina apsolutno crnog tijela u jedinici vremena određuje se zakonom:

$$P = \sigma\cdot S\cdot T^4,$$

gdje je P snaga zračenja, T temperatura tijela, S površina tijela i σ Stefan-Boltzmannova konstanta

$$\sigma = 5.67\cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2\cdot K^4}.$$

Formula za oplošje kugle polumjera r:

$$S = 4\cdot r^2\cdot\pi.$$

Snaga je brzina vršenja rada ili prijenosa energije. Ne misli se na brzinu gibanja u prostoru, nego na brzinu promjene funkcije koja ovisi o vremenu (vršenje rada ili prijenos energije).

$$P = \frac{W}{t}\quad,\quad P = \frac{E}{t}\ \Rightarrow\ E = P\cdot t.$$

$$\left.\begin{array}{l} S = 4\cdot r^2\cdot\pi \\ P = \sigma\cdot S\cdot T^4 \\ E = P\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P = \sigma\cdot 4\cdot r^2\cdot\pi\cdot T^4 \\ E = P\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow\ E = \sigma\cdot 4\cdot r^2\cdot\pi\cdot T^4\cdot t =$$

$$= 5.67\cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2\cdot K^4}\cdot 4\cdot(0.10\ m)^2\cdot\pi\cdot(500.15\ K)^4\cdot 100\ s = 44\,585.54\ J.$$

Vježba 317

Kugla polumjera 1 dm ima temperaturu 227 ºC. Kolika se energija izrači s ove kugle tijekom 1 min i 40 s ako je smatramo apsolutno crnim tijelom ($\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W $\cdot$ m^{-2} $\cdot$ K^{-4})

Rezultat: 44585.54 J.